



金融学前沿译丛

INVESTMENT UNDER UNCERTAINTY

不确定条件下的投资

[美] 阿维纳什·迪克西特 Avinash K. Dixit / 著
[美] 罗伯特·平迪克 Robert S. Pindyck / 著
朱勇 黄立虎 / 译
丁新姪 朱静 / 译
朱勇 / 校

中国人民大学出版社

著作权合同登记号
图字：01-2001-3397号

INVESTMENT UNDER UNCERTAINTY

不确定条件下的投资

“本书成功地将业已丰富了我们对金融市场理解的期权定价的概念和技术运用于资本预算。这种姗姗来迟的应用将极大地改变商学院讲授金融理论的方式以及经济系讲授投资理论的方式。”

——默顿·H·米勒 (Merton H. Miller)，诺贝尔经济学奖获得者

“在传统上，期权理论被应用于精心设计以执行选择功能的金融工具。这些金融工具对大多数人来讲没有太大的用处。更重要的期权是由自然所创造出来的，包括我们所面临的所有重要选择。当我们还可以等待时，是否现在就消费资源（执行期权）。迪克西特和平迪克提供了将现代期权理论用于这些决策中的一种极富启发性的讨论，并且揭示了这种理论如何解释当经济波动时我们所观察到的现象。他们的理论意义非凡。”

——罗伯特·J·希勒 (Robert J. Shiller)，耶鲁大学教授

“《不确定条件下的投资》是两位杰出研究人员的一本激动人心的著作。本书全面地总结了有关的技术性结论。这些结论对研究涉及技术上不可逆的各具实践问题的经济学家及其他读者很有帮助。”

——托马斯·J·萨金特 (Thomas J. Sargent)，芝加哥大学教授

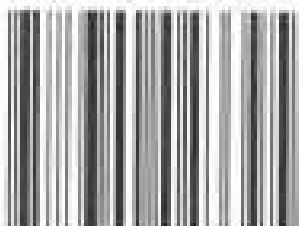
策划：马学亮 E-mail:mama113@sina.com

责任编辑：吴晓 陈宏 邢伯春

版式设计：赵星华

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS
北京 100044

ISBN 7-300-04339-9



9 787300 043395 >

ISBN 7-300-04339-9/P·1349


定价：49.00元

金融学前沿译丛

INVESTMENT UNDER UNCERTAINTY

不确定条件下的投资

[美] 阿维纳什·迪克西特 Avinash K. Dixit / 著
罗伯特·平迪克 Robert S. Pindyck / 著
朱 勇 黄立虎 / 译
丁新娅 朱 静 / 译
朱 勇 / 校

 中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

不确定条件下的投资 / [美] 迪克西特, [美] 平迪克著; 朱勇等译.
北京: 中国人民大学出版社, 2002
金融学前沿译丛

ISBN 7-300-04339-9/F·1349

I. 不…

II. ①迪…②平…③朱…

III. 投资学

IV. F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 088219 号

金融学前沿译丛

不确定条件下的投资

[美] 阿维纳什·迪克西特 著
[美] 罗伯特·平迪克

朱勇 黄立虎 译

丁新娅 朱静

朱勇 校

出版发行: 中国人民大学出版社

(北京中关村大街 31 号 邮编 100080)

邮购部: 62515351 门市部: 62514148

总编室: 62511242 出版部: 62511239

本社网址: www.crup.com.cn

人大教研网: www.ttrnet.com

经 销: 新华书店

印 刷: 涿州市星河印刷厂

开本: 787×965 毫米 1/16 印张: 30 插页 2

2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷

字数: 496 000

定价: 49.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

“金融学前沿译丛”总序

无论是对研究者还是对实践者，金融领域都是一处最值得冒险的乐园。诺贝尔经济学奖也不断眷顾着这个领域的佼佼者。政府、企业和居民都已经认识到，金融系统构成了整个经济体系的“心脏”。穷国的百姓们逐渐接受着超出传统的储蓄思维以外的投资知识，股票、债券不再是发达资本主义国家的专利，跟随经济全球化的步伐，不发达国家的居民开始和发达国家的居民一同选择明星公司的金融产品，并成为这些公司的所有者。不过，金融产品的复杂性和金融市场固有的投机性并不仅仅带来刺激，当自己的财富在较短时间内像空气一样蒸发时，金融就仿佛和撒旦紧密结合在一起了。直到今天人们还在议论着密西西比事件、郁金香事件、南海泡沫等，20世纪30年代的大危机更是很多人心头挥之不去的阴影。

如果在这样一个世界里，各种金融产品的收益可以通过概率估计出来，同时，通过历史数据的收集和处理，可以推断一种金融产品的收益方差和标准差，那么投资者就可以通过精确的数学工具来计算满足自己要求的投资组合，实现同等风险下的收益最大化或同等收益下的风险最小化。20世纪50年代初，哈里·马克威茨（Harry Markowitz）就是这样思考的，尽管一些人早就认识到这一问题，但却是他第一次系统地用数理统计的语言描述了金融市场上投资者的可能行为。在此基础上，夏普（Sharpe）等人发展出了众所周知的资产定价模型，后来默顿（Merton）、布莱克（Black）和斯科尔斯（Scholes）等人又开发出了期权定价模型。这些金融领域中最活跃的聪明绝顶的大师们先后获得了诺贝尔经济学奖。

自从马克威茨的论文发表以后，经过众多杰出人士的努力，人们似乎已经得到了预期中的世界。资产定价在金融学中的地位，就如同一般均衡理论在经济学中的地位一样，它像一顶皇冠吸引着无数的追求者。所谓现代金融理论其实就是用标准的主流经济学的原理和方法精确刻画金融活动的产物。在马克威茨之前，金融学仅仅关心货币对一国经济发展的作用，众多所谓的金融学家根本无视投资者的行为和金融产品的复杂性，金融危机的爆发仅仅被归结为政府的财政政策和

货币政策的失灵，金融市场本身的一些关键特性被完全忽略了。金融学成了货币经济学的代名词。经过马克威茨和夏普等人的努力，投资者行为逐渐成为金融学研究的核心，也正是到了此时，金融学才真正成为经济学中独立的一员，资产定价理论也逐步成为大学金融学的主干课程。到了20世纪70年代，信息经济学和博弈论的发展给现代金融理论带来了更大的机遇，戴蒙德（Diamond）、斯蒂格利茨（Stiglitz）、曼昆（Mankiw）、格罗斯曼（Grossman）等一大批一流的年轻经济学家开始运用新的分析工具阐释金融领域中的各类现象，这些研究成果不仅对经济学本身产生了重要影响，更重要的是，金融理论开始走出资产定价技术这一狭窄范畴。金融领域的研究者发现，金融危机、金融机构行为、金融市场结构等都需要重新在理论上加以解释。研究前景是如此广阔，新的专业刊物层出不穷，新的科研成果令人目不暇接。到了20世纪90年代，研究者已经不满足于纯粹的新古典理性选择模型，开始有意识地探索投资者行为的社会政治基础，政治法律制度、社会和个人心理、金融系统的生态面等因素被广泛考虑，有一些学者甚至想对现有的资产定价模型提出挑战。

当现代金融理论日新月异的时候，国内的金融学研究尚处于启蒙阶段，几个明显的特征可以支持这一判断：首先，从教学上看，货币银行学仍是金融专业最核心的课程，而且还是经济类专业的基础课程，如果按照课程体系的逻辑去理解，这有点本末倒置、不伦不类。从国际化角度看，金融工程学开始试点，但很多人仅仅把金融工程学理解为纯技术的科学，忽视了它背后的经济学理论，这种把金融学等同于数学的看法实际上是对现代金融理论新发展的片面理解。其次，从研究层次看，对国外研究成果模仿者居多，对现存问题描述性讨论较多，缺乏自身对现象背后的内在逻辑的理解。实际上，金融问题和任何经济问题一样，都有其社会制度背景，如果忽略这种背景知识，盲目地和国际接轨，只能给人以隔靴搔痒的感觉。特别是理论模型如果没有对现实的深刻理解作支撑，输入的是垃圾，输出的一定也是垃圾。最后，从出版物看，金融出版物可能是经济类出版物最繁荣的一块，但这些出版物中，国内著作有一部分仅仅是在讲述一些不太准确的金融故事；另一部分则对中国特定的金融活动有较深的理解，但缺乏有效的分析方法，使得这种理解在理论层次上仍有待升华。国内著作的现状与国外译著引进的落后局面有关。迄今为止，很多出版社相继推出了各种金融学名著译丛，但所选名著也大多代表过去的已经形成教科书的著作，并且即使是这些名著也大多是针对本科生的，而探索性的著作则很少见。

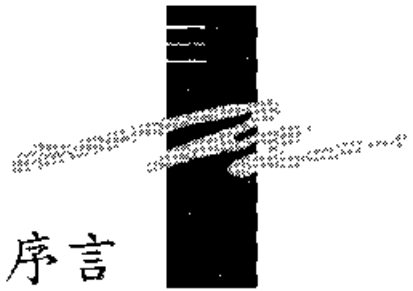
金融活动没有国界，但对金融活动的理解一定是有文化和制度内涵的。如果

中国的金融市场要得以繁荣，仅仅依靠一些缺乏理论和经验证据的政策辩论是毫无意义的，并且还可能误导决策者和普通投资者。如果要形成正确的金融活动决策，就需要掌握科学的研究方法，这就要求中国的学者必须对国外研究成果有较全面的掌握，而不能各取所需，一叶障目。也只有全面了解现代金融理论前沿的进展情况，才能真正实现学者之教书育人和传播知识的功能。正是对中国金融研究现状的担忧，使得我们下决心把国外一些最新的研究成果介绍进来，一方面能够使国内的研究者、特别是青年研究者较全面地了解现代金融学的进展；另一方面，也可借此机会和众多同仁切磋心得，共同提高国内的金融研究水平。基于以上的想法，我们组织翻译了这套“金融学前沿译丛”。

这套译丛不仅包括《不确定下的投资》这类纯技术著作，也包括比较制度分析在金融领域中的运用，如《比较金融系统》；还包括最新的行为金融著作《并非有效的市场：行为金融导论》。同时，我们也关注到金融中的传统课题——货币，不过新的研究更加重视政治对货币政策和经济周期的影响，所以我们选译了《货币制度理论》。这些译著中，有些未必是经典著作，但它们至少能够从研究层次上拓宽我们的视野，比如《金融创新》一书，该书运用熊彼特（Schumpeter）的理论系统研究了金融创新活动，这也是迄今理论界对金融创新活动的一个较好的理论解释。当然，我们将继续从国外现有的研究成果中遴选出比较独到的作品呈献给读者，也希望得到同仁们更多的批评指正。

北京奥尔多投资研究中心全体同仁 + 马学亮

2002年5月11日



中译本序言

对作者来讲，看到自己的著作受到高度评价并被广泛阅读当然是一件非常高兴的事。我们的作品被译成中文出版，它将有上百万的读者群，这个事实当然是赞赏我们作品的一种明证。我们感到非常荣幸。感谢朱勇博士对本书的翻译。

我们集中研究实物期权方法在不确定条件下的投资问题中的应用。这些工作与其他作者的工作一起，对投资理论和投资实践产生了深远的影响。这同样也是一件令人高兴的事。中国的经济已经经历了一个持续快速增长的阶段，考虑到中国经济中潜在的巨大风险，对许多部门来讲，更加谨慎地作出投资项目的选择是非常重要的。我们希望本书中文版的问世对此有所帮助。这种希望不仅仅是对研究投资和增长问题的经济学家

的，而且也包括参与或大或小的资本预算决策的政策制定者和商业从业人员。

毫无疑问，本领域研究和应用的快速进展意味着任何快速的写作都会落后于时代的步伐。我们认为，本书中所介绍的基本方法和技术经得起时间的检验，因此，本书仍然是学习本领域的基础理论的一份好材料。然而，我们也希望本书读者能了解更新的发展。幸运的是，有两个网站提供了这方面的大量资料。其中一个非常优秀的网站列出了本领域的文章、著作、软件及其他产品，它是由巴西的马克·A·G·戴斯（Marco A. G. Dias）博士所维护的，其网址为：<http://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html>。还有一个学术性的咨询组织，称为实物期权小组。它们的网站列出了最近的项目和即将召开的会议及有关联系人。该网站的网址为：<http://www.rogroup.com>。

我们希望有兴趣的读者立即阅读本书及其他相关材料，学习不确定条件下投资的政策设计这一令人激动而且富有成果的方法。

·阿维纳什·迪克西特
·罗伯特·平迪克

前 言

xi

本书提供了关于企业资本投资决策的一种新理论方法的系统性处理，强调了大多数投资决策中的不可逆性以及作出这些决策时经济环境中不断发生的不确定性。这种新方法认识到了等待更好（但永远不完全）信息的期权价值。它利用了金融市场期权理论的一种类推，使其比传统投资理论有丰富得多的动态框架。

将投资机会看做期权的新观点是许多经济学家十多年来研究的成果，而且仍然是各类期刊文章中的一个活跃的主题。这种新观点引起了对传统理论的一些明星的修正。它证明讲授给每位商学院学生和经济学院学生的传统“净现值”（NPV）规则可能会给出非常错误的答案，因为净现值规则忽略了投资中的不可逆性及延误的选

择。基于同样的原因，新理论还同传统教科书来自于马歇尔的生产与供给观点相矛盾。依照传统观点，当价格超过长期平均成本时企业会进入或扩张。当价格下降至低于平均可变成本时，企业将退出或收缩。基于传统理论的政策规定，如利用利率缺口来激励投资及基于价格—边际成本的反托拉斯政策等，也会产生问题。

xii 在本书中，我们尽量以一种清晰、系统的方式来介绍这种新理论，而且对它加以统一、综合，甚至在一些地方扩展了这一正在成长的研究领域的各种研究方向。尽管有大量的而且不断增长的期刊文献，包括我们各自的一篇综述，但是著作形式具有明显的优势。它给我们提供了充足的空间，使我们以更好的次序更详细地阐述不同的主题，而且将它们与其他一些主题联系起来。它还给我们提供了介绍和解释新技巧的机会，这些技巧隐含于本书大部分章节中，但对经济学家来讲往往还不是非常熟悉。我们希望该理论在教学法上得到较好的处理，对学生、研究人员、实践人员等有所帮助。然而，比教学法本身更重要的可能是以著作形式提供了有关这一主题及动态不确定经济世界的运行机制的一种宽泛的视角。

本书的主要目的是阐明并解释这一理论，但是我们认为将理论运用到现实世界通常是最好的做法。因此，我们经常利用属于某些具体产业或产品的数据来得到理论的数值解。我们认为，这些计算的累加权重构成了投资新理论的有效性和数量意义方面的强有力的初步证据。然而，更严格的计量经济学检验，以及为管理者设计出改良后的决策工具所必须的更细致的工作等都需要更深入的研究。我们相信这是一个令人激动和非常重要的主题，而且希望本书能够推动这一领域的研究，并对此类研究有所裨益。

本书针对三大类读者。第一类读者是对投资理论及其政策含义感兴趣的经济学家。其中包括从事微观经济理论、宏观经济理论和产业组织理论研究的研究人员，以及对投资问题有兴趣的大学或其他机构的研究人员。第二类读者是金融经济学领域的学生和研究人员，他们一般对公司理财感兴趣，特别是资本预算，其中包括研究资本预算问题（即企业应当如何评价项目并作出资本投资决策）的研究人员，以及任何对投资决策和投资行为感兴趣的金融研究人员。第三类读者是金融从业人员，其中包括在金融机构工作并关心公司及其资产评价的人员，及必须评价并决定是否为企业进行大规模投资的企业经理。

xiii 本书的一些部分有相当的技巧，但它们不会妨碍有兴趣的读者。前两章

提供了关于不确定条件下不可逆投资理论的一种相当简洁且相对独立的介绍。这两章包括了许多基本理念，但是回避了所有技术细节和数学形式。我们可以保证，阅读这两章是一种低风险、高回报的投资，即使是那些对经济学知识和金融教科书非常生疏的从业人员也有能力在无须太多努力和不太困难的条件下读懂这两章。

我们预料到许多读者想更详细地探究这种理论并试图了解一些技术问题，但是他们缺乏必要的数学工具。考虑到这些读者的需要，我们利用两章的篇幅（第3章和第4章）对构成本书基础的数学概念和数学工具提供了一个相对独立的介绍。（这些工具的适用性已经远远超出了不确定条件下的投资理论，因此，我们预期一些读者将发现这两章是有用的，即使他们的应用兴趣在其他领域，如宏观经济、国际贸易或劳动经济学。）

然而，我们认为，使用技巧是学习技巧的最好方法。因此，我们并不准备像数学那样非常严格和统一。我们尽可能地依靠直觉，在附录中概括了一些简单的正式证明，并为想了解更严格或更深奥的数学知识的读者推荐了一些更高深的论述。对大多数读者而言，我们建议先读一遍第3章和第4章，然后进入后面使用这些知识的章节。我们认为，与试图首先以抽象形式掌握这些知识相比，这样做，这些知识将以更容易理解的数学形式出现。

最后，我们希望许多读者愿意弄明白与例子和应用一起详细阐述的投资新观点，包括其可能的分支。第5章~第12章正好提供了这些内容，从第5章不可逆投资的相对简单的基本模型入手，我们逐步建立起第6章和第7章说明企业开始或终止生产决策的更完整的模型，再到第8章和第9章解释产业内部企业之间相互作用的模型，最后是第10章、第11章和第12章有关这种理论及其应用的更进一步的推广。

本书是我们两人过去多年在投资理论研究上的副产品。这项研究（以及这本书）从我们所在机构及其他部门的同事和朋友间的相互交流中受益颇多。试图列出我们曾经获得见识、观点以及鼓励的人将大大增加本书的篇幅。然而，一些人在阅读过我们的研究报告和本书部分章节的草稿后，曾经以评论、批评或建议的形式，对我们帮助很大，他们值得特别指出：朱瑟皮·伯特拉（Giuseppe Bertola），奥利弗·布兰查德（Olivier Blanchard），阿兰·布林德（Alan Blinder），里卡多·卡巴利罗（Ricardo Caballero），安德鲁·卡普林（Andrew Caplin），约翰·考克斯（John Cox），伯纳德·杜马斯（Bernard Dumas），基因·格罗斯曼（Gene Grossman），珊迪·格罗斯曼（Sandy

Grossman), 约翰·利希(John Leahy), 吉尔伯特·麦特考夫(Gilbert Metcalf), 马修斯·米勒(Marcus Miller), 朱利奥·鲁特伯格(Julio Rotemberg) 和王江(Jiang Wang)。另外, 我们想感谢利德·韦(Lead Wey) 在本书形成中突出的研究助理工作。我们也要感谢林·斯蒂勒(Lynn Stealc) 在准备本书手稿的最后一稿时在编辑方面的帮助。

本书的第二次印刷给我们提供了修正一些错误的机会。我们感谢所有指出错误并引起我们注意的读者, 特别是太平洋联合大学(PUC) 的马可·迪亚斯(Marco Dias)、佐治亚州立大学(Georgia State University) 的里奥·德·詹尼罗(Rio de Janeiro) 和戴维·纳克曼(David Nachman)。我们确信仍然存在许多错误, 但是我们在实践着资本理论中的原理: 原稿不可能被改进到完美, 而只能达到使其进一步的改进率等于利率的地步。

最后, 我们要感谢彼得·多格黑蒂(Peter Dougherty), 我们在普林斯顿大学出版社的编辑, 感谢他在我们准备本书过程中的鼓励和建议, 感谢他在本书制作中的指导。

最后, 我们两人对所获得的金融支持表示感谢。阿维纳什·迪克西特感谢美国国家科学基金和 Guggenheim 基金的支持。罗伯特·平迪克感谢美国国家科学基金和 MIT 能源与环境政策研究中心的支持。

阿维纳什·迪克西特

罗伯特·平迪克

金融学前沿译丛编委会

- 李 扬 中国社会科学院金融研究中心研究员/博士生导师
- 谢 平 中国人民银行研究局研究员/博士生导师
- 唐寿宁 北京奥尔多投资研究中心主任
中国社会科学院经济研究所《经济研究》副编审
- 朱武翔 清华大学经济管理学院金融系副主任/博士
- 吴联生 北京大学光华管理学院会计系副教授/博士
- 王晋斌 中国人民大学农业经济系副教授/博士
- 周业安 中国人民大学经济学院副教授/博士
- 何 帆 中国社会科学院国际金融研究中心副主任研究员/博士
- 樊小云 南开大学经济学院副教授/博士
- 张晓晶 中国社会科学院经济所副研究员/博士
- 马学亮 中国人民大学出版社副编审

Investment Under Uncertainty
Copyright © 1994 Princeton University Press
Chinese(Simplified Characters only) Trade Paperback copyright © 2002
by China People's University Press
Published by arrangement with Princeton University Press
In associaton with Arts & Licensing International, Inc.
ALL RIGHTS RESERVED

本书由美国普林斯顿大学出版社提供独家中文版权。

目 录

XI

第 I 篇 导 论

第 1 章	投资新观点	3
1.1	传统理论	4
1.2	期权方法	5
1.3	不可逆性及等待的能力	7
1.4	全书概览	9
1.5	非经济中的应用	21
第 2 章	通过简单例子阐释概念	24
2.1	两阶段下的价格不确定性	25
2.2	将模型扩展到三阶段	37
2.3	成本的不确定性	41
2.4	利率的不确定性	43
2.5	规模经济与灵活性	45

	2.6 文献导引	49
第 II 篇	数学基础	
xiii	第 3 章 随机过程和伊藤引理	55
	3.1 随机过程	56
	3.2 维纳过程	59
	3.3 广义布朗运动——伊藤过程	66
	3.4 伊藤引理	73
	3.5 反射壁和长期分布	77
	3.6 跳跃过程	78
	3.7 文献导引	81
	附录 柯尔莫哥洛夫方程	82
	第 4 章 不确定条件下的动态最优化	88
	4.1 动态规划	90
	4.2 或有债权分析	107
	4.3 两种方法之间的联系	113
	4.4 文献导引	117
	附录 1. 递归动态规划	118
	2. 最优停止区域	119
	3. 平滑粘贴	121
第 III 篇	企业决策	
	第 5 章 投资机会与投资时机	127
	5.1 基本模型	128
	5.2 利用动态规划求解	131
	5.3 或有债权分析的解	138
	5.4 最优投资规则的特征	142
	5.5 其他的随机过程	149
	5.6 文献导引	160
	第 6 章 项目价值与投资决策	164
	6.1 最简单的情形：没有经营成本	166

	6.2 经营成本与临时推迟·····	173
	6.3 可变产出的项目·····	182
	6.4 折旧·····	185
	6.5 价格与成本不确定·····	192
	6.6 文献导引·····	196
	第 7 章 进入、退出、储存与废弃 ·····	199
	7.1 进入与退出的混合战略·····	201
	7.2 储存、重新启动与废弃·····	213
	7.3 文献导引·····	225
ix 第 IV 篇	产业均衡	
	第 8 章 竞争性产业的动态均衡 ·····	231
	8.1 基本直觉·····	233
	8.2 加总的不确定性·····	236
	8.3 退出条件下的产业均衡·····	244
	8.4 特定企业的不确定性·····	249
	8.5 一个一般模型·····	259
	8.6 文献导引·····	262
	第 9 章 政策干预与不完全竞争 ·····	264
	9.1 社会最优·····	266
	9.2 一些常用政策的分析·····	276
	9.3 垄断性产业的例子·····	289
	9.4 文献导引·····	293
	附录 一些预期现值·····	294
第 V 篇	推广与应用	
	第 10 章 序列投资 ·····	299
	10.1 开始和完成多阶段项目的决策·····	301
	10.2 连续投资与建造时机·····	308
	10.3 学习曲线与最优生产决策·····	317
	10.4 成本不确定性与学习·····	323

	10.5 文献导引	328
	附录 偏微分方程的数值解	329
第 11 章	累积投资与生产能力选择	335
	11.1 报酬递减条件下生产能力的逐步扩张	337
	11.2 报酬递增与生产能力的集中增加	353
	11.3 调整成本	357
	11.4 文献导引	366
第 12 章	应用及实证研究	370
	12.1 近海石油储备的投资	372
	12.2 电厂对《空气清洁法》的遵守	379
	12.3 环境政策的时间选择	386
	12.4 解释总投资行为	391
	12.5 文献导引	397
	参考文献	401
	符号表	421
	作者索引	424
	主题索引	434
	译后记	462

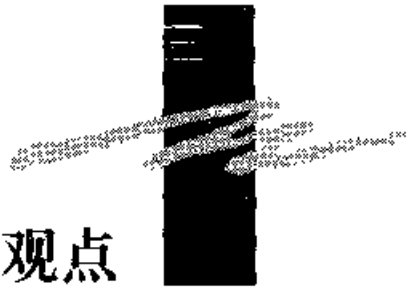
x

金融学前沿译丛

不确定条件下的投资

第 I 篇

导 论



第7章 投资新观点

3

经济学将投资定义为对未来回报的预期而承受瞬时成本的行为。从这个意义上讲，建造厂房、安装设备的企业，储存商品用以销售的商人，在职业培训上花费时间的个人等都是投资者。稍稍不太明显的是，一家企业关闭一家产生损失的工厂也是一种“投资”：初始支出是企业为把自己从合同条款中解脱出来所必须作出的支付，包括工人的解雇费；而预期回报则是未来损失的减少。

从这种观点来看，投资决策无处不在。你购买本书就是一种投资。至于其回报，如果你是一位经济学家，我们的期望是你对投资决策的一种改进的理解；如果你是一位商学院学生，我们希望能提高你在未来的职业生涯中作出此类决策的

能力。

大多数投资决策在不同程度上具有三个基本特征：(1) 投资是部分或完全不可逆的。换句话说，投资的初始成本至少部分是沉没的；当你改变主意时你不能完全收回投资的初始成本。(2) 来自投资的未来回报是不确定的，你能做到的只是评估代表你的投资中较高或较低收益（损失）的不同结果的概率。(3) 你在投资时机上有一定的回旋余地。你可以推迟行动以获得有关未来的更多信息（当然，永远不可能是完全确定的）。

4 这三个特征之间的相互作用决定了投资者的最优决策。这种相互作用正是本书的核心。我们将详细阐述不确定条件下不可逆投资的理论，并用一些实际应用的例子加以说明。^[1]

投资的传统理论没有认识到不可逆性、不确定性及时机选择两两之间的相互作用在数量和质量上的重要意义。我们将指出，这种忽视解释了传统理论的一些错误。例如，与大多数早期模型的预测相比，现实世界的投资似乎对利率变化及税收政策的改变不太敏感，而对经济环境中的波动性及不确定性要敏感得多。我们还将说明这种新观点如何解决这些异常现象，并在此过程中提供了制定有关投资的更有效的公共政策方面的建议。

一些似乎是非经济类的个人决策也具有投资的特征。这里只给出一个例子。婚姻包含着求爱期不断增加的成本，以及未来幸福或痛苦的不确定性。婚姻可以通过离婚来取消，但只能以高昂的成本为代价。许多公共政策的决策也有类似的特征。例如，关于刑事被告的民事权利与社会秩序之间相对重要性的公共理念随时间推移而变化，但制定或改变包括这两者之间特定的相对权重的法律的代价是高昂的。当然，这些非经济决策的成本和收益的量化是非常困难的，甚至根本不可能量化，但我们的一般理论也可以提供一些关于它们的定量化考察。

1.1 传统理论

当一家企业面临未来市场条件的不确定性时，它应当如何作出是否投资于新工厂的决策？大多数经济学院和商学院的学生仍然被传授着应用于此类问题的简单规则。首先，算出新工厂将产生的预期利润流的现值；其次，算出建造工厂所需的支出流的现值；最后，算出两者之间的差（投资的净现

值, NPV) 是否大于零。若大于零, 则进行投资。

但是, 在计算这一 NPV 时产生了一些问题。例如, 如何估计新工厂产生的预期利润流? 如何处理通货膨胀? 在计算现值时应当采用什么样的贴现率(或利率)? 解决此类问题是公司理财课程中的重要主题, 特别是资本预算, 但其基本原理却非常简单, 即算出投资项目的 NPV 并检验它是否为正。

NPV 规则也是讲授给经济学本科生和研究生的新古典投资理论的基础。这里我们发现了利用标准增量或经济学家的边际方法所表达的规则: 投资直到增加的单位资本的价值正好等于其成本。这样, 在决定增加的单位资本的价值及其成本中再次产生了问题。例如, 应当假定什么样的产出结构? 税收和折旧应当如何处理?

许多投资经济学的理论和实证文献处理了此类问题。我们发现了两种本质上相同的方法。其一, 沿袭乔根森(Jorgenson, 1963)的理论, 将增加的单位资本的每期价值(即边际产出)与从购买价格、利率与折旧率及适用的税率中算出的一个“等价的每期租赁成本”或“使用成本”进行比较。通过令资产的边际产出等于其使用成本, 可以发现企业必需的资本存量。假定实际的资本存量调整到理想状态, 或者是特定的时滞过程, 是对确切的调整成本的最优反应。尼克尔(Nickell, 1978)的著作提供了该方法发展历程的一种非常好的说明。

其二, 源于托宾(Tobin, 1969)的理论, 是比较边际投资的市场价值(capitalized value)与其购买成本。如果投资的所有权可以在二级市场中交易, 则可以直接观察到这个值; 否则, 它是作为投资可能产生的利润流的预期现值, 从而被计算出来的一个推导值。该数值与单位购买价格(重置成本)的比率, 称为托宾 q 值, 支配了投资决策。如果 $q > 1$, 投资应当进行或扩张; 如果 $q < 1$, 投资不应当进行, 而且现有资本也应当削减。令调整的边际成本等于其收益可以找到投资扩张或收缩的最优比率, 它取决于 q 与 1 之间的差别。税收规则可在一定程度上改变这一点, 但基本原则是类似的。艾贝尔(Abel, 1990)的著作提供了这种投资的 q 理论的一个极好的综述。所有这些理论背后的原则都是基本的 NPV 规则。

1.2 期权方法

然而, NPV 规则建立的隐含假定往往被忽略了。更重要的是, 它要么

假定投资是可逆的，即无论何种原因，如果市场结果比预期条件差，就可撤销投资且收回支出；要么假定投资是不可逆的，它是一种勿失良机的建议，即如果企业现在不进行投资，将来也不可能投资。

尽管一些投资符合这些条件，但大多数投资并不符合。不可逆性和延期的可能性是现实中大多数投资的非常重要的特征。正如迅速增加的文献所表明的，拖延不可逆投资支出的能力可以严重影响投资决策。它同时也削弱了简单的 NPV 规则，从而也削弱了标准的新古典投资模型的理论基础。原因在于拥有投资机会的企业持有一种类似于金融看涨期权的“选择权”（企业拥有在它所选定的某一未来时刻购买某种资产的权利但不是义务）。当一家企业作出不可逆投资支出时，它就执行或者“消灭”了投资的期权，放弃了等待以获得可能会影响到支出意愿或时机的新信息的可能。一旦市场条件逆转，它不能停止投资。失去的期权价值是一种机会成本，它必须包括在投资成本中。因此，“当单位资本的价格至少与其购买和安装成本一样大时才投资”的 NPV 规则必须修正。该单位资本的价格必须超过购买和安装成本，差额等于保持投资期权存在的价值。

最近的研究已经证明，投资的这一机会成本可能很大，而忽视它的投资规则可能会酿成大错。而且，这一机会成本对项目未来值的不确定性高度敏感，因此影响未来现金流的可察觉风险的经济条件的变化对投资支出有非常大的影响，可以说大于利率变化对投资支出的影响。这可能有助于解释为什么新古典投资理论迄今为止在提供投资行为的一种好的实验模型方面如此失败，以及导致对利率政策和税收政策在刺激投资中的有效性方面过度乐观。

7 期权的观点还有助于解释为什么企业投资的实际行为不同于在商学院里讲授的公认的知识。企业投资于这样的项目，即预期产生的回报率超过必要的或“最低”预期资本回收率。商业活动的观察家发现，通常这种最低预期资本回收率是资本成本的 3 倍~4 倍。^[2]换句话说，直到资本价格上涨到远远超过其长期平均成本，企业才会投资。在价格下降时，通过承受经营损失，企业将长期呆在该产业，而价格可以在不引起投资减少或退出的条件下大幅下降到低于平均可变成本。这似乎也与标准的理论相矛盾，但是，正如我们将要看到的，一旦考虑到不可逆性和期权价值，它就能得到解释。

当然，通常人们可以通过从 NPV 的传统计算中减去执行投资期权的机会成本来重新定义 NPV，并认为，一旦作出这种修正，“如果 NPV 为正就投资”的规则仍然成立。然而，这样做就是接受我们的批评。为强调期权价

值的重要性，在本书中我们选择将它们与传统 NPV 隔开。若其他人选择继续使用“NPV 为正”的术语，只要他们在其 NPV 定义中慎重地包括了所有相关的期权价值，这一术语就是正确的。选择上述用法的读者可以轻易地把我们的陈述转换为上述语言。

在本书中，我们详细论述了不确定条件下不可逆投资的基本理论，强调了投资机会中类似于期权的特征。我们指出，如何能从金融市场中发展出来的期权定价方法中获得最优投资规则。我们还说明了以不确定条件下最优序列决策的数学理论(动态规划)为基础的等价方法。我们举例说明了不同情形下企业的最优投资决策——进入，企业初始规模的确定以及未来代价高昂的规模改变，在提供满足未来条件的灵活性程度不同的投资类型间的选择，一个复杂的多阶段项目的连续阶段的完成，临时停工与重新动工、永久退出等。我们还分析了如何汇总这种企业的行动以决定一个产业的动态均衡。

为强调与金融资产的相似之处，获得实际资产的机会经常被称做“实物期权”。因此，本书可以命名为“投资中的实物期权方法”。

1.3 不可逆性及等待的能力

8

在继续进行分析之前，阐明不可逆性、延迟投资的能力及投资期权等概念非常重要。其中最重要的是，什么使投资支出成为沉没成本并因而不可逆？

当投资是特定企业或特定产业时，投资开支是沉没成本。例如，特定企业在营销和广告上的大多数投资是不能收回的，因此，很明显它们是沉没成本。另外，一家钢铁厂属于一种特定产业，它只能生产钢铁。有人可能会认为，由于在原则上钢铁厂可以出售给另一家钢铁公司，因而投资支出是可以收回的且不是沉没成本。这是不正确的。如果该产业是适度竞争的，该工厂的价值对该产业的所有企业来讲都是相同的，那么出售该厂不能获得任何收益。例如，对该企业来讲，如果钢铁的价格下降，企业依据对过去经济发展形势的分析而建设的工厂被证明是一项“坏的”投资，这家工厂同样也会被另一家钢铁公司看做是一项“坏的”投资，那么出售该厂的生产能力不会有多少收益。因此，对钢铁厂（或其他特定产业资本）的投资的大部分应当看做沉没成本。

即使投资不是特定企业或特定产业，它们往往也是部分不可逆的。因为旧机器市场中没有能力评价某一项目质量的购买者只支付对应于该市场中平均质量的项目的价格，了解所售项目质量的销售者将不愿意销售高于平均质量的项目，这将降低市场中项目的平均质量及其市场价格。这种“柠檬”问题（Akerlof, 1970）困扰着许多此类市场。例如，办公设备、轿车、卡车及计算机并不是特定产业，尽管它们可以销售给其他产业的企业，但其转售价格将会远远低于其购买成本，即使它们几乎还是新的。

不可逆性也可能产生于政府管制或制度安排。例如，资本控制可能会使外国（或国内）投资者出售其资产并重新配置其资金变为不可能；另外，由于雇用、培训及解雇的高昂成本，对新职工的投资可能也是部分不可逆的。因此，大多数大型资本投资的大部分是不可逆的。

下面让我们讨论延迟投资的可能性。当然，企业并不总是有机会延迟其投资。例如，可能存在这样的情形，出于战略考虑，企业必须迅速投资，从而比现有的或潜在的竞争者优先投资。^[3]然而，在大多数情形下，延迟至少是可行的。可能会存在延迟成本（其他企业进入的风险，或仅仅是以前的现金流），但是这一成本必须与等待新信息的收益进行比较。那些收益往往是巨大的。

正如前述，一个不可逆的投资机会非常类似于金融看涨期权。看涨期权赋予其持有者这样的权利：在特定的时间范围内，支付执行价格以获得具有一定价值的资产（如股票）。执行这种期权是不可逆的，尽管这种资产可以出售给其他投资者，但人们也不能收回其期权或执行该期权所支付的货币。拥有类似投资机会的企业持有现在支出货币（执行价格）或未来支出货币以获得具有一定价值的资产（如一个项目）的选择权。此外，该资产可以出售给另一家企业，但这种投资是不可逆的。就像是金融看涨期权的情形，这种投资期权是有价值的，部分是由于通过投资获得的资产的未来价值是不确定的。若该资产价值上涨，来自投资的净回报也上涨。若该资产价值下降，企业不必投资，而仅仅损失它在获得该投资机会时的开支。第2章及以后章节中阐述的不可逆投资模型有助于认清投资机会类似期权的特征。

最后，有人可能会问，企业最初如何获得它们的投资机会，即投资期权。有时候投资机会来自于专利或土地与自然资源的所有权，更一般地，它们来自于企业的管理资源、技术知识、声誉、市场地位及可能的规模。所有这些都可能是随着时间推移而建立起来的，它们使企业有能力极富成效地实

施个人或企业不能实施的投资。最重要的，这些投资期权是有价值的。事实上，对大多数企业而言，与它们早已拥有的适当资本相比，其市场价值的大部分可归功于它们在未来的投资期权和成长期权。^[4]投资的大部分经济理论和金融理论关注企业应当（及确实）如何执行其投资期权。为更好地理解投资行为，建立一个企业如何获得投资机会的较好模型是非常重要的，这一点正是我们在后面的章节中将要讨论的。

1.4 全书概览

10

这一节概述了全书的安排，并揭示了分析中出现的一些重要概念和结论的特点。

1.4.1 一些介绍性例子

前面说明的“实物期权”的一般观点是简单明了的，但是在评价实物期权的数量意义，说明它们对企业、产业和公共政策的意义之前，必须把它们转换为更精确的模型。第2章以一种简单且温和的方式展开这一计划。我们考察了拥有可以在两阶段决策的“窗口”中贯彻实施的单一离散投资机会的企业。在这两个阶段之间，产出的价格经历了持续的上下波动。假定在平均价格水平上投资是盈利的，因此以较高价格而不是较低价格盈利更是不容置疑的。通过将其决策推迟到第二阶段，企业可以发现实际的价格波动。如果价格升高，企业就进行投资；如果价格下跌，企业则不投资。这样，企业就避免了在第一阶段投资后发现价格下跌所造成的损失。等待的价值必须与第一阶段利润流的损失相权衡。结果（投资或等待决策）取决于特定模型的参数，其中最重要的是不确定性的程度（决定了由等待所规避的价格下降风险）及贴现率（测量了未来与现在的相对重要性）。

为举例说明这些影响并建立对实物期权的直观认识，我们运用了一些数值计算。我们还更严格地考察了它与金融期权的相似之处。我们引入了允许个人转移价格上下浮动风险的市场，即在两种可能性下有不同回报的或有债权。然后我们构建了这些或有债权的一个投资组合，这一组合可以用来确切地复制企业投资的实物期权的风险与回报特征。实物期权的估算价值必须等于复制出的投资组合的价值，否则就会存在套利机会，即投资者可以通过买

人两个相同资产中较便宜的资产并售出较昂贵的资产而获得纯利润。

我们还考察了基本例子的一些其他形式。首先，我们将投资机会窗口扩展到第三阶段，这样，价格在阶段 2 与阶段 3 之间可以像它在阶段 1 与阶段 2 之间那样上下浮动。我们说明了这种变化如何改变期权的价值。其次，我们考察了项目成本及用于贴现未来利润流的利率的不确定性。最后，我们考虑在不同规模的项目之间的选择，其中大规模的项目拥有较高的固定成本但有较低的营运成本。

即使有了这些扩展和变化，分析仍然停留在举例说明和非常简单的例子水平上，而不是理论所要求的一般性。在后面的章节中，我们开始详细论述一种更宽泛的理论框架。但是这些例子确实产生了一些支持一般化的有价值的见解，在这里我们总结如下。

第一，这些例子表明，投资期权的机会成本是企业投资决策中的一个重要因素。期权价值随投资的沉没成本及未来价格不确定性程度的上升而上升，其中风险下降是最重要的方面。这些结论在第 5 章~第 7 章中以更一般化的模型得到确认。

第二，我们将看到，如果企业能够通过远期及期货市场上的交易对风险进行套利，期权价值不受影响。在有效市场中，这种风险是公平定价的，因此风险的任何下降都会被回报的下降抵消。远期交易是一种金融业务，它对企业的实际决策没有影响。（这是莫迪利安尼-米勒（Modigliani-Miller）定理起作用的另一个例子。）

第三，当未来成本不确定时，它们对投资决策的影响取决于不确定性的特殊形式。如果不确定性与企业必须支付的投入品价格有关，它对投资决策的影响就像它对产出品价格风险的影响一样。如果投入品价格已经升高，不进行投资的自由是有价值的，那么不太容易作出立即投资的决策。然而，如果假定项目包括多个步骤，不确定性与投资总成本有关，只有当项目的前几步实施后，关于不确定性的信息才能显示出来。因此，除了对传统 NPV 的计算有贡献外，这些步骤还具有信息价值。这样，即使传统的 NPV 在一定程度上为负时开始项目也会是合意的。我们将在第 10 章回到这一问题，并在一种更一般的理论框架中为它建模。

第四，我们将说明，通过提高未来的灵活性，较小规模的投资可能有助于在一定程度上抵消较大规模投资因其规模经济而享有的优势。

1.4.2 一些数学工具

在现实中，投资项目可以有不同的机会窗口，并且有关未来的各种观点不同程度地存在着不确定性。因此，在模型可以应用前，第2章中简单的两阶段例子必须进一步推广。第3章和第4章详细说明了这种推广所需的数学工具。

第3章发展了不确定性的更一般模型。我们首先解释随机过程的特征和性质，这些过程包括把动态变化与不确定性联系起来。在没有不确定性的动态模型中，系统的当前状态就决定了其未来状态。当加入不确定性时，当前状态仅决定了未来状态的可能分布，而不是其实际值。第2章中说明的仅仅是最简单的例子，其中当前价值可在已知概率条件下以固定比例上下浮动。我们描述了在投资理论中特别有用的另外两个过程——布朗运动和泊松过程，并考察了它们的一些特征。

第4章考虑不确定条件下的最优序列决策。对这一优化问题，我们首先从动态规划的一般数学技巧中的一些基本概念出发。通过重述第2章中的两阶段例子，我们引入了动态规划，并说明那些基本概念如何推广到更一般的多阶段选择问题，其中不确定性就是第3章中所介绍的各种随机过程。我们建立了动态规划的基本方程式，并指出应用于本书的特定目的时这些方程的求解方法。然后，我们转到市场假定，其中由随机过程产生的风险可以通过连续的或有债权交易而被交易。我们将说明序列决策如何通过构建动态套利策略（即一种投资组合，为重现实际投资的回报与风险特征，该组合的成分随时间推移而改变）而被等价地处理。

早已熟悉这些知识的读者除了快速浏览并习惯我们的记号外，可以跳过这两章。不熟悉这些技巧的读者可以把这些章节当做随机过程及随机动态最优化的一种相对独立的导论，即便他们的兴趣不同于在本书其他部分所讨论的内容中的应用。

1.4.3 企业的投资决策

这些知识在后面的章节中将得以运用。第5章~第7章构成了企业投资决策的核心理论。我们从第5章开始，假定投资是完全不可逆的。那么，适当项目的价值仅仅是它所产生的利润（或损失）流的预期现值。这可以根据潜在不确定性的观点来计算，那么投资决策仅仅是支付沉没成本的决策，其回报是获得价值可以波动的一种资产。这实际上类似于金融理论中的看涨期

权——以预先设定的执行价格购买一种价值波动的资产的权利而不是义务。因此，该问题可利用第4章中说明的知识直接求解。其结论也类似于金融理论中的结论。当资产的价值上升到高于执行价格时，期权可以在盈利条件下执行（期权为“实值”）。然而，当期权刚好为实值时，执行它并非最优，因为通过执行期权，企业放弃了等待并避免价值下降所遭受损失的机会。只有当资产价值充分上升到高于执行价格时（期权是充分高的“实值”），期权的执行才是最优的。

这种观点的另一种模式有助于以托宾的 q 值（即资本资产的价值与其重置成本的比率）的观点来考虑投资的经济学家们的直觉认识。在投资学文献的通常解释中，资本资产的价值由它所产生的利润流的预期现值来测度。那么，对企业来讲，传统标准是当 q 等于或大于 1 时投资。我们的期权价值标准更严格， q 必须充分大于 1。在投资变成最优选择之前，期权价值必须等于或大于临界值 q^* ，其中 q^* 大于 1。

我们采用一些数值模拟来算出期权价值及其最优执行规则，并考察期权价值如何随不确定性、贴现率及其他参数值的变化而变化。我们发现，在这些参数的合理范围内，期权价值的影响在数量上非常重要。即使立即投资的预期回报率大大超过利率或名义资本回报率，等待仍然是最优的。在企业执行期权并做出投资之前，回报乘数必须为名义利率的 2 倍~3 倍。

1.4.4 利率与投资

一旦我们理解了企业在决定是否执行投资期权时为什么要小心及如何谨慎，我们也可以理解为什么利率似乎对投资没有影响。传统理论的计量经济学检验发现，利率仅仅是投资需求的一种脆弱或不显著的决定因素。最近的历史也表明，利率削减对投资只有有限的刺激效应，1991—1992 年的经历是这种情形在最近的证明。期权方法提供了一种简单的解释。利率削减一般使未来相对于现在显得更重要，但这同样提高了投资的价值（利润流的预期现值）和等待的价值（减少或避免未来可能损失的能力）。其净效应非常微弱，有时甚至是不确定的。

实物期权方法也表明，未来利润的各种不确定性渠道（产品价格、投入成本、汇率的波动及税收政策和管制政策的变化等）对投资的影响比利率的整体水平对投资的影响重要得多。利率未来走向的不确定性对投资的影响可能也比利率的一般水平对投资的影响大得多。减少或消除不必要的确定性

可能是刺激投资的公共政策中最好的途径。而在备选方案之间冗长的政策辩论过程所引起的不确定性可能也是投资的严重障碍。在第9章中，我们构建了说明政策不确定性如何能对投资产生重大负面影响的特例。

1.4.5 暂停与废弃

第6章和第7章推广了上面的简单模型。当未来价格和/或成本波动时，适当项目的经营利润可能变为负值。在第5章中，我们假定投资是完全不可逆的，尽管有损失，企业也被迫继续经营该项目。这对某些公共服务项目来讲可能是事实，但是大多数企业有一些现成的退路。第6章和第7章考察了一些这样的退路。在第6章中，我们假定带来损失的项目可暂停，一旦项目重新变为盈利时，项目的经营会在以后恢复。现在一个适当项目就是经营期权的一个序列，利用第4章中的方法评估出所有这些经营期权的价值，然后贴现并加总，才能找到这一经营期权序列的价值。那么，投资机会本身就是得到这种混合资产的一种期权。

在第7章中，我们排除临时性暂停，但允许永久性废弃，这是现实的。如果项目不能维持经营，如矿山洪涝、机器生锈、熟练工人队伍的解散、商标认同的消失等，适当项目的一些有形或无形资本会迅速消失。如果企业决定重新开工，它必须对所有这些资产重新投资。废弃可能有直接成本，例如必须支付工人的解雇费。然而，更重要的是，它往往还有机会成本，即资本品的维护期权的损失，一旦未来环境改善，这些资本品就能够盈利。因此，为保持资本品维护期权继续有效，有适当项目的企业将承受一定的损失，而且只有足够的额外损失才能迫使企业放弃该期权。 15

事实上，我们这里有一对连环期权。当企业执行其投资期权时，它得到一个合适的项目和放弃期权。如果企业执行其放弃期权，它重新获得了投资期权。为决定最优投资和放弃政策，必须同时对这两个期权定价。这种关联有重要意义。例如，较高的放弃成本使企业对正在进行的投资更加小心谨慎，反之亦然。我们用铜业中的典型数据举例说明了这种理论，并发现了铜价在投资临界值与放弃临界值之间非常大的波动范围。

我们还考虑了中间情形，即暂停与废弃两者在不同成本水平上都可能暂停的项目需要一定的额外支出，例如，船进坞修理，但重新启动该项目则是廉价的。放弃修理节约了维修费，也可能带来一定的瞬时废弃成本 (scrap value)，但如果潜在利润恢复，那么企业必须承受全部投资成本。现

在，我们必须在三种方案之间决定最优变换：一家停工的企业、一个正在运营的项目和一个暂停的项目。我们确实是这样做的，并用原油油轮的例子说明了这一点。

1.4.6 临时雇用与永久雇用

尽管在本书中我们主要关注企业的资本投资选择，但类似的考虑也适用于企业的雇用和解雇决策。这些选择中的每一种都有沉没成本，每种决策必须在不确定环境下作出，而且每种决策都考虑了时机选择的一定自由。因此，前面的观点和结论仍然适用。例如，只有当劳动力的边际产出充分高于其工资水平时，新职工才会得到雇用；沉没成本越大或不确定程度越高，所需的高于工资的余额或倍数也越高。

1993年中期的美国劳动力市场提供了这种理论起作用的一个生动的实例。当经济从20世纪90年代早期的萧条中复苏时，企业利用加班或雇用临时工的方法来提高产出，即使对技术要求高的职位也是如此，但全职新职工的长期雇用却增加得非常慢。企业盈利能力的当前水平一定很高，因为企业愿意对工人加班的工作支付相当于其工资水平50%的加班费，并且愿意利用提供临时工并征收工资的25%甚至更高费用的代理机构，但这些企业却16 不愿意签署包括了新固定职工雇用条款的协议。^[5]我们的理论为这些发现提供了一种自然的解释。当时，未来需求和未来成本的高度不确定性仍然占主导地位，经济复苏的稳定性及持久性仍然不明朗。人们担心通货膨胀还会回来，会导致美联储提高利率。未来的税收政策极不确定，雇主必须承担的未来健康保障成本的水平也是如此。因此，我们可以预期，在增加正式的全职工人之前，企业会非常小心谨慎，并等待着高水平盈利能力的持续前景的更多保证。同时，企业宁愿采用不可逆程度较低的（即使成本比较昂贵）生产方式，即加班或雇用临时工来利用当前的盈利机会。这正是我们所看到的。

1.4.7 滞后作用

当我们同时考虑投资与废弃（或进入与退出）时，企业的最优决策由两个临界值来刻画。与超过沉没成本的正常回报率相对应，当前充分高的利润水平表明企业投资或进入是合理的，而充分高的损失水平导致企业废弃或退出。现在假定利润的当前水平位于这两个临界值之间的某一水平上，我们能否发现投资的企业？这取决于利润波动的最近经历。如果利润在当前中间水

平上，这一水平是从引起进入的高水平上刚刚降下来的，则存在一家投资的企业。然而，如果这一中间水平是从引起退出的低水平上刚刚升上来的，则不存在活动的企业。换句话说，潜在的随机变量的当前状态并不足以决定经济的产出，它需要一段较长的时间才能决定。这种经济是路径依赖（path dependence）的。

最近有人考察并举例说明了路径依赖的观点，特别突出的是阿瑟（Arthur, 1986）和戴维（David, 1985, 1988）的论文。他们考虑了更极端的可能性：甚至经济系统的长期特征也会因为初始条件的微小变化而改变。这里我们采用了路径依赖的一种更温和的类型。经济系统可能状态的长期分布是不可改变的，但是其短期和中期演化仍然会受到初始条件的巨大影响。

路径依赖可导致下面的事件序列的发生。当企业第一次到达现场并准备投资时，当前的利润位于两个临界值之间的中间区域，因此企业决定等待；当利润上升到超过临界上限时，企业投资；最后利润下降到它原来的中间水平，这种下降不会把它带到发生废弃的临界下限。这样，背后的动因（当前的盈利能力）已经恢复到其原有水平，但是其影响（投资）不会恢复。

在物理学及其他学科中，类似的效应早已为人熟知。最相似的例子来自电磁学。拿一根铁棒并把绝缘线沿着铁棒绕成圈，通过电线输入电流，铁棒就被磁化了。现在关掉电流，磁力并不会完全消失，剩余效应仍然存在。原因（电流）是暂时的，但它留下了更持久的效应（被磁化的电磁棒）。

这种现象被称为时滞作用（Hysteresis）。通过类比，当潜在的因素完全恢复时投资决策却不能恢复它们自身，可以称之为经济的时滞作用。一个引人注目的例子发生在20世纪80年代。1980—1984年，美元价值相对于其他货币急剧上升。在美国市场中外国企业的成本优势变得非常大，最终导致美国进口的大幅上扬。接着美元价值急剧下跌，到1987年已降到了1980年时的水平。然而，进口渗透并没有完全恢复。事实上，它根本就没有下降。为了得到任何明显的进口缩减，美元必须有更大幅度的下降。

1.4.8 产业均衡

在第8章和第9章，研究中心从企业投资决策转向由许多相同企业所组成的整个产业的均衡。人们的第一反应可能是企业之间的竞争将破坏任何一家企业的等待期权，消除我们在第5章~第7章中所发现的不可逆性和不确定性。竞争确实会破坏每家企业的等待期权，但这并没有修复现值方法和传

统理论的结论。相反，由于某些不同的理由，在作出不可逆决策时小心谨慎仍然是重要的。

18 考虑一家准备进行投资的企业，它知道本产业的未来需求方向及企业自身成本都是不确定的，而且它知道有许多其他企业面临着类似的不确定条件下的类似决策。企业最终关心的是为追求自身利益的决策的结果，但它必须认识到其他企业的类似决策将如何影响这一结果。从这个角度来看，必须区分两种类型的不确定性，因为它们对投资有不同的含义：影响产业内所有企业的总体不确定性，及每一企业所面临的特殊的不确定性。

为说明这一点，首先假定投资是完全不可逆的，并考虑产业范围内需求的增加。若任意一家企业预料到这种情况将导致价格更高，从而将改善其自身的利润前景，这使投资更有吸引力。然而，还应当意识到，其他一些企业也在做类似的计算。它们的供给反应将会减轻需求移动对产业价格的影响。因此，产业自身的潜在利润的向上移动就不会像只有一家企业而且其在投资机会上拥有垄断能力的情形下那么高。然而，由于投资是不可逆的，产业需求的一个向下的移动，在完全竞争的条件下与垄断情形下刚好有相反的效应。尽管其他竞争性企业同样受到严重影响，它们并不能退出以缓解价格下降。这样，对不确定性的竞争性反应具有内在的不对称性：需求向下的移动比其向上的移动显示出更强有力的影响。这种不对称性使每一个企业在作出不可逆投资时都小心翼翼。最终的效应非常类似于企业拥有对投资机会的垄断能力并等待执行的期权价值，而且在一些模型中是相同的。事实上，在给定每家企业的投资期权后，像第5章~第7章中那样评价这些实物期权，加入这一期权应当为零的竞争性均衡条件，可以推导出竞争性产业的投资理论。

如果我们考虑一定的可逆性，其他企业的退出确实缓和了逆向需求对价格的冲击效应。但是在初始的恶劣环境下，每家企业的退出决策都考虑到了这种需求冲击的不对称效应：需求向上的影响要比其向下的影响更强大。这样，当竞争性企业在经营中开始出现损失时，它们不会马上离开，而是等待一会儿，以弄清事情是否会改善或其对手是否会离开。全部的影响就像我们在第7章中所发现的单一垄断企业的放弃决策。事实上，我们在第8章中所分析的总需求冲击下联合进入与退出决策的竞争性均衡模型中引起进入与退出的高价格与低价格，实际上与第7章中相应的垄断模型中引起进入与退出的价格有相同的临界值。

特定企业的不确定性不会导致这种不对称。如果只有一家企业经历了其

需求的有利移动,比如一些特殊的时尚变化,则它知道这种利好消息不会被其他企业系统性地分享,因而它并不担心其他企业的进入会以相同的方式侵蚀其盈利能力。然而,等待的价值将以原先熟悉的形式再现。这家幸运的企业在以其低成本进入方面确实存在垄断能力,因此它还拥有等待的期权价值。如果其低成本被证明是短暂的,它可以避免损失。这样,在产业均衡中特定企业的不确定性也导致类似于第5章~第7章中所发现的独立企业的投资决策。

19

1.4.9 针对投资的政策

一些读者可能把不确定性使企业不太热心于投资的结果解释为需要政府政策干预来激励投资的一种信号。这是一种非常草率的反应。社会计划人员也会通过等待获得信息,因此也会意识到项目中沉没资源的机会成本。只有当企业而不是整个社会作为整体面临等待的不同价值时,换言之,即某些市场失灵与决策过程相联系时,政策干预的情形才会产生。

第9章集中讨论了这些问题,我们的第一个结论是一般均衡的标准理论的证明。如果风险市场是完全的,而且企业作为完全的价格接受者行事(在这种动态随机背景下,这必须理解为表示每家企业接受给定的价格随机过程且对价格有理性预期),那么,产业的均衡演化就是社会有效的。社会计划在作出其投资决策时将显示出相同程度的犹豫不决。

如果风险市场是不完全的,有利的政策干预确实存在,但是正确的政策需要一些细致的计算和实施。经常用于处理不确定性的粗率的工具可能会有反向影响。我们通过考察价格上限与下限的影响举例说明了这一点。例如,价格支持通过减少价格下降的风险推动了投资,然而最终向右移动的产业供给函数表示了为好时段较低的价格。将好时段与坏时段的价格进行平均,我们发现,总体的结论是较低的长期平均价格。换句话说,制定出来用于帮助某集团的政策却刚好对该集团有害。价格下限或上限政策,例如城市租金控制与农业价格支持,经常会受到批评,因为它们降低了整体经济效率。我们的发现也许是在政治上反对这些观点的更强有力的论据:它们的分配效应也是不正常的。

我们还研究了关于未来政策自身不确定性的影响。例如,如果讨论一种投资的税收减免,企业将意识到等待有更高价值,因为存在企业的投资成本下降的可能性。我们发现,这种政策不确定性对立即投资有强大的阻碍效

20

间来讨论这种做法的正确方式。

1.4.10 反托拉斯与贸易政策

第8章和第9章描述了一种与人们熟悉的中级微观经济学教科书中的竞争性均衡差别很大的一种框架。在中级微观经济学中,我们被告知,如果价格上升到等于长期平均成本,企业将进入该产业;如果价格下降到低于平均可变成本,企业将退出该产业。我们的理论表明,在这两个方向上有一个更宽泛的价格变动范围。例如,在面临总体不确定性时,只要求价格上升到长期平均成本水平,企业在此时进入不能形成产业均衡。每家企业都知道,其他类似企业的进入会使过去一直在上升的价格停止上涨,而未来不利方向的变化将推动价格低于这一水平。而且,有时达到长期平均成本甚至低于这一水平的未来价格变化路径可能永远不会为企业的投资提供正常回报。只有当由进入所施加的价格上限大大高于长期平均成本时,才能使超过正常利润及低于正常利润的平均达到正常回报。类似地,当价格充分下降到远远低于平均可变成本时,企业才会退出,企业将承受一定损失。其他企业的退出使价格的下限更低,这一下限的均衡水平由算出的未来损失与收益的平均值为零所决定。

因此我们发现,即使在长期不确定条件下的竞争性均衡也不是稳定状态,而是价格可以大幅度波动的动态过程。超常利润的周期会随着损失周期的改变而改变。将动态均衡看做随机过程的类似观点在宏观经济学中早已非常普遍,但是在微观经济学中却少得令人吃惊,特别是关于其对反托拉斯政策或国际贸易政策的意义。这些政策的概念性框架通常是静态的,但实践中的建议是以特定时刻对一种产业的简单印象(snapshot)的观测为基础的。我们发现,动态观点要求重新深入地思考理论和实践两方面的结论。

例如,在产业组织理论中,超额利润意味着合谋或进入壁垒,这要求反托拉斯行动。在我们的动态观点中,在没有新进入者的条件下超常利润的大量周期也能形成,即使所有企业都是小的价格接受者也是如此。在国际贸易中,当外国企业以损失为代价继续它们的出口经营时,国内企业会指控外国企业掠夺性倾销,并要求征收抵消进口关税^①的标准的贸易政策反应。然而,我们的分析表明,外国企业可能仅仅是理性地保持其未来在我们市场中的经营期权才有活动的,而没有任何掠夺性动机。只有当数据是一个充分长

^① 抵消进口关税是指对接受过补贴的进口商品所征收的一种附加税。——译者注

的时间序列时，我们才能检验假想的合谋或掠夺行动仅仅是竞争性产业演化的自然阶段还是真正的竞争失灵。

1.4.11 序列投资与增量投资

在第10章和第11章，我们回到单个企业的投资决策并考察企业投资决策应用中其他一些非常重要的观点。第10章研究了由多个阶段组成的投资，在产生任何产出流或利润流之前，所有的投资阶段必须依次完成。这家企业能经常看到未来潜在利润的一些指标，而这些指标是随机波动的。在任何阶段，企业都可能决定立即继续投资，或者等待改善的条件。在投资序列的早期阶段，大部分成本仍然是沉没的。因此，只有当企业看到盈利指标充分高的临界值水平时，它才会继续对项目投资。完成的步骤（阶段）越多，沉没成本也越低，只需更小的临界值，进行下一步就是合理的。在这个意义上，过去的决策会影响未来的决策。

在第10章，我们考察了当前决策对未来的另一种影响，即学习曲线。根据这种理论，任一时刻的生产成本都是累积的产出经历的一个递减函数。这样，当前的产出流对未来全部生产成本的下降有贡献。在将当前收益与当前生产成本进行比较以决定最优的产出水平时，这一额外的价值必须加到当前收益中。我们考察了在这些条件下的动态产出路径。我们发现，不确定性程度越高，未来成本下降的价值越低，而这将导致投资速度的下降。

在第11章，我们转向对增量投资的研究，其中产出流与利润流在全部时间内都是已安置资本存量的函数。这一章的目的是描述生产能力扩张的最优政策的特征。当生产显示出资本回报递减时，我们可将新增的每单位生产能力看做一个全新的项目，自被安装之日起，它就开始贡献其边际产出。因此，第6章推导出的关于这种项目的投资标准仍然适用。如果产出在某一时段显示出递增的资本回报，那么，在适当构造的区间内，所有的单位生产能力都应当做一个单一项目，而其安装的标准是第6章所描述的单一项目下的标准的很自然的推广。

当企业可以选择其生产能力的扩张速度时，我们必须说明这种扩张的成本如何取决于扩张的规模及速度。在这方面的不同假定意味着不同的最优政策。我们构造了一个考虑到前后变化的一般模型，并特别说明了作为过去十年间理论研究和实证研究支柱的成本调整模型与作为本书中心的不可逆方法之间的联系。

1.4.12 实证研究与应用研究

在第12章，我们转向一些例子，举例说明了本书详细论述的知识的應用及推广。我们还讨论了投资行为的实证研究的理论意义。

在第12章，我们首先考虑有关石油公司巨大利益的问题：如何评价未开发的近海油田的价值，以及如何决定何时投资于油田的开发与生产。正如我们将要看到的，一个未开发的储备实质上是一种期权，它赋予其所有者投资于储备的开发并生产石油的权利。通过评价该期权，我们可以为储备定价，并决定何时开发它。石油公司经常为近海油田花费上亿美元，因此，决定如何为它们估价并尽可能好地开发利用它们是非常重要的。

然后，我们转向电力设施的投资时机问题。《空气清洁法》要求减少二氧化硫的总体排放量，但是要最小化减少排放中的成本（该法赋予电厂一种选择），电厂可以投资于昂贵的“毛刷”从而把排放减少到法律要求的水平，或者可以购买能上市交易的“许可证”，这种许可证允许它们排放污染。许可证的未来价格有非常高的不确定性，而且对毛刷的投资是不可逆的。电厂必须决定是依赖于许可证保持排放的灵活性还是对毛刷投资。我们说明了这一问题如何能利用本书中的期权方法得到解释。

为说明本书中所论述的原则和工具所具有的影响不仅仅局限于企业投资决策，我们探讨了公共政策中的一个问题：假定政策的未来成本和收益是不确定的，政府应当在何时采纳一项旨在对环境威胁作出反应的政策？我们将证明，经济学家习惯的传统上用于评价环境政策的标准的成本—收益框架是不完善的，其理由是经常存在与环境政策相联系的重要的不可逆性。这些不可逆性的产生可能与环境危害本身有关，也可能与降低危害的政策中的适应成本有关。由于环境政策的采纳几乎是一种勿失良机的命题，研究最佳投资时机中所使用的相同技术可以应用于对环境政策的最优时机的研究。

在第12章结尾，我们讨论了投资行为的不可逆性和不确定性的一些实证意义。有大量的轶闻式的证据表明，企业作出投资决策的方式至少与本书所详细论述的理论大体一致。例如，对明显高于由资本资产定价模型所预测的资本机会成本的最低预期资本回报率的使用，以成本和不确定性的合理参数为基础，我们找到了再现现实特征的一些数值模拟。然而，对这种理论的更系统的计量经济学检验为时尚早。我们评述了一些此类工作，指出了其困难，并提出未来研究的方向。

1.5 非经济中的应用

本书的中心是企业的投资决策及其在产业均衡中的意义。这些事情是经济学家们最感兴趣的，它们的条件（技术及资源的可得性）和标准（企业价值最大化）是普遍为人接受的，理论引致了对它们的数量预测。消费者（购买耐用品）和工人（教育与人力资本）的投资决策有明显的类似结果。对这些问题的研究早已有之，我们将在第12章浏览一些有关文献。

许多其他的个人选择和社会选择是在相同的基本条件下作出的，即不可逆性、正在发生的不确定性及选择时机上一定的回旋余地。因而我们可以根据前面所概括的一些模型和结论来考虑它们，并提供一些定性的推测。我们认为，沿着这些线索还存在更严格研究的余地。通过加入期权价值，这需要更深入的工作，就像贝克尔（Becker, 1975, 1980）将经济方法用到社会现象一样。实际上，对这种观点的一些认识可以在贝克尔自己对这一主题的解释中看到，例如贝克尔（Becker, 1962, pp.22-23）在1962年的论述，但是沿着这些线索更全面、更正规的分析在未来仍然是潜在的富有成果的项目。尽管我们不能在这本已经很厚的著作中占用更多的篇幅，但是我们相信，沿着这些线索，读者将发现一些既有趣又发人深省的想法。

1.5.1 婚姻与自杀

24

婚姻需要求爱期的巨大成本，而离婚则有其自身的货币和情感成本。婚姻带来的幸福或痛苦在结婚前仅仅是不完全的预测，即使在结婚后也会持续地随机波动。因此，等待更好的伴侣具有期权价值，而且我们可以预期未来伴侣。为证明结婚是合理的，必然会设定充分高的“门当户对”的初始临界值。我们还预期，在婚姻的可逆性不强的宗教和文化中，婚姻的期权价值更高。因此，当其他条件相同时，在这种社会中的个人将更仔细地搜寻伴侣（一般来说，搜寻时间更长），而且坚持伴侣的质量更高的临界值。相反，当离婚容易时，我们将发现伴侣们会更轻易地结婚（或类似的安排）。

当然，其他条件并不是相同的，使离婚更困难的社会大概会把更高价值加在婚姻上。因此，我们可以预期，通过提供更高的“配对技术”，它们将消除因社会压力引起的个人理性搜寻及延误。为区分个别的且经常是对立的影响，对这些观点的经验检验将不得不仔细设计，但是这只提高了此类研究

的趣味和挑战。

经济学应用于社会学现象的最极端例子也许是由哈默马什和索斯 (Hamermesh and Soss, 1974) 所论述过的贝克尔的自杀理论。根据他们的观点, 当一个人剩余生命的效用的预期现值下降到低于某一标准或减去该标准后为零时, 他将结束自己的生命。大多数人对此所作出的反应是认为该模型给出了本质上是非理性行动的一种过度理性的观点。我们的理论正好表明了相反的观点。无论所描述的理论有优点或缺点, 从所描述的观点出发, 哈默马什-索斯模型还不够理性, 因为它忘记了保持生命力的期权价值。自杀是完全不可逆的行动, 而未来有许多正在发生的不确定性。因此, 等待以便察看某些事情是否会改善的期权价值应当是非常高的。这样, 境况必定比哈默马什-索斯模型中调整扣动扳机的关闭标准更黯淡。即使生命的预期方向仍然是向下的, 这也是正确的; 所有这些所必需的是向上的一些正概率。

25 现在回到这样的观点, 即大多数自杀者是非理性的, 并弄清楚到底他们如何在变得理性时失败了。这里有几种可能性, 但有一个似乎特别恰当。自杀将现在的沮丧扩散到未来, 而忽略了不确定性, 因而也忽略了生命的期权价值。反对自杀的宗教或社会禁忌作为补偿这种在理性上失败的测度发挥了有用的功能。通过提高这种行动的已认识到的成本, 当期权价值被忽略时, 这些禁忌降低了导致自杀的生命质量的临界值。这可能纠正个人预见方面的失误, 并使他们的临界值与认识到的期权价值的最优规则相一致。

1.5.2 法制改革与宪法

最后, 我们考虑法律改革。不同的基本宪法或法律原则在特定的环境下经常相互冲突。例如, 被告人的民事权利经常会阻碍法律与秩序的更好执行。关于与这些相互冲突的原则相联系的相对权重的公共观点可能随时间推移而改变。法律应当怎样快速地对最近的观念变化作出反应? 考虑到改变法律的一些立法成本和行政成本, 我们的理论表明, 选择等待并观察观念的趋势本身是否可逆有一定的价值。改革应当被延迟, 直到当前观念的压力足以抵消这一价值。但是有好的理由相信, 这一过程从属于一种短视或“政治市场失灵”。一直以来, 人民和政治家们似乎相信, 最终它们将恢复正常, 已经达到的观念间的平衡将永远保持。因此, 他们将忽略未来的不确定性和选择权价值, 并过于频繁地改变法律。

预期及战胜这种趋势的时机是在宪法构造时。考虑到后代在改变法律时将过于好战，建立者可以人为地提高改变的成本，从而使立法改变的政治性分裂的临界值与实际的最优临界值相符合。这样，绝大多数人改变宪法的各种要求可看做是纠正后代人短视的一种承诺机制。

这些只是本书所阐述的理论和技巧如何适用于一些非常广泛的问题的一些例子，我们已经以深思熟虑和激动人心的方式谨慎地加以阐述，希望能吸引来自更多的社会科学家沿着这些线索进行研究。在本书的其余部分，我们主要集中于投资，但希望读者能记住理论的更宽泛的潜在适用性。

【本章注释】

[1] 一些与投资相对立的决策（以未来不确定的成本为代价获得瞬时收益）也是不可逆的。突出的例子包括自然资源的耗竭及热带雨林的破坏。我们的方法也适用于这些决策。

[2] 萨默斯(Summers, 1987, p. 300)发现,最低资本回收率在8%~30%之间变动,中位数为15%,而均值为17%。无风险资本的成本非常低;考虑到利息支出的税收豁免,名义利率为4%,实际利率则接近于零。同时还可参见德陶查斯等人(Dertouzas et al., 1990, p. 61)的论述。适用于有系统性风险的投资的最低资本回报率将超过无风险利率,但是还没有大到足以调整许多公司所用到的数值。

[3] 参见吉尔伯特(Gilbert, 1989)和泰勒尔(Tirole, 1988, Chap. 8)对这种战略性投资观点的文献综述。

[4] 关于成长期权作为企业价值源泉的讨论参见迈尔斯(Myers, 1977)、凯斯特(Kester, 1984)和平迪克(Pindyck, 1988b)的论述。

[5] 1993年5月16日,星期日,这一天出现在《纽约时报》(*New York Times*)上的两篇文章描述了这些情况:“工厂依靠加班费,职位空缺更加少”和“经济虚弱,专业人士也成了临时工”。

第2章 通过简单例子 阐释概念



企业随时间推移连续地作出和推行投资决策,有时修正其投资决策。因此,本书的大部分篇幅致力于把投资决策作为连续时间问题的分析。然而,最好是由一些简单的例子开始,涉及最少的数学知识,其中投资决策是在时间上的2~3个离散点作出的。沿着这个思路,我们可以从直觉性的理解开始传达基本概念。特别地,我们希望证明,投资开支的不可逆性如何影响投资决策,以及它如何需要对商学院普遍讲授的标准的净现值规则进行修正。我们还想证明,投资机会如何像金融期权,而且可以根据它来定价和分析。

本章首先以一个简单例子为背景讨论这些观念,其中投资决策只能在两种可能的阶段(现在或下一年)作出。我们将利用这个例子来审视当

项目的未来价值不确定时不可逆性如何创造了投资中的机会成本，以及在作出投资决策时这种机会成本如何能得到考虑。我们还将证明，如何能利用基本的期权定价技术来分析投资决策。我们将详细考察企业投资期权的特征，并且观察该期权的价值及投资决策如何取决于项目未来价值的不确定性程度。这个例子将被扩展到第三阶段以便提供对投资时机问题的更深入的洞察，并且确定连续时间里投资问题模型化的阶段。最后，我们将简要考察当投资成本（对应于其回报）不确定时、未来利率不确定时及个人必须选择投资规模时的投资决策。

27

2.1 两阶段下的价格不确定性

考虑一家正决定是否对某种虚拟产品^①进行投资的企业。投资完全是不可逆的——工厂仅能被用于生产该种虚拟产品，而且如果该虚拟产品的市场消失了，企业不能“停止投资”并收回其支出。为使事情尽可能简单，我们假定工厂能以成本 I 在瞬间建成，而且每年将永远生产 1 单位的虚拟产品，营运成本为 0 美元。目前虚拟产品的价格为 200 美元，但下一年价格将改变。它上升到 300 美元的概率为 q ，下降为 100 美元的概率为 $1 - q$ 。然后价格将永远保持在这一新水平上。（见图 2—1）。

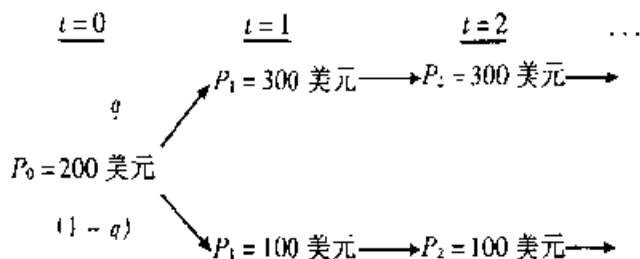


图 2—1 虚拟产品的价格

另外，为简化起见，假定虚拟产品未来价格的风险可以完全分散（即它与整体经济所发生的事情无关）。因此，该企业可以利用无风险利率来贴现未来现金流，这里我们采用 10%。

暂时地，我们令 $I = 1\ 600$ 美元， $q = 0.5$ （以后我们将弄清投资决策如

^① 虚拟产品是指具有一般产品特征的一种在现实中并不存在的产品。——译者注

28

何取决于 I 和 q)。这是一种好的投资吗? 企业应当现在就投资, 还是最好等一年并观察虚拟产品的价格会上升还是下降? 假定我们现在投资。以标准的方式来计算这一投资的净现值 (而且注意到虚拟产品的未来预期价格永远为 200 美元), 我们有

$$\begin{aligned} NPV &= -1\,600 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.1)^t} \\ &= -1\,600 + 2\,200 = 600(\text{美元}) \end{aligned} \quad (2-1)$$

显然本项目的净现值为正。虚拟产品工厂的当前价值, 我们记作 V_0 , 等于 2 200 美元, 超过了虚拟产品工厂的成本 1 600 美元。因此, 似乎我们应当进行这项投资。

然而, 结论是不正确的, 因为前面的计算忽略了一种成本, 即现在投资而不是等待并保持在价格下降时不投资的可能性的机会成本。为弄清这一点, 让我们再算一遍该项目的净现值。这次假定现在不投资, 等一年后, 只有虚拟产品的价格上升时才投资 (只有价格上升时才投资实际上是事前最优的情形)。在这种情形下, 净现值由式 (2-2) 给出^[1]:

$$\begin{aligned} NPV &= (0.5) \left[\frac{-1\,600}{1.1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{300}{(1.1)^t} \right] \\ &= \frac{850}{1.1} = 773(\text{美元}) \end{aligned} \quad (2-2)$$

注意, 在第 0 年, 没有支出和收益。在第 1 年, 只有当价格上升到 300 美元时才会花费 1 600 美元的成本, 其发生的概率为 0.5。如果我们在决定是否对该厂进行投资之前等待一年, 则现在项目的净现值为 773 美元; 而如果我们现在就投资于该厂, 则其净现值为 600 美元。很明显等待比立即投资更好。

如果我们仅有的选择是现在投资或永远不投资, 我们应当现在投资。在这种情形下, 没有等待一年的选择, 因而没有取消这样一种期权的机会成本, 因此标准的净现值规则仍适用。如果下一年虚拟产品的价格下降时, 我们能够不投资并收回 1 600 美元的成本, 则现在就应该投资。把机会成本引入净现值的计算需要两个条件——不可逆性以及作为现在投资的替代的未来投资的能力。当然, 存在企业不能等或者不能等太久的情形。(一个例子是对一家企业而言, 预期进入该市场的某一竞争者的规模足够大; 另一个例子是即将开发利用的专利或矿藏资源租约。) 拖延的时间越少, 拖延的成本越高, 不可逆性对投资决策的影响也越小。当我们发展出更一般的投资模型时, 我们将在本书后面的章节探讨这一点。

拥有在下一年作出投资而不是现在就投资或永远不投资的灵活性的价值有多大呢？（我们知道，拥有这种灵活性有一定的价值，因为我们可能选择等待而不是现在就投资。）这种“灵活性期权”的价值容易计算：它正好是两个净现值的差，即 $773 - 600 = 173$ （美元）。换句话说，为获得灵活性的投资机会，我们愿意比只允许我们现在就投资多支出 173 美元。

考察灵活性价值的另一个途径是回答下面的问题：为获得灵活的投资机会而不是死板的“要么现在投资，要么永不投资”的机会，我们愿意接受多高的投资成本 I ？为回答此问题，我们找到 I 的价值，这里记作 \bar{I} ，使等待时的项目净现值等于 $I = 1\,600$ 美元的净现值及现在就投资时的净现值，即等于 600 美元。将式(2-2)中的 1 600 美元替换为 I ，773 美元替换为 600 美元，有

$$NPV = (0.5) \left[\frac{-\bar{I}}{1.1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{300}{(1.1)^t} \right] = 600(\text{美元}) \quad (2-3)$$

对 \bar{I} 求解，可得 $\bar{I} = 1\,980$ 美元。换言之，当且仅当现在以 1 600 美元的成本建立虚拟产品工厂的机会与现在或下一年以 1 980 美元的成本建立虚拟产品工厂的机会具有同样的价值。

最后，假定存在虚拟产品的期货市场，而且从现在至交割那一年的期货价格等于预期的未来现货价格，即 200 美元。^[2] 期货市场上的套利能力会改变我们的投资决策吗？特别地，它会导致我们现在就投资，而不是等一年吗？答案是否定的。为说明这一点，考虑现在投资，并通过远期合约规避价格风险。为规避所有价格风险，我们需要 11 种虚拟产品的卖空期货，这实际上将抵消下一年项目净现值中的任何波动。（如果虚拟产品的价格上升到 300 美元，我们的项目将值 3 300 美元，但是我们在期货合约中将失去 1 100 美元；如果价格下降为 100 美元，我们的项目将仅值 1 100 美元，但是我们将获得额外的 1 100 美元。无论何种方式，我们最终获得的项目净值为 2 200 美元。）但是这也意味着我们的项目现在的净现值为 600 美元（2 200 美元减去 1 600 美元的投资成本），实际上就是无套利时的价值。^[3]

因此，套利没有收益，而且等待到下一年作出投资决策对我们的境况依然是比较好的。这一结论是莫迪利安尼-米勒（1958）定理的一种变形。在期货市场中的运作仅仅是金融政策的一种形式，不包括破产可能性，它对企业投资决策或投资机会的价值没有实际影响。

2.1.1 金融期权的类推

投资机会类似于普通股的看涨期权,它赋予我们作出投资支出(期权的执行价格)并获得一个价值随机波动的项目(股票)的权利(不需要我们执行)。在上述的简单例子中,我们拥有一种称为“实值”的期权,意思是如果它现在执行,它产生的净回报为正(被称为“虚值”的期权是指如果现在执行它,产生的净回报为负)。我们发现,即使期权是“实值”,等待而不是现在就执行它更好。在下一年,如果价格上升到 300 美元,我们将通过支付 1 600 美元执行我们的期权,并获得价值为 $V_1 = 3\,300$ 美元 $= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{300}{(1.1)^t}$ 的资产。如果价格下降到 100 美元,这项资产仅值 1 100 美元,因此我们不会执行该期权。

我们发现投资机会的价值为 773 美元(假定当前决策实际上可以在下一年作出)。利用标准的期权定价方法重新计算这一价值将是有益的,因为后面我们将利用这种方法来分析其他投资问题。

为此,令 F_0 表示投资机会现在的价值,即为拥有投资于虚拟产品工厂的期权我们愿意现在支付的金额。并令 F_1 表示下一年这一投资机会的价值。注意到 F_1 是一随机变量,它取决于虚拟产品的价格变化。如果价格上涨到 300 美元,则 F_1 将等于 $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{300}{(1.1)^t} - 1\,600 = 1\,700$ 美元;如果价格下降到 100 美元,将不执行投资期权。在这种情形下, F_1 将等于零。这样我们就知道了 F_1 的所有可能值。这里的问题是找到 F_0 ,即当前期权的价值。^[4]

为求解这个问题,我们将创建有两种成分的一种投资组合:投资机会本身及一定数量的虚拟产品。我们将选择虚拟产品的数量,以使投资组合是无风险的,也就是使投资组合在下一年的价值与虚拟产品价格的升降无关。由于投资组合将是无风险的,我们知道个人能够从持有该组合中所获得的回报率必须是无风险的利率。(如果投资组合的回报率高于无风险利率,套利者可以通过在无风险利率水平上借款并购买资产组合,从而获得无限的货币数量;如果投资组合的回报率低于无风险利率,套利者通过卖空投资组合并在无风险利率上投资于基金来获利。)通过设定投资组合的回报率等于无风险利率,我们可以计算投资机会的当前价值。

特别地,考虑人们持有投资机会并卖空 n 个虚拟产品的一个投资组合。(假定虚拟产品是一种可交易的商品,如石油,通过从其他生产者那里借款,或通过期货市场卖空,人们可以获得空头。然而在那一刻,我们没必要

关心这一投资组合的实际执行情况。)这一投资组合的现在价值为 $\Phi_0 = F_0 - nP_0 = F_0 - 200n$ 。下一年投资组合的价值为 $\Phi_1 = F_1 - nP_1$ 。这取决于 P_1 。如果 P_1 为 300 美元,则 $F_1 = 1700$, $\Phi_1 = 1700 - 300n$ 。如果 P_1 为 100 美元,则 $F_1 = 0$, $\Phi_1 = -100n$ 。现在让我们选择 n , 使投资组合是无风险的, 即 Φ_1 与价格的变化无关。为实现这一点, 令

$$1700 - 300n = -100n \quad (2-4)$$

或者 $n = 8.5$ 。以这种方式选择 n , 不论虚拟产品的价格上涨到 300 美元还是下降为 100 美元, $\Phi_1 = -850$ 。

现在让我们计算持有这种投资组合的回报。这种回报是资本收益 $\Phi_1 - \Phi_0$, 减去持有空头时必须进行的支付。由于虚拟产品的资本收益的预期回报率为零 (下一年的预期价格为 200 美元, 与这一年的价格相同), 理性的投资者不会持有多头, 除非他或她预期至少可以获得 10% 的回报率。因此, 卖空虚拟产品所需的支付为每年每一产品 $0.1P_0 = 20$ 美元。(这与卖空一种支付红利的股票相似; 空头需要支付红利, 因为没有理性的投资者会在不能获得红利的条件下持有弥补性的多头。)我们的投资组合有 8.5 单位产品的空头, 因此, 它不得不付出 170 美元。所以, 在一年内持有该组合的回报为

$$\begin{aligned} \Phi_1 - \Phi_0 - 170 &= \Phi_1 - (F_0 - nP_0) - 170 \\ &= -850 - F_0 + 1700 - 170 \\ &= 680 - F_0 \end{aligned}$$

因为这一回报是无风险的, 我们知道它必须等于无风险利率, 这里我们已经假定为 10%, 乘以组合的初始价值 $\Phi_0 = F_0 - nP_0$, 即

$$680 - F_0 - 0.1(F_0 - 1700) \quad (2-5)$$

这样, 我们得出 $F_0 = 773$ 美元。注意到这与以前在决定是否投资之前遵循等待一年的最优策略的假设下所计算出来的投资机会的净现值是一样的。

我们已经发现, 投资机会的价值, 即投资于该项目的期权价值是 773 美元, 现在投资 (执行期权) 的回报为 $2200 - 1600 = 600$ 美元。但是一旦我们投资, 则期权就消失了, 因此 773 美元是投资的机会成本。这样, 现在投资的全部成本为 $1600 + 773 = 2373$ 美元 > 2200 美元。作为结论, 我们将等待并保持期权有生命力, 而不是现在投资。我们获得的结论与通过比较净现值的结论一样。然而, 这一次我们计算了投资的期权价值, 并且明确地将它考虑为投资成本的一部分。

我们对投资期权价值的计算是建立在无风险投资组合的构造上的, 这需

33

要一种可以交易的（多头或空头持有）虚拟产品。当然，我们也可以利用一些其他的资产或资产组合来构造投资组合，该组合的价格必须与虚拟产品的价格完全相关。但是如果人们不能交易其产品且没有其他资产可以“消除”虚拟产品价格的风险时会怎么样？在这种情形下，人们仍能像我们在开始时所做的那样计算投资的期权价值，即计算每种投资策略的净现值（现在投资或等一年价格上升时再投资），并且挑选出能带来最高净现值的策略。这实质上是动态规划的方法。在这种情形下，它恰好给出了同样的答案，因为所有的价格风险是可分散的。在本书的后面章节，我们还将更详细地探讨期权定价与动态规划间的联系。

2.1.2 投资期权的特征

我们已经看到我们的投资决策如何类似于执行期权的决策，而且我们可以用与金融看涨期权定价几乎相同的方法来为投资期权定价。为进一步洞察投资期权的特征，让我们观察其价值如何取决于不同的参数。特别地，我们将决定投资期权的价值（和投资决策）如何取决于投资的直接成本 I 、虚拟产品的初始价格 P_0 以及下期价格提高的概率 q 。

1. 投资成本的变化

迄今为止，我们一直将投资成本 I 固定为 1 600 美元。如果 I 低于或高于这一数字，投资期权价值多少？通过采取与以前一样的步骤，我们可以找到答案。这样就很容易发现，获得无风险投资组合所必需的空头取决于 I ，如式 (2-6) 所示^[5]：

$$n = 16.5 - 0.005I \quad (2-6)$$

投资期权的当前价格由式 (2-7) 给出：

$$F_0 = 1\,500 - 0.455I \quad (2-7)$$

式 (2-7) 给出了作为投资直接成本 I 的函数的投资机会的价值。前面已看到，若 $I = 1\,600$ 美元，等一年再投资而非现在就投资会更好。是否存在使现在投资成为选定策略的 I 的值呢？

为回答这个问题，考虑只要投资的回报至少与全部成本（即直接成本 I 加上机会成本 F_0 ）相等，我们就应当现在投资。因为来自现在就投资的回报为 $V_0 = 2\,200$ 美元，如果 $2\,200 > I + F_0$ ，则我们现在就投资。将式 (2-7) 中的 F_0 代入，只要

$$I + 1\,500 - 0.455I < 2\,200$$

则我们应当投资。这样，如果 $I < 1\,284$ 美元，人们就应当现在投资而不是等待。理由是，等待意味着放弃第一年的收益，而且失去的收益超过了调整资源的机会成本，而不是保持投资期权的存在。然而，如果 $I = 1\,284$ 美元， $F_0 = 916$ 美元 $= V_0 - I$ ，则人们对现在投资或等到下一年再投资是没有什么差别的。（这也可以通过将现在投资时项目的净现值与等到下一年再投资时的净现值进行比较而得到。在两种情形下，净现值都为 916 美元。）而且如果 $I > 1\,284$ 美元，等待可能会更好。

F_0 对 I 的依赖由图 2—2 说明。该图表明，期权的价值 F_0 以及来自现在就投资的回报 $V_0 - I$ ，都是 I 的函数。对 $I > 1\,284$ 美元， $F_0 = 1\,500 - 0.455I > V_0 - I$ ，那么应当保持期权的活力，即在决定是否投资之前，我们应当等到下一年。然而，如果 $I < 1\,284$ 美元， $F_0 = 1\,500 - 0.455I < V_0 - I$ ，则现在就应当执行该期权，那么期权的价值正好等于其净回报 $V_0 - I$ 。

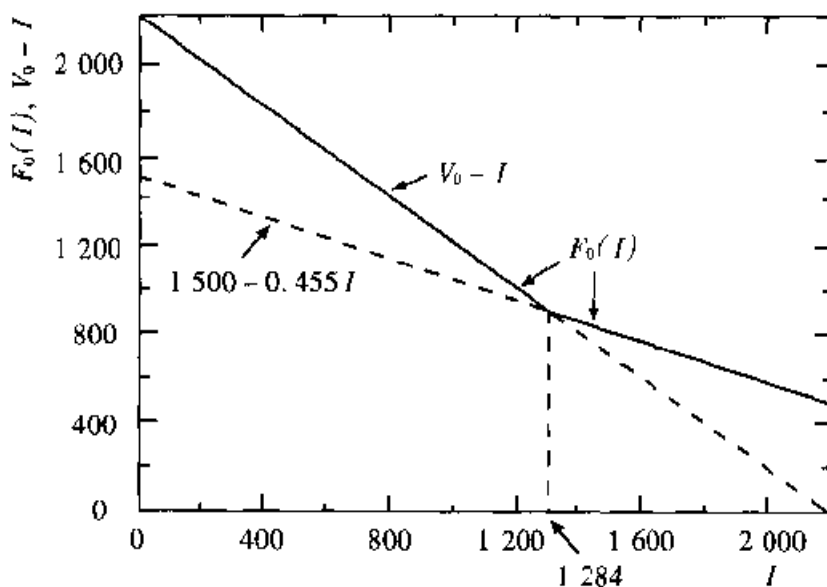


图 2—2 投资于虚拟工厂的期权

在期权术语中，当 I 很小时，来自立即投资的净回报变得非常大，或者说该期权是“很大的实值”。在充分大的临界点或临界值充分大时，等待的成本（瞬间利润的匮乏）超过了等待的收益（在发现价格是升高还是降低后作出最优决策的能力的价值），而且立即执行成为最优的。

2. 改变初始价格

让我们再一次将投资成本 I 固定为 1 600 美元，但现在改变虚拟产品的初始价格 P_0 。为比，我们假定无论 P_0 怎样变化，下一年价格提高 50% 的

概率为 0.5，价格降低 50% 的概率也为 0.5（见图 2—3）。

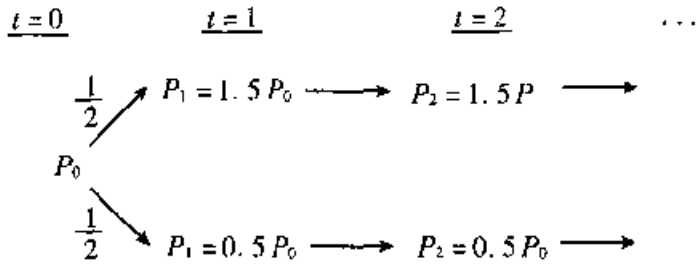


图 2—3 虚拟产品的价格

为评估投资期权，我们再建立一个无风险的投资组合，其中我们持有投资期权，且能够买空一定数量的虚拟产品。这一投资组合现在的价值为 $\Phi_0 = F_0 - nP_0$ ，其在下一年的价值取决于 P_1 。虚拟产品工厂在下一年的价格为 $V_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{P_1}{(1.1)^t} = 11P_1$ ，但如果其价值超过投资成本 1 600 美元时，我们才投资于工厂。因此， $F_1 = \max [0, 11P_1 - 1 600]$ 。假定 P_0 位于价格下一年上升到值得投资（即如果 $P_1 = 1.5P_0$ ）与下降到不值得投资的范围内（我们将马上考虑其他的可能性），那么，如果价格上升， $\Phi_1 = 16.5P_0 - 1 600 - 1.5nP_0$ ；如果价格下降，则 $\Phi_1 = -0.5nP_0$ 。设两种情形下的 Φ_1 相等，则使投资组合无风险的 n 的价值可由式（2—8）给出：

$$n = 16.5 - \frac{1 600}{P_0} \quad (2-8)$$

注意到以这种方式选择 n ，不论价格是升还是降，都有 $\Phi_1 = -8.25P_0 + 800$ 。

现在，让我们计算这个投资组合的回报，注意空头所需要的回报为 $0.1nP_0 = 1.65P_0 - 160$ ，实际回报是 $6.60P_0 - F_0 - 640$ 。由于回报是无风险的，它必须等于 $0.1\Phi_0 = 0.1F_0 - 1.65P_0 + 160$ 。解出 F_0 ，给出投资期权的价值：

$$F_0 = 7.5P_0 - 727 \quad (2-9)$$

假定只有当价格在下一年上升时我们才会投资，我们已经计算出投资期权的价值。然而，如果 P_0 足够低，则我们永远不会投资；如果 P_0 足够高，则现在就投资要比等待更划算。低于什么价格时我们永远不会投资呢？由上面的方程我们发现，当 $7.5P_0 = 727$ 美元，或者 $P_0 = 97$ 美元时， $F_0 = 0$ 。

如果 $P_0 < 97$ 美元， V_1 将小于投资成本 1 600 美元，即使价格在下一年

上升 50%。

P_0 为何值时我们应当现在就投资而不是等待呢？如果虚拟产品工厂的当前价值 V_0 超过其总成本 $1\,600 + F_0$ ，我们应当现在投资。因此，我们用 P_0^* 表示临界价格，满足 $V_0 = 1\,600 + F_0$ ，即 $11P_0^* = 1\,600 + 7.5P_0^* - 727$ ，或者 $P_0^* = 249$ 美元。如果 P_0 超过了 249 美元，现在投资要比等待会更好。期权的实值是充分大的，等待的成本（阶段 0 利润的不足）超过了收益。^[6]

找到投资期权的价值我们就得到了一个临界价格。通过计算现在就投资时项目的净现值（作为 P_0 的函数），并令它等于一直等到下一年才投资时的净现值，然后以价格结果为基础决定是否投资，这样也能找到这个临界价格（这一点作为习题留给读者）。

这样，投资期权的价值就是当前价格 P_0 的分段线性函数，最优投资规则似乎取决于 P_0 。如果 $P_0 \leq 97$ 美元， $F_0 = 0$ ，则人们将永远不对新工厂投资；如果 $97 < P_0 \leq 249$ 美元，则 $F_0 = 7.5P_0 - 727$ ，人们将等一年，价格若上升就投资；如果 $P_0 > 249$ 美元，则 $F_0 = 11P_0 - 1\,600$ ，人们将立即投资。这一结论列在表 2—1 中。

表 2—1 投资期权的价值与投资规则

区域	期权价值	最优投资规则
$P_0 \leq 97$	$F_0 = 0$	永远不投资
$97 < P_0 \leq 249$	$F_0 = 7.5P_0 - 727$	只有当价格上升时才在阶段 1 投资
$P_0 > 249$	$F_0 = 11P_0 - 1\,600$	在阶段 0 投资

在图 2—4 中，我们已经画出了作为 P_0 的函数的 F_0 。假定我们惟一的选择是要么现在投资要么永远不投资，那么投资期权将是 0 与 $11P_0 - 1\,600$ 中的最大值，即现在虚拟产品工厂的价值 V_0 小于建设这一工厂的成本 1 600 美元。（在金融术语中，这就是期权的内在价值，即在 0 与立即执行该期权的价值中取最大值）。另外，只要 $11P_0 > 1\,600$ 美元，即 $P_0 > 146$ 美元，我们现在就投资。当 $P_0 > 249$ 美元，投资期权等于其内在价值 $11P_0 - 1\,600$ ，因为这种情形下，现在投资而不是等待是最优的。因此，当 $P_0 > 249$ 美元时， $11P_0 - 1\,600$ 被显示为一条实线。然而，当 $P_0 < 249$ 美元时，投资期权的价值大于 $11P_0 - 1\,600$ ，因此，至少在下一年之前，左边是不执

37

行的。

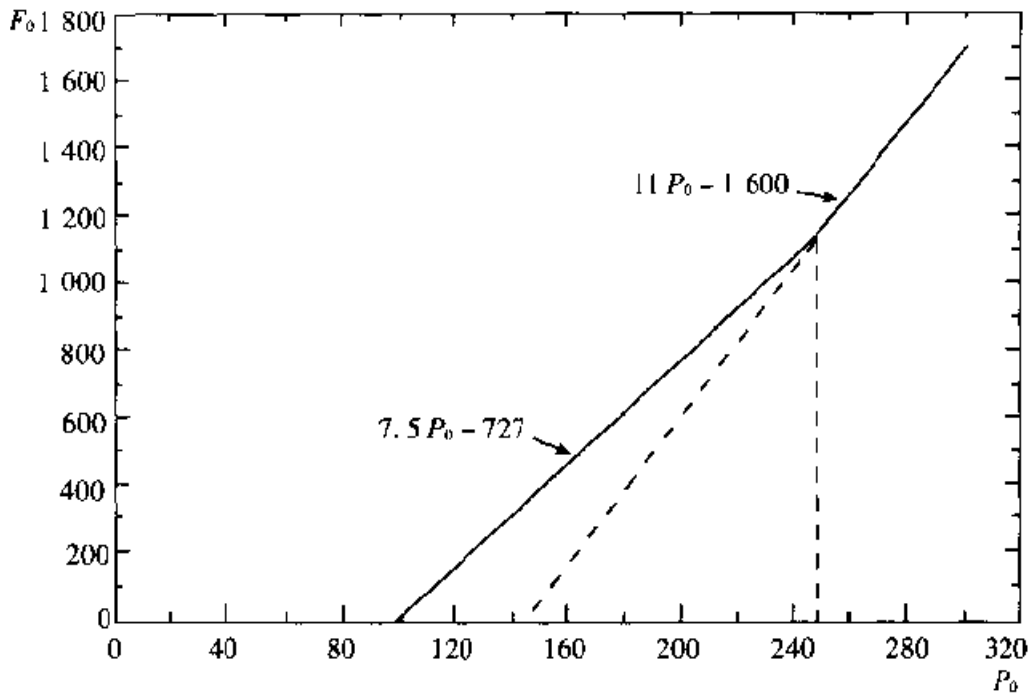


图 2—4 作为初始价格函数的投资期权价值

88 注意到在图 2—4 中 F_0 是 P_0 的凸函数，而且 F_0 大于或等于现在执行期权的净回报 $V_0 - I$ ，超过了最优执行点（在本例中为 249 美元）。我们在后面将发现，投资期权的价值典型地拥有这些特征。

3. 改变价格的概率

我们也可以决定投资期权的价值如何取决于 q ，即虚拟产品价格下一年将上升的概率（迄今为止，我们一直假定这一概率为 0.5）。为此，我们令初始价格 P_0 是一任意值，但同时把投资成本 I 固定为 1 600 美元。那么，我们可以遵循与以前相同的步骤来寻找期权的价值和最优投资规则。

读者可以验证，虚拟产品的空头要构建的无风险投资组合为 $n = 8.5$ ，而且独立于 q 。（其原因是 n 取决于阶段 1 中投资组合的可能的价值 Φ_1 ，尽管投资组合并不一定会以这种概率取这些值。）然而，这种空头所要求的支付确实取决于 q ，因为从持有虚拟产品中获得的预期资本收益取决于 q 。为计算这一点，令 $E_0(P_1)$ 表示下一年虚拟产品的预期价格，它是以阶段 0 的价格为条件计算的。^[7] 这样， $E_0(P_1) = (q + 0.5)P_0$ 。那么，虚拟产品的预期

资本收益率为 $\frac{E_0(P_1) - P_0}{P_0} = q - 0.5$, 空头中每一产品所要求的回报为 $[0.1 - (q - 0.5)]P_0 = (0.6 - q)P_0$ 。令 $\Phi_1 - \Phi_0 - (0.6 - q)nP_0 = 0.1\Phi_0$, 且令 $n = 8.5$, 我们发现, 如果 $P_0 > 97$ 美元, 期权的价值为

$$F_0 = 15qP_0 - 1455q \quad (2-10)$$

注意, F_0 随着 q 的增加而增加 (只要 $P_0 > 97$ 美元)。这正是我们所期望的, 因为一个较高的 q 意味着价格的上升和投资期权的执行。如果 $P_0 \leq 97$ 美元, 无论价格是否上升, 我们永远都不会投资且 $F_0 = 0$ 。

投资决策如何取决于 q ? 考虑到只要 $F_0 > V_0 - I$, 最好是等待而不是现在就投资。在这种情形下, $V_0 = P_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q + 0.5)P_0}{(1.1)^t} = (6 + 10q)P_0$ 。因此, 39

只要 $15qP_0 - 1455q > (6 + 10q)P_0 - 1600$, 即 $P_0 < P_0^* = \frac{1600 - 1455q}{6 - 5q}$,

则最好是等待。此外, P_0^* 随着 q 的上升而下降, 即价格提高的概率较高促使企业更快地投资。为什么会这样? 等待的成本是本阶段不出售虚拟产品而流失的收益, 它随 P_0 的提高而提高。由于较高的 q 使下一阶段出现坏结果的可能性较小, 它减少了等待的价值。因此, 一个较高的 q 意味着一个较小的 P_0 足以使等待成本超过等待的价值。

4. 价格上升的不确定性

改变概率 q 而保持所有其他变量不变时, 我们就改变了阶段 1 的预期价格。假定阶段 1 的预期价格保持在初始价格水平 P_0 不变, 但我们提高价格上下改变的幅度, 这样, 阶段 1 价格的方差提高了。 P_1 分布中的这种均值回归的变化 (mean-reverting spread) 对投资期权的价值 F_0 、临界价格 P_0^* (超过它立即投资而不是等待是最优的) 会有怎样的影响呢?

像以前那样, 假定 $q = 0.5$ 。但是现在价格在阶段 1 或者上升或者下降 75%, 而不是以前的 50%。这样 P_1 的方差更大, 但是其期望值仍为 P_0 。为找到 F_0 , 我们像以前那样进行同样的步骤, 创建一个无风险的投资组合, 使其回报等于无风险回报。再令投资组合是投资期权的多头和 n 单位虚拟产品的空头, 因而其现在的价值为 $\Phi_0 = F_0 - nP_0$ 。在阶段 1, 价格上升到 $1.75P_0$, 在这种情形下, 项目的价值为 $V_1 = 11P_1 = 19.25P_0$, 因此, $\Phi_1 = 19.25P_0 - 1600 - 1.75nP_0$; 或者价格下降到 $0.25P_0$, 在这种情形下, $\Phi_1 = -0.25nP_0$ 。令这两种可能的 Φ_1 相等并求 n 的值:

$$n = 12.83 - \frac{1.067}{P_0} \quad (2-11)$$

则 $\Phi_1 = -3.21P_0 + 267$, 与 P_1 无关。考虑到空头要求的回报为 $0.1nP_0 = 1.28P_0 - 107$, 投资组合的回报为 $8.34P_0 - F_0 - 693$ 。令它等于 $0.1\Phi_0 = 0.1F_0 - 1.28P_0 + 107$, 并求 F_0 , 我们有

$$F_0 = 8.75P_0 - 727 \quad (2-12)$$

40 如果 $P_0 = 200$ 美元, 则 $F_0 = 1\,023$ 美元, 这远远大于前面当价格仅上升或下降 50% 时所得到的 773 美元的价值。为什么不确定性的提高增加了投资期权 40 的价值? 因为它提高了来自期权的向上的潜在回报, 而保持向下的回报为零 (如果价格下降, 我们将不执行期权)。

我们还可以计算临界的初始价格 P_0^* , 它足以保证现在投资而不是等待。令虚拟产品工厂的当前价值 $V_0 = 11P_0$ 等于其总成本 $1\,600 + F_0$ 。利用关于 F_0 的公式 (2-12), 可以得出 $P_0^* = 388$ 美元, 这远远大于我们前面所得到的 249 美元的价值。由于期权的价值较大, 现在就投资而不是等待的机会成本比较高, 因此, 存在更高的等待激励。

5. “坏消息原则”

考虑价格向上移动的概率 q 变化和向上、向下移动的幅度变化, 我们可以决定“好消息” (向上移动) 和“坏消息” (向下移动) 如何独立地影响确保立即投资的临界价格 P_0^* (在前面的计算中, 向上或向下的移动必须同时上升或下降)。我们将发现 P_0^* 仅取决于价格向下移动的幅度, 而不是向上移动的幅度。理由是, 正是为避免“坏消息”的结果才导致我们等待。^[8]

假定初始价格为 P_0 , 但在阶段 1, 价格变为

$$P_1 = \begin{cases} (1+u)P_0, & \text{概率为 } q, & u \text{ 表示价格上升的幅度} \\ (1-d)P_0, & \text{概率为 } 1-q, & d \text{ 表示价格下降的幅度} \end{cases}$$

为保证一般性, 令投资成本为 I 。在这种情形下, 如果我们现在就投资, 净现值为

$$\begin{aligned} NPV &= -I + P_0 + q \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1+u)P_0}{(1.1)^t} + (1-q) \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1-d)P_0}{(1.1)^t} \\ &= -I + 10[1.1 + q(u+d) - d]P_0 \end{aligned} \quad (2-13)$$

如果我们等待, 则净现值为

$$NPV = \frac{1}{1.1} \{ q \max[0, -I + 11(1+u)P_0] + (1-q) \max[0, -I + 11(1-d)P_0] \}; \quad (2-14)$$

很容易证明（而且直观上非常清楚），现在投资与等待之间的无差异点出现在 P_0 的下述范围内：价格上升时，阶段 1 的投资可以保证；价格下降时，就不能保证在阶段 1 的投资。

在这种情形下，式（2-14）中的净现值可以简化为

$$NPV = \frac{q}{1.1} [-I + 11(1+u)P_0] \quad (2-15)$$

令现在就投资的净现值方程式（2-13）等于等待的净现值方程式（2-15），并求 P_0 的解，则

$$P_0^* = I \left(\frac{0.1}{1.1} \right) \left[\frac{0.1 + (1-q)}{0.1 + (1-q)(1-d)} \right] \quad (2-16)$$

式（2-16）中有一点值得注意—— P_0^* 确实在任何途径上都不依赖于 u ，即价格向上移动的幅度。它仅仅取决于价格向下移动的幅度 d ，及其向下移动的概率 $1-q$ 。而且， d 越大，临界价格 P_0^* 也越高，正是可能的“坏消息”的数量级导致了等待的激励。^[9]

我们还可以采用比我们以前所做的更一般的方式来考察 P_1 均值回归范围的影响。令 $q = \frac{d}{u+d}$ ，则 $E(P_1) = P_0$ ， $\text{Var}(P_1) = udP_0^2$ 。因此，如果我们同比例地提高 u 和 d ，就可以保持 q 和 $E(P_1)$ 不变，而提高 P_1 的方差。从式（2-16）中我们可以观察到，如果 d 较大，而 q 保持不变， P_0^* 提高。我们又一次发现，均值回归的范围提高了等待激励。

2.2 将模型扩展到三阶段

在上面的例子中，我们作出了不现实的假定，即在第一年之后不存在虚拟产品价格的不确定性。在大多数市场中，期货价格经常是不确定的，而且不确定性的数量级随时间期限提高。换句话说，尽管虚拟产品的预期期货价格可能一直等于当前价格，但我们所考察的期货时间越长，期货价格的方差一般也将越大。在本书后面的章节，我们将以这种方式来模型化价格的随机演变。在这里，通过推广我们的例子，使作出投资决策时有三个阶段，我们就可以获得对投资问题特征的更多认识。

像以前那样,假定 $t=0$ 时,虚拟产品的初始价格为 P_0 ; $t=1$ 时,价格将上升或下降 50% ($P_1=1.5P_0$ 或 $P_1=0.5P_0$), 每种情况发生的概率为 50%; 那么, 在 $t=2$ 时, 价格也将以相同的概率上升或下降 50%。因此, P_2 有三种可能值: $2.25P_0$, $0.75P_0$ 和 $0.25P_0$ 。对所有的 $t \geq 2$, 价格保持在这一水平上 (见图 2—5)。我们再次将投资的直接成本 I 固定为 1 600 美元。

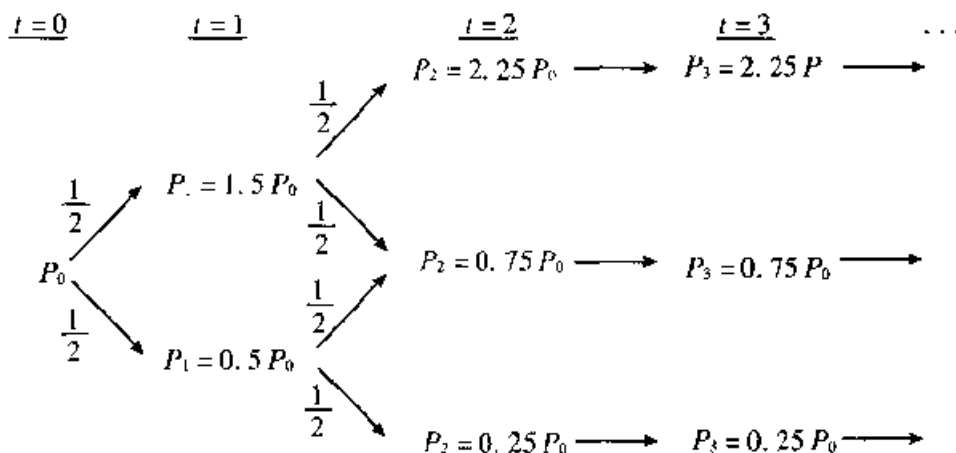


图 2—5 虚拟产品的价格

通过增加一阶段的价格不确定性, 我们的投资问题变得更复杂了。第一个复杂的因素是, 现在有五种有意义且必须考虑的可能的投资策略。特别地, 它可能是最优的: (1) 立即投资。(2) 等一年, 如果价格上升就投资, 如果价格下降永远不投资。(3) 等一年, 如果价格上升就投资; 如果价格下降, 则再等一年, 若价格上升就投资。(4) 等两年, 只有价格在前两段时间都上升时才投资。(5) 永不投资。哪种规则是最优的取决于初始价格和投资成本, 而且必须算出每种可能规则下的投资期权价值。第二个复杂的因素是, 尽管我们仍然可以通过构造一无风险的投资组合来计算投资期权的价值, 但是这一组合的成分在两年间并不是不变的; 在 $t=1$ 价格变化后, 我们不得不改变处于空头的虚拟产品的数量。^[10]

我们将再次利用期权定价方法处理这一问题。我们想获得在 $t=0$ 时作为初始价格 P_0 的函数的投资期权价值 F_0 , 以及最优的投资规则, 诀窍是向后工作。从 $t=1$ 向前看, 我们将解决两个独立的投资问题, 首先是 $P_1=0.5P_0$, 然后是 $P_1=1.5P_0$ 。假定在两种情形下我们还没有投资, 在每种情形下, 通过构造一无风险的投资组合并计算其回报, 我们将确定 $t=1$ 时投资期权的价值 F_1 。给出 F_1 的两种可能值 ($P_1=0.5P_0$ 或 $P_1=1.5P_0$), 然后可以回到 $t=0$, 再构造无风险的投资组合并计算其回报从而确定 F_0 。

假定在 $t=1$, $P_1=0.5P_0$, 而且 P_0 的值处于这样一种临界状态: 如果价格升高, 我们在阶段 2 就投资; 如果价格下降, 则不投资。现在构造一个无风险的投资组合, 包括投资期权和数量为 n_1 的虚拟产品的空头。这一投资组合的值为 $\Phi_1 = F_1 - n_1P_1$ 。如果价格在阶段 2 上升(达到 $0.75P_0$), 我们将投资, 因此, $F_2 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{0.75P_0}{(1.1)^t} - 1600 = 8.25P_0 - 1600$, $\Phi_2 = 8.25P_0 - 1600 - 0.75n_1P_0$ 。如果价格在阶段 2 下降($0.25P_0$), 我们将不投资, $F_2=0$, 而 $\Phi_2 = -0.25n_1P_0$ 。令这两种情形下 Φ_2 相等, 我们发现, 如果 $n_1 = 16.5 - \frac{3200}{P_0}$, 则投资组合是无风险的; 不论价格上升还是下降, $\Phi_2 = 800 - 4.125P_0$ 。计算投资组合的回报($\Phi_2 - \Phi_1 - 0.1n_1P_1$), 并令它等于无风险回报($0.1\Phi_1$), 给我们提供了投资期权的价值: $F_1 = 3.75P_0 - 727.3$ 。而且, 从这里注意到, 当 $P_0 = 193.34$ 时, $F_1=0$ 。因此, 如果价格在阶段 1 下降, 且 $P_0 < 193.94$, 我们将永不投资。

现在我们必须重复这一过程, 假定价格在阶段 1 已经上升, 即 $P_1 = 1.5P_0$ 。读者可以验证, 在这种情形下, 无风险的投资组合要求空头为 $n_1 = 16.5 - \frac{1067}{P_0}$ 的虚拟产品, 投资期权的价值为 $F_1 = 11.25P_0 - 727.3$ 。在这种情形下, 当 $P_0 = 64.65$ 时, $F_1=0$ 。因此, 如果 $P_0 < 64.65$, 我们将永不投资, 即使价格在两阶段都上升。此外, 假定我们在阶段 1 投资而不是等待直到阶段 2 投资, 这样我们将得到一个净值 $V_1 - I = 11(1.5P_0) - 1600$ 。令这一数值等于 F_1 并求 P_0 , 可得 $P_0 = 166.23$ 。因此, 如果 $P_0 > 166.23$, 且价格已经上升, 我们将在阶段 1 投资, 而不是再等一年。

我们现在知道了 F_1 以及对 P_1 的两种可能结果下的最优投资策略(假定我们还没有投资), 因此, 我们可以通过再一次构造无风险的投资组合并计算其回报来确定 F_0 。

由于最优投资策略取决于 P_0 , 这必须对不同范围的 P_0 都进行计算, 即对 $64.65 < P_0 \leq 166.23$ (在这种情形下, 只有当价格在两阶段都上升时, 我们才会在阶段 2 投资), 对于 $166.23 < P_0 \leq 193.94$ (在这种情形下, 如果价格上升, 我们将在阶段 1 投资, 但如果价格下降, 我们将永不投资), 以及对 $P_0 > 193.34$ (在这种情形下, 如果价格上升, 我们将在阶段 1 投资; 但如果价格下降, 我们将等一年, 如果价格在阶段 2 上升, 我们就投资)。所有的解被列在表 2—2 中。

表 2—2 投资期权价值与投资规则

范围	期权价值	最优投资规则
$P_0 \leq 64.65$	$F_0 = 0$	永不投资
$64.65 < P_0 \leq 166.23$	$F_0 = 5.11P_0 - 330.6$	只有当价格在阶段 1 和阶段 2 都上升时, 才在阶段 2 投资
$166.23 < P_0 \leq 193.94$	$F_0 = 7.5P_0 - 727.3$	如果价格上升, 在阶段 1 投资; 如果价格在阶段 1 下降, 则永不投资
$193.94 < P_0 \leq 301.19$	$F_0 = 9.2P_0 - 1\,057.9$	如果价格上升, 则在阶段 1 投资; 如果价格在阶段 1 下降, 则等待; 如果价格上升, 则在阶段 2 投资
$P_0 > 301.19$	$F_0 = 11P_0 - 1\,600$	在阶段 0 投资

图 2—6 显示了 F_0 作为 P_0 函数的图像。与两阶段模型一样, 这是一个分段线性函数, 但现在有更多的分段, 每一分段对应着一种最优投资策略。另外, 假定惟一的选择是要么现在投资, 要么永不投资, 则投资期权的价值将为 $11P_0 - 1\,600$ 。只要 $11P_0 > 1\,600$, 即 $P_0 > 146$, 我们现在就投资。当 $P_0 > 301.19$, 期权价值也是这么多, 因为那时 $F_0 = 9.2P_0 - 1\,057.9 - 11P_0 - 1\,600$, 最优是现在就投资而不是等待。因此, $11P_0 - 1\,600$ 对 $P_0 > 301.19$ 被显示为实线, 但是对 $146 < P_0 < 301.19$ 则被显示为虚线。最后, 注意到 F_0 是 P_0 的凸函数, 因此, F_0 大于或等于现在就执行期权的净回报 $V_0 - I$, 直到最优执行点 (这里为 301.19 美元)。

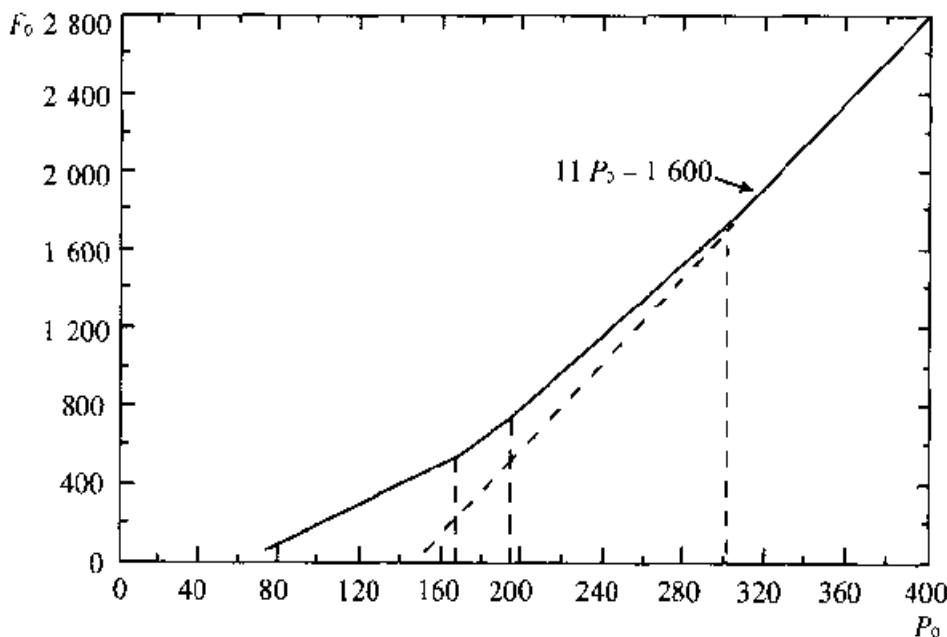


图 2—6 作为初始价格函数的投资期权的价值

与以前一样，我们可以检验 F_0 及最优执行点 P_0^* 取决于投资成本 I 或者对价格变化的方差。（然而，现在进行这些计算更加辛苦，因为现在涉及三个阶段而不是两个阶段。）例如，我们可以证明，如果价格变化的方差上升，而预期的价格变化保持不变，则期权价值 F_0 将上升，临界执行价格 P_0^* 也将上升。作为练习，通过令 P 在每一阶段上升或下降 75%，而不是如图 2—5 所示的 50%，读者也许能检验这一点。

如果这样做了，现在可以将我们的例子扩展到四阶段，允许价格在 $t = 3$ 时再次上升或下降 50%。我们可以向后做，找到与 P_2 的每一可能值对应的 F_2 ，然后找到 P_1 的每一可能值所对应的 F_1 ，最后找到 F_0 。以相似的方法，我们可以将例子扩展到五阶段、六阶段等。正如我们所做的，我们将发现 F_0 的曲线将越来越弯，在第 5 章中，我们将发现，随着阶段数量的变大， F_0 的曲线将逼近一条始于原点并上升到与表示立即投资获得的净回报 $(V_0 - I)$ 曲线相交的光滑曲线。事实上，这两条曲线相切，它们的交点限定了立即投资是最优策略时的临界价格 P_0^* 。 46

然而，增加越来越多的阶段将使我们的例子变得不可思议的复杂，而且在任何情形下都会变得不太满意，因为最终我们希望价格在未来每一时刻 t 都会上升或下降。为解决此类投资问题，我们需要更好的方法。

在本书第 5 章中我们将通过考虑来自投资的回报在时间上的连续波动来推广这些例子。正如我们将要看到的，这种连续时间方法非常有用，而且最终会非常简单。然而，它需要对随机过程有一定理解，如伊藤引理 (Ito lemma)（它实际上是关于随机过程的微分函数和积分函数的规则）。这些工具目前在经济学和金融学中的应用越来越广泛，它们提供了分析更宽范围内的投资时机和期权评价问题的便利途径。下面两章，我们为不熟悉它们的读者提供了这些工具的一个简介。

2.3 成本的不确定性

我们现在回到简单的两阶段例子中，并检验一些其他的不确定性来源。在本部分，我们将考虑投资成本的不确定性。成本的不确定性对需要花费很长时间来建设的大型项目来讲可能特别重要。例如核电厂（由于工程和管制方面的不确定性，其中的建筑总成本难以预测）、大型石化集团、新航线的

开发，以及大型的新都市建设计划等。另外，大规模并非是必不可少的。大多数的研究与开发项目涉及大量的成本不确定性，制药公司的新药开发便是一个例子。

在我们的两阶段例子的背景下，假定虚拟产品的价格现在为 200 美元，而且将永远保持为 200 美元。然而，建立虚拟产品工厂的直接成本 I 是不确定的。

我们将考虑与 I 有关的不确定性的两种不同来源。首先，由于虚拟产品工厂需要钢铁、铜以及劳动力来建造，这些建筑投入品的成本随时间随机波动，从而导致了我们将称之为投入品成本的不确定性；其次，随时间推移不能预见到的政府管制的改变可能会改变一种或多种建筑投入品的需求量。（例如，新的安全管制可能会提高劳动力需求，或者改变的环境管制可能需要更多的资本。）这样，尽管 I 现在是已知的，但其在下一年的价值是不确定的。

正如人们所期望的，这类不确定性与投资回报的未来价值 V （它产生了现在就投资而不是等待新信息的机会成本）的不确定性对投资决策有相同的影响。结果，尽管在传统测度方法下项目的净现值可能为正，但开始投资可能仍然是不经济的。

作为例子，假定 I 现在为 1 600 美元，但在下一年它将上升到 2 400 美元或下降为 800 美元，每种情况发生的概率为 0.5。跟以前一样，利率为 10%。我们是应当现在投资，还是等到下一年？如果我们现在就投资，净现值由式 (2-1) 给出，即 $-1\ 600 + 2\ 200 = 600$ （美元）。这一净现值为正，但它再次忽略了机会成本。为说明这一点，让我们重新计算净现值，但这次假定我们一直等到下一年，在这种情形下，只有当 I 下降到 800 美元时，它才是事后的最优投资。在这种情形下，净现值由式 (2-17) 给出：

$$NPV = (0.5) \left[-\frac{800}{1.1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{200}{(1.1)^t} \right] = \frac{700}{1.1} = 636 \text{ (美元)} \quad (2-17)$$

（在第 0 年没有开支和收益。在第 1 年，只有当 I 下降为 800 美元及其发生的概率为 0.5 时，我们才投资。）如果我们在决定是否投资之前等一年，项目现在的净现值为 636 美元，因此，等待明显要好于现在就投资。

在这一点上，似乎不确定性总是导致人们推迟投资，或者至少提高了投资所必须达到的最低预期资本回收率，但这并非事实。如果投资提供了信息，不确定性可以降低一个项目的最低预期资本回收率。考虑完成一个项目

中物质困难的不确定性，我们称之为技术不确定性：假定已知要素成本，最终需要多长时间、多少努力及多少材料来完成项目？此类不确定性只能通过实际操作和完成该项目才能得到解决。^[11]随着项目的进行，人们可以发现实际成本（和建筑时间）逐步分摊，这些成本可能经常比预期的高或低（随着困难的出现或者工程的实际进程快于计划进程），但是，投资总成本只有在项目完成时才能被确切地知道。

由于此类不确定性，项目可能会有一预期成本使净现值为负，但是如果成本的方差足够高，开始投资仍然可能是经济的。理由是投资揭示了关于成本的信息，从而更进一步揭示了来自投资的净回报。因此，项目包括超过了完成项目的直接贡献的一个额外值，这一额外值（被称为影子价格，因为它并不是由现金流直接测度的）降低了投资的所有预期成本。

下面的简单例子将有助于说明这一点。假定虚拟产品的当前价格和未来价格都为 200 美元，而建设一家虚拟产品工厂的成本是不确定的。为建设工厂，人们最初必须花费 1 000 美元。工厂最终被建成的概率为 0.5，但是需要额外的 3 000 美元以完成工厂建设的概率也为 0.5。由于工厂的预期成本为 $1\,000 + (0.5)(3\,000) = 2\,500$ 美元，其价值为 2 200 美元，投资的净现值看起来为负，因此建议我们不投资。但这样忽视了在完成项目阶段 1 中所获得的信息的价值以及在阶段 2 必须花费 3 000 美元时我们可以放弃项目的事实。正确的净现值为： $-1\,000 + (0.5)(2\,200) = 100$ 美元。净现值是正的，因此人们应当在阶段 1 投资。

因此，我们看到，项目成本的不确定会导致人们推迟投资或加快投资。如果不确定的解决方案独立于企业的所作所为，它与投资回报的不确定性有几乎相同的影响，并且会产生等待的激励。但是如果不确定性能通过投资得到部分解决，它会有相反的影响。我们在本书的后面章节中还将回到成本的不确定性并更详细地考察其意义。

2.4 利率的不确定性

下面假定投资成本和投资回报都被确切地掌握，但是用于贴现未来现金流的利率以不可预测的方式发生改变。利率的不确定性将如何影响投资决策呢？

49 利率的不确定性对投资决策有两种影响。第一种影响是,利率的不可预测波动可以提高投资未来回报的期望值。例如,假定投资永远产生1美元的支付性年金。这年年金的现值为 $1(\text{美元})/r$,这里 r 为利率。如果 $r=10\%$,现值为 $1(\text{美元})/0.10=10(\text{美元})$ 。但若假定 r 不确定,可能为5%或15%,每种情况的概率为0.5,因而 $E(r)=10\%$,则年金的期望值为 $0.5\left(\frac{1}{0.05}\right)+0.5\left(\frac{1}{0.15}\right)=13.3(\text{美元})>10(\text{美元})$ 。这使得投资更有吸引力,并提高了对投资的激励。^[12]

尽管如此,未来利率的不确定性仍然会导致投资的推迟,原因是利率的不确定性的第二种影响起了相反方向的作用——它创造了(为了发现利率是升还是降)等待的价值。这种影响与投资回报的不确定性的影响方式几乎相同。

为弄清这一点,让我们再回到两阶段模型例子。这一回我们假定虚拟产品的价格固定为200美元,而虚拟产品工厂的建造成本固定为2000美元,惟一的不确定性是利率。现在的利率为10%,但下一年它就会发生变化。它提高到15%的概率为0.5,它下降到5%的概率也为0.5。然后它将保持在这一新水平上。

在下一年虚拟产品工厂的价值是多少呢?如果没有利率的不确定性,即如果我们知道利率将保持在10%,则下一年工厂的价值为

$$V_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.1)^t} = 2200(\text{美元})$$

在我们的例子中,下一年及以后的利率期望值为10%,但是确切的值不清楚。因此,下一年工厂的价值为

$$V_1 = \begin{cases} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{200}{(1.15)^t} = 1533(\text{美元}), \text{概率为 } 0.5 \\ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.05)^t} = 4200(\text{美元}), \text{概率为 } 0.5 \end{cases}$$

50 因此, V_1 的期望值为 $(0.5)(1533)+(0.5)(4200)=2867$ 美元,它大于未来利率确定时的价值。

接着,我们发现(保持利率的期望值为一常数)未来利率的不确定性提高了项目的期望值。但是利率的不确定性如何影响投资决策呢?首先,注意到如果没有利率的不确定性,明显地我们现在就投资。如果我们现在就投

资，项目的净现值为

$$NPV = -2\,000 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.1)^t} = 200(\text{美元}) \quad (2-18)$$

但是如果我们等到下一年再投资，现在的净现值仅为 $\frac{2\,200}{1.1} - 2\,000 = 0$ 美元。

如果利率不确定，情形会不同。如果我们现在投资，净现值为

$$\begin{aligned} NPV &= -2\,000 + 200 + \frac{E(V_1)}{1.1} = -1\,800 + \frac{2\,867}{1.1} \\ &= 806(\text{美元}) \end{aligned} \quad (2-19)$$

(如果我们现在就投资，我们能以 200 美元制造并出售一个虚拟产品，而且我们将拥有一家下一年的期望值为 2 867 美元的工厂。) 这一净现值为正。但是，假定我们在决定是否投资之前一直等到下一年，如果利率上升到 15%，工厂的价值将只有 1 533 美元，它少于投资成本 2 000 美元。因此，如果利率下降到 5%，我们才投资。因为发生这样事情的概率为 0.5，假定我们等待的净现值为

$$\begin{aligned} NPV &= (0.5) \left[\frac{-2\,000}{1.1} + \frac{1}{1.1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.05)^t} \right] \\ &= 1\,000(\text{美元}) \end{aligned} \quad (2-20)$$

这一净现值较高，因此，最好是等待而不是现在就投资。

这是对利率不确定性的一种简单分析，但是它有一些重要的含义。第一，均值回归的利率波动将提高项目的期望值，但是也会产生等待而不是现在就投资的激励。理由是，正如未来现金流的不确定性，未来利率的不确定性产生了等待新信息的价值。第二，如果公共政策的目标是激励投资，利率的稳定性可能比利率水平更重要。导致利率降低但使它更灵活的政策最终会导致总投资支出的下降。^[13]正如我们将要在第 9 章中所要说明的，稳定性和可预测性的重要性也可以应用于其他政府政策工具，如税率和贸易政策等。

51

2.5 规模经济与灵活性

正如经济系或商学院的学生以前所学过的，规模经济是节约成本的一条重要途径。通过建造一家大车间而不是两三家小车间，企业能够降低其平均成本，提高其盈利能力。这表明，企业应当通过集中投资从而对它们产品需

求的增长作出反应，即不经常地投资于新增生产能力，而是每次都增加大型的和有效的车间。

然而，如果存在需求增长的不确定性（这是经常的），企业应当怎样做？如果企业不可逆地投资于额外的巨大生产能力，而需求增长却是缓慢的，甚至是下降的，企业会发现这占用了本身不需要的资本。因此，当需求增长不确定时，在规模经济与灵活性之间存在一种权衡，这种灵活性是根据需要更经常地投资于小额增长的生产能力而获得的。

下面是电力产业面临的一个重要问题。建造大型燃煤电厂的每单位生产能力的成本比以小额数量增加生产能力的单位成本要便宜得多。但同时，电厂在人们对其电力需求的未来增长率上面临相当大的不确定性。^[14]以小额数量增加的生产能力赋予电厂某种灵活性，但是代价却很大。因此，能够对这种灵活性定价是重要的。本书所使用的期权方法刚好适合于这样做。这里我们将利用简单例子说明这些基本观点，其中需求增长是确定的，但相对的燃料价格是不确定的。^[15]

52 考虑每年需求增长都为 100 兆瓦特（MW）的一家电厂。那么电厂必须提高其生产能力，问题是如何提高。这里有两种选择。电厂以 1.9 亿美元建造一 200MW 的的燃煤电厂（可以满足两年的需求增加）（车间 A），或者以 1 亿美元建造一 100MW 的燃油车间（车间 B）。在当前煤炭和石油价格上，并不仅仅在其资本成本（每 100MW 生产能力需 0.9 亿美元）方面，而且在营运成本方面，燃煤电厂都更经济；经营车间 A 时每 100MW 的电力成本为 1 900 万美元，而车间 B 的成本每年为 2 000 万美元。我们假定，电厂的贴现率为每年 10%，而且每一车间永远存在。在这种情形下，如果燃料价格保持不变，明显地车间 A 是更被人偏爱的选择。

然而，燃料价格不可能保持不变。由于真正起作用的是与煤炭价格相比较的燃油的相对价格（而且由于煤炭价格实际上比燃油价格更稳定），我们假定煤炭价格保持固定，而燃油价格在下一年或者上升或者下降，其概率相等，然后保持不变。如果燃油的价格上升，车间 B 的营运成本将上升到每年 3 000 万美元，但如果价格下降，营运成本将下降到每年 1 000 万美元（见图 2—7）。

53 现在车间的选择更复杂了。尽管由于其规模，车间 A 的资本成本较低，而且在当前的燃油价格水平上，其营运成本也比较低，但是车间 B 提供给工厂更多的灵活性，因为它仅仅需要对一年的需求增长承担责任——若燃油价格下跌，工厂不会在第二年被额外的 100MW 的生产能力缠住。为了决定

哪种选择是最好的，我们的计算从本年度开始，每年永远生产 100MW 的电力以及从下一年开始每年额外生产 100MW 的电力的预期成本的现值。

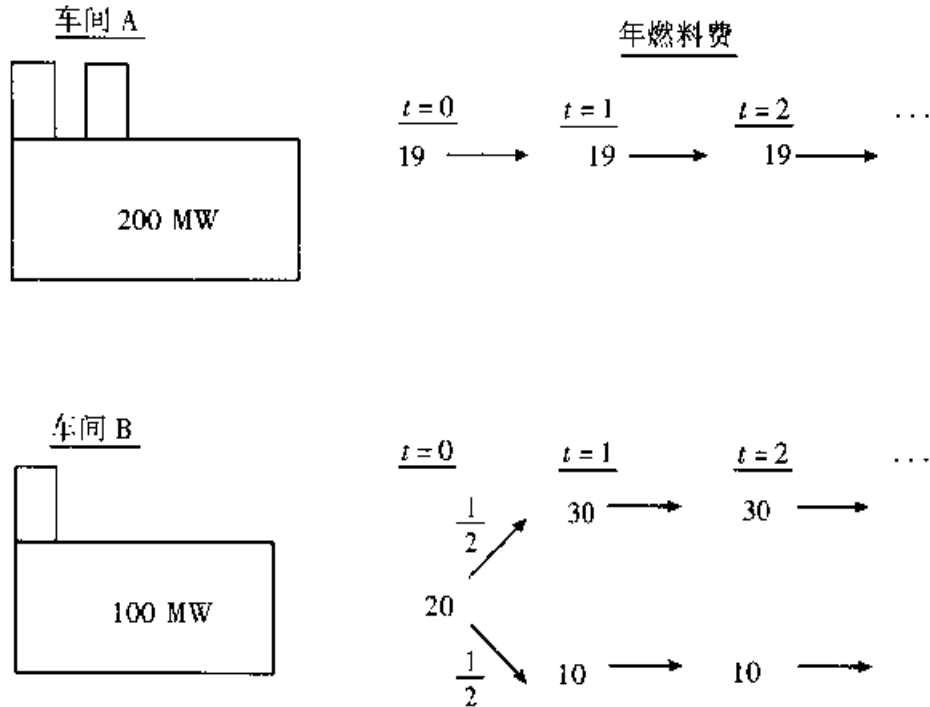


图 2—7 在电厂车间中的选择

首先，假定把 200MW 的电力全部交给燃煤或燃油车间。那么，如果我们选择煤炭，成本流的现值为

$$PV_A = 180 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{19}{(1.1)^t} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{19}{(1.1)^t} = 579(\text{百万美元}) \quad (2-21)$$

注意，180 是全部 200MW 电力的资本成本，而 19 是每 100MW 电力的年营运成本，其中第一项从现在开始计，而第二项从下一年计起。下一步，假定我们选择燃油。由于燃油的预期年营运成本为 2 000 万美元，现值为

$$\begin{aligned} PV_B &= 100 + \frac{100}{1.1} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{20}{(1.1)^t} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{20}{(1.1)^t} \\ &= 611(\text{百万美元}) \end{aligned} \quad (2-22)$$

这样，似乎车间 A 被偏爱。

但是这种计算忽略了由较小的燃油车间所提供的灵活性。假定我们现在就安装 100MW 的燃油车间，但是如果下一年燃油价格上升，我们将安装生产能力为 200MW 的燃煤车间，而不是另一个 100MW 的燃油车间。这将给我们提供总计为 300MW 的生产能力，因此，使成本比较更有意义，我们必

须净赚额外 100MW 的现值，这一在从现在开始两年才使用的现值为

$$\begin{aligned}
 PV'_B = & 100 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{20}{(1.1)^t} + \frac{1}{2} \left[\frac{100}{1.1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{10}{(1.1)^t} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{180}{1.1} - \frac{90}{(1.1)^2} - \sum_{t=1}^{\infty} \frac{19}{(1.1)^t} \right] \\
 & - 555 \text{ (百万美元)} \quad (2-23)
 \end{aligned}$$

注意到，式 (2-23) 中的第三项就是第二家 100MW 的燃油车间（只有当燃油价格下降时才会建造）的资本成本和营运成本的现值，而第四项是 200MW 的燃煤车间的头 100MW 的资本成本及营运成本的现值。算出的现值为 555 亿美元，那么安装较小的燃油车间，并因而维持灵活性就是偏好的选择。

54 评估这种灵活性的一条途径就是求出车间 A 成为被偏好的选择时，其资本成本应当降低多少。令 I_A 为车间 A 的资本成本，则车间 A 的安装与营运成本的现值为

$$I_A + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{19}{(1.1)^t} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{19}{(1.1)^t} = I_A + 399$$

通过现在安装车间 B，然后在下一年或者安装车间 A 或者车间 B（取决于燃油价格是上升还是下降），从而提供 200MW 电力的成本的现值为

$$\begin{aligned}
 & 100 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{20}{(1.1)^t} + \frac{1}{2} \left[\frac{100}{1.1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{10}{(1.1)^t} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{I_A}{1.1} - \frac{0.5I_A}{(1.1)^2} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{19}{(1.1)^t} \right] \\
 = & 320 + \frac{1}{2} (90.9 + 100) + \frac{1}{2} (0.496I_A + 190) \\
 = & 510.5 + 0.248I_A
 \end{aligned}$$

为发现使电厂对这两种选择无差异时的资本成本，令它们的现值相等，并解得 I_A ：

$$I_A + 399 = 510.5 + 0.248I_A$$

或者 $I_A^* = 1.483$ 亿美元。所以，为弥补放弃较小车间在经济上所损失的灵活性，规模经济必须非常大（一家 200MW 的燃煤车间的成本比两家 100MW 的燃油车间的成本低 75%）。

2.6 文献导引

净现值标准及其在投资决策中的应用是公司理财课程中的重要主题，这也正是我们在本书中所做研究的大多数的起点。对净现值的计算以及利用资本资产定价模型来确定风险调整的贴现率不熟悉的读者，可能想温习公司理财方面的一本标准教科书。布雷利和迈尔斯 (Brealey and Myers, 1992) 的书是很好的选择。

尽管我们在本书中基本上都忽略了税收的意义，但它会影响净现值计算中贴现率的选择。塔格特 (Taggart, 1991) 提供了用在标准的净现值模型中计算贴现率 (经过风险与税收调整的) 各种方法的评论。鲁巴克 (Ruback, 1986) 证明无风险的税后名义现金流应当用无风险的税后利率 (如国库券利率乘以 1 减去公司税率) 来贴现，而且迈尔斯和鲁巴克 (Myers and Ruback, 1992) 推导出在净现值计算中对有风险的现金流进行贴现的一种简单和大致的规则。

我们强调投资决策与金融期权的定价和执行之间的联系贯穿本书，尽管确实不必要，但对期权和期权定价技术的一些了解将对阅读本书有帮助。布雷利和迈尔斯 (Brealey and Myers, 1992) 的著作提供了一个简单的介绍；鲁宾斯坦 (Rubinstein, 1987) 和瓦里安 (Varian, 1987) 的著作也提供了一个说明性综述。更详细的处理参见考克斯和鲁宾斯坦 (Cox and Rubinstein, 1985)、霍尔 (Hull, 1989) 及加罗和拉德 (Jarrow and Rudd, 1983) 的论述。尽管有些过时，但史密斯 (Smith, 1976) 的综述也很有用。最后，关于把投资作为期权的有启发的讨论，参见凯斯特 (Kester, 1984)、梅森和默顿 (Mason and Merton, 1985)、特里乔治斯和梅森 (Trigeorgis and Mason, 1987) 的论述及科普兰、科勒和马林 (Copeland, Koller and Murrin, 1991) 书中的第 12 章。

【本章注释】

[1] 在下面所有的计算中，我们都将对结果进行四舍五入。

[2] 在这个例子中，期货价格将等于预期未来价格，因为我们假定风险是完全可分散的。(如果虚拟产品的价格与市场组合正相关，期货价格将低于未来现货价格。) 注意到，如果虚拟产品是可以储存的，而且总的存储量

为正，持有存货的边际便利收益将不得不为 10%。原因是由于期货价格等于当前现货价格，净持有成本（10% 的利息成本小于边际便利收益）必须为零。

[3] 大多数期货市场仅适用于 1 年或差不多 1 年的期限。如果存在虚拟产品的一个无限未来的期货市场，相同的套利是在未来每年卖空 1 单位虚拟产品，即卖空所有的产出流，结论是一样的。

[4] 在本例中，所有不确定性在下一年都解决了。因此，等待期权在下一年没有价值，而且在当时投资是根据传统的净现值标准作出的，等待仅与这一年有关。在后面的章节中，我们将考虑一些更一般的情形，其中不确定性从来没有被完全解决，而且等待期权总是有价值的。

[5] 如前所述，下一年投资组合的价值为 $\Phi_1 = F_1 - nP_1$ 。如果 $P_1 = 300$ 美元， $F_1 = 3\,300 - I$ ，则 $\Phi_1 = 3\,300 - I - 300n$ 。如果 $P_1 = 100$ 美元，且 I 并没有低到无论怎样我们都要投资的程度， $F_1 = 0$ 及 $\Phi_1 = -100n$ 。令每种价格情形下的 Φ_1 等于前面给出的关于 n 的方程。

[6] 也许有人认为，只有当我们在下一年的投资与价格升降无关时，立即投资才被证明是可行的。事实上，立即投资的临界值比较低。假定我们等待， $V_1 - 1\,600 = 11P_1 - 1\,600 > 0$ 时，我们将在下一年投资。因此，如果价格下降，即 $P_1 = 0.5P_0$ ，只有当 $5.5P_0 - 1\,600 > 0$ 时，或者 $P_0 > 291$ 美元，超过 $P_0^* = 249$ 美元时，我们才投资。带有直觉错误的问题是它忽略了现在投资我们在这一年才能获得的收益。实际上，对 P_0 ，假定为 260 美元，最好现在就投资，即使我们确实在等待，如果价格确实下降了，我们在下一年将不投资。

[7] 我们利用 E 表示随机变量的预期（均值），则带有脚标的 E 将隐含着预期是以当时的信息变量为条件的。类似地，我们将利用 Var 表示方差。这些符号在全书中用法一致。其他符号对每章或每节都是特定的。本书最后的符号表收集了有意义的符号并说明了它们所表示的内容。

[8] 这一“坏消息原则”首先是由伯奈克 (Bernanke, 1983) 清楚地说明的，同样的观点在丘吉尔曼 (Cukierman, 1980) 的书中也可见到。

[9] 如果当前的利润可以为负，而且企业正准备决定一项代价高的不投资或废弃的项目，坏消息原则会变成好消息原则：好转的幅度和概率是激励等待背后的驱动力。回忆我们在第 1 章中对自杀的讨论，我们将强调这一点。如果潜在的坏结果变得更坏，它不会增强立即废弃的激励。然而，如果

潜在的好结果变得更好，这将提高维持期权活动的价值。

[10] 通过重复交易从而改变其成分并保持投资组合无风险的方法被称为“动态套利策略”，这在金融经济学中非常重要。我们将在第4章和第5章在连续时间的一般假定下扩展它。

[11] 对一些项目来讲，这是一种简化，通过先进行更多的工程研究，可以减少成本的不确定性。那么投资问题更复杂了，因为人们有三种选择而不是两种：现在就建设；进行工程研究，如果研究表明成本会下降就开始建设；或者完全放弃项目。

[12] 在技术术语中，这一结论就是詹森 (Jensen) 不等式的意义，结合这样的事实，即未来现金流的现值是利率的凸函数。詹森不等式认为，如果 x 是一随机变量， $f(x)$ 为 x 的凸函数，则 $E[f(x)] > f(E[x])$ 。这样，如果 x 的期望值保持不变，但是 x 的方差增大， $E[f(x)]$ 也将增大。如果下一年利率的期望值保持固定，但价值提高的不确定性存在，下一年获得的回报的预期现金贴现值将提高。

[13] 英格索尔和罗斯 (Ingersoll and Ross, 1992) 已经发展了利率不确定条件下投资的一个连续时间模型，它推导出或多或少类似的结论。

[14] 原因不仅仅是对总电力需求增长的不确定性，还由于电厂现在经常发现它们自身在跟其他资源型的电厂进行竞争 (如 cogeneration)。

[15] 这是索希尔 (Sawhill, 1989) 所提供的例子的一个修订。

金融学前沿译丛

不确定条件下的投资

第Ⅱ篇

数学基础



第3章 随机过程和伊藤引理

59

本章和下一章提供了本书其他部分将要用到的数学工具——随机积分 (stochastic calculus)、动态规划 (dynamic programming) 及或有债权分析等 (contigent claim analysis)。

利用这些工具，我们可以用连续时间方法研究投资决策，这种方法不仅在直观上很吸引人，而且确实有效。另外，我们这里所介绍的概念和技巧正在被广泛地应用于经济与金融的各个领域，即使不考虑它们在投资问题中的应用，这些方法本身也是很值得学习的。

本章从讨论随机过程开始。我们首先讨论简单的离散时间过程，然后讨论一类重要的连续时间过程——维纳过程 (Wiener process) (或布朗运动, Brownian motion)。维纳过程是我们在本

书中建立的许多模型的基石。我们将解释维纳过程的概念与性质，并说明如何能把它从离散时间随机游动的连续极限中推导出来。然后，我们将说明维纳过程如何能推广到一类更广泛的连续时间过程，称为伊藤过程（Ito processes）。伊藤过程可以用来表示项目价值、产出价格、投入成本以及其他随时间推移随机地变动并影响投资决策的变量的动态变化过程。

我们将会看到，这些过程^①在通常的意义下不能对时间求导，即我们不能用普通微积分的计算规则来进行计算，而只能通过伊藤引理来进行。伊藤引理有时被称为随机积分的基本定理，是一个重要的结论，它使我们可以对随机过程的函数进行微分和积分。在本书中我们提供了伊藤引理的一种直观推导，并通过大量例子展示它如何用于维纳过程函数的简单运算。另外，我们还会看到伊藤引理如何用于随机微分方程的推导。接下来，我们还将介绍跳跃过程，即一类有不频繁的离散跳跃而不是连续波动的过程^②，并说明如何利用伊藤引理的另一种形式来对它进行分析。最后，在本章附录中，介绍了柯尔莫哥洛夫方程（Kolmogorov equation），它描述了随机过程概率密度函数的动态变化。我们也介绍了柯尔莫哥洛夫方程的应用。

3.1 随机过程

随机过程指与时间有关的一簇变量，在每一时刻其取值都是随机的。以波士顿城区的气温为例：气温随时间推移的变化中有一部分是确定的（气温在白天上升而在晚上下降，夏天时上升而冬天时下降等）；而有一部分变化是随机而不可预测的。^③[1] IBM公司的股票价格是另一个例子：价格波动是随机的，但从长期来看，它又具有正的期望增长率以便能补偿投资者持有该股票的风险。

更正式地说，随机过程可由变量 x 随时间 t 变化的值 x_t 的概率分布来定义。因此，对给定的时间 $t_1 < t_2 < t_3$ 等，我们给出或能够算出 x_1, x_2, x_3 的相应值在某一定范围内的概率，如

① 可以看成关于时间 t 的随机函数，在时间 t 固定时为一个随机变量。——译者注

② 这类过程和前面提到的具有连续变化的过程不同。——译者注

③ 如在某一天某一时刻的气温。——译者注

$$P(a_1 < x_1 \leq b_1, a_2 < x_2 \leq b_2, \dots)$$

当时刻 t_1 到来时, 观察到的实际值为 x_1 , 我们可在现有信息 (即 t_1 时刻取值为 x_1) 的条件下通过条件概率来计算未来事件发生的概率。^[2]

波士顿的气温和 IBM 的股票价格是随机过程的两个极不相同的例子。波士顿的气温是一个平稳过程 (stationary process)。大致来讲, 该变量 (气温) 的统计性质在相当长时间内不发生变化。^[3] 例如, 尽管明天的预期气温会部分依赖于今天的气温, 明年 1 月 1 日气温的期望和方差与今天的气温基本上是独立的, 并且它也与两年以后、三年以后 1 月 1 日气温的期望和方差相等。而 IBM 的股票价格是一个非平稳随机过程 (nonstationary stochastic process), 该价格的期望值会毫无边界地提高, 我们后面将会看到 T 年后价格的方差是随着 T 的延长而增大的。

波士顿的气温和 IBM 的股票价格都是连续时间的随机过程, 这是指时间指标 t 是一个连续的变量 (即使我们只能在离散的时间点去测量温度或股票价格, 但这些变量是随时间而连续变化的)。尽管本书的工作大部分是在考虑连续时间的随机过程, 但我们会从一些离散时间过程的例子出发。离散时间过程是指变量的变化仅在离散的时间点才发生, 但 x_t 在逻辑上的所有可能取值 (通常称为状态) 可以是离散的也可以是连续的。一般来讲, 我们在前面的定义足以包括所有这些可能性。

随机过程的一个最简单的例子是离散时间、离散状态的随机游动。设 x_t 始于已知值 x_0 , 在时刻 $t=1, 2, 3, \dots$ 它分别以 $\frac{1}{2}$ 的概率发生向上或向下的跳跃, 跃度均为 1。因为跳跃相互之间都是独立的, 我们可以用式 (3-1) 来描述 x_t 在时刻 t 的动态变化:

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t \quad (3-1)$$

式中, ϵ_t 为随机变量, 其概率分布为

$$\text{prob}(\epsilon_t = 1) = \text{prob}(\epsilon_t = -1) = \frac{1}{2} \quad (t=1, 2, \dots)$$

我们称 x_t 为离散状态过程, 因为它只能取离散的值。^① 例如, 若 $x_0=0$, 当 t 为奇数时, x_t 的可能取值为 $(-t, \dots, -1, 1, \dots, t)$; 当 t 为偶数时, x_t 的可能取值为 $(-t, \dots, -2, 0, 2, \dots, t)$ 。 x_t 的概率分布可由二项分布导出。对 t 次跳跃, 其中有 n 次向下, 而 $t-n$ 次向上的概率为

① 如 $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ——译者注

$$\binom{t}{n} 2^{-t}$$

因此, x_t 取值为 $t-2n$ 的概率为

$$\text{prob}(x_t = t - 2n) = \binom{t}{n} 2^{-t} \quad (3-2)$$

在下一节, 我们将利用这个分布来导出维纳过程作为离散时间随机游动的连续极限。但是, 在这里, 注意到 x_t 的可能取值范围和方差会随 t 的增加而增加, 因此, x_t 是一个非平稳的过程。

因为 x_t 向上或向下跳跃的概率都为 $\frac{1}{2}$, 故 $t=0$ (假设 $x_0=0$) 时, 对所有的 t , x_t 的期望值为零。(同样地, 在时刻 t 时, 对未来时刻 $T(>t)$, x_T 的期望为 x_t 。) 推广这个过程的一种方法是改变向上或向下跳跃的概率。令 p 为发生向上跳跃的概率, $q=1-p$ 为向下跳跃的概率, 并且 $p>q$ 。这样的过程我们称之为带漂移的随机游动: 在时刻 $t=0$, 对未来时刻 $T>0$, x_t 的期望值大于零, 并且随 T 的增加而增加。

对这个过程的另一种推广是考虑在任一时刻 t 的跃度为一连续随机变量。例如, 我们令跃度为一服从均值为 0、标准差为 σ 的随机变量, 这时, 我们称 x_t 为离散时间连续状态的随机过程。

另一个离散时间连续状态随机过程的例子是一阶自回归过程 (first-order autoregressive process), 简记为 AR (1)。可由式 (3-3) 给出:

$$x_t = \delta + \rho x_{t-1} + \zeta_t \quad (3-3)$$

式中, δ 和 ρ 为常数, $-1<\rho<1$, 并且 ζ_t 服从均值为 0 的正态分布。这个过程是平稳的, 并且 x_t 的长期期望值为 $\frac{\delta}{1-\rho}$, 而与其当前值无关。(这个长期均值可通过令式 (3-3) 中 $x_{t+1}=x_t=x$ 并对 x 求解而得到。) AR (1) 过程经常也被称为均值回归过程, 因为 x_t 趋向于恢复到它的长期期望值。在本章后面我们将考虑该过程在连续时间的情形。

随机游动 (包括离散状态或连续状态, 有漂移或无漂移的) 和 AR (1) 过程都满足马尔可夫性 (Markov property), 因而被称做马尔可夫过程 (Markov process)。马尔可夫性是指变量 x_{t+1} 的概率分布仅依赖于 x_t , 而与 t 以前的状态或信息无关。如在由式 (3-1) 描述的随机游动中, 若 $x_t=6$, 则 x_{t+1} 分别以 $\frac{1}{2}$ 的概率等于 5 或 7。一旦我们知道了 x_t 的值, 那么 x_{t-1}, x_{t-2}, \dots

的值对 x_{t+1} 的分布就是无关的。马尔可夫性是随机过程研究中一种非常重要的性质，因为它能极大地简化对随机过程的分析。我们转到连续时间过程时会很快认识到这一点。

3.2 维纳过程

维纳过程（又称为布朗运动）是一个连续时间过程，它具有三个重要性质。^[4] (1) 它是一个马尔可夫过程。正如前面所解释的，该过程的所有未来值的概率只取决于其当前值，而不受该过程在过去的取值或其他当前信息的影响，因此，该过程的当前值就是作出其未来值最佳预测中所需的全部信息。(2) 维纳过程具有**独立增量** (independent increments)。这表示该过程在任一时间区间上变化的概率分布独立于其在任一（不相交）的其他时间区间上变化的概率。^① (3) 维纳过程在任何有限时间区间上的变化服从正态分布 (normally distributed)，其方差随时间区间的长度呈线性增加。

马尔可夫性是维纳过程的一个十分重要的性质，它表明为预测过程的未来路径，只有当前的信息是有用的。股票价格经常被模型化为马尔可夫过程，这是因为公开的信息会很快地反映到股票价格中，因此过去的股票价格没有预测价值。（这里所描述的市场情况通常被称为弱市场有效性。如果弱市场有效性不成立，投资者可以通过技术分析来“击败市场”，即利用过去的股票价格模式来预测其未来价格。）维纳过程具有独立增量性，这一事实表示我们可以把它看做随机游动的连续时间版本，这种观点下面还会阐述。

上面所提到的三个性质（马尔可夫性、独立增量性以及增量的正态性）似乎限制太强，它表明现实世界中很少有变量能用维纳过程来被真实地模型化。例如，尽管假定股票价格满足马尔可夫性及独立增量性可能是合理的，但假定股票价格变化服从正态分布却并不合理，毕竟我们知道股票价格永远不会下降到低于零。更合理的假设是股票价格的变化服从对数正态分布，即价格取对数之后的变化服从正态分布^[5]。但这恰好表示股票价格的对数可模型化为维纳过程，但股票价格本身并不是维纳过程。我们后面将会看到，

^① 即在不相交的时间区间上，过程的增量相互独立。例如，若 $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ，则 $x(t_2) - x(t_1)$ 与 $x(t_4) - x(t_3)$ 相互独立。——译者注

通过适当的变换, 维纳过程可以用做对随时间连续 (或几乎连续) 变化的一大批相当广泛的随机变量建模的基石。

用更标准的语言来重述维纳过程的三个性质是十分有用的。假设 $z(t)$ 为维纳过程, 在时间区间 Δt 上 z 的任何变化都记为 Δz ^①, 它满足下列条件:

(1) Δz 和 Δt 满足下列关系:

$$\Delta z = \epsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

式中, ϵ_t 为均值为 0、标准差为 1 的正态分布的随机变量。

(2) 随机变量 ϵ_t 是序列不相关的, 即 $E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0$, 对一切 $t \neq s$ 成立, 故 Δz 在任意两个不同的时间区间上是相互独立的。(由此可推出 $z(t)$ 服从马尔可夫性和独立增量性。)

我们来考察这两个条件对 $z(t)$ 在某一有限区间 T 上的变化的影响。我们将该区间分为长为 Δt 的 n 个小区间, 即 $n = \frac{T}{\Delta t}$ 。则 $z(t)$ 在该区间上的变化由式 (3-4) 给出:

$$z(s+T) - z(s) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (3-4)$$

式中, ϵ_i 相互独立。由中心极限定理, 我们可以证明该和 (即 $z(s+T) - z(s)$) 服从均值为 0、方差为 $n\Delta t = T$ 的正态分布。^② 其中最后一点是非常重要的, 它来自这样一个事实, 即 Δz 取决于 $\sqrt{\Delta t}$ 而不是 Δt ; 维纳过程中变化的方差随时间区间的长度线性增长。

65 这个性质我们后面将不断地用到。最后, 注意维纳过程是非平稳的随机过程, 长期来看其方差将趋于无穷。

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 维纳过程在时间区间无穷小时的增量 dz 可表示为

$$dz = \epsilon_t \sqrt{dt} \quad (3-5)$$

因 $\epsilon_t \sim N(0, 1)$, 故 $E(dz) = 0$, $\text{Var}(dz) = E[(dz)^2] = dt$ 。然而, 注意到在普通微积分的意义下, 维纳过程是不能对时间求导的。因为 $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \epsilon_t (\Delta t)^{-\frac{1}{2}}$,

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta z}{\Delta t} \rightarrow \infty$, 故导数不存在。

在实际中我们有时会遇到两个或两个以上的维纳过程, 这时, 我们对它

① 即 $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$ 。——译者注

② 因为 $z(t)$ 在区间 T 上的变化分解为一些独立同分布的随机变量的和, 并且这些随机变量的期望和方差均有限。——译者注

们之间的协方差感兴趣。假定 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 为维纳过程，则我们记 $E(dz_1 dz_2) = \rho_{12} dt$ ，其中 ρ_{12} 为两个过程的相关系数 (coefficient of correlation)。由于维纳过程在单位时间上的方差和标准差都为 $\frac{E[(dz)^2]}{dt} = 1$ ，所以 ρ_{12} 也是这两个过程在单位时间上的协方差。^[6]

3.2.1 带漂移的布朗运动

我们前面提到维纳过程可以很容易地推广到更复杂的一些过程。对式 (3-5) 最简单的推广就是带漂移的布朗运动：

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad (3-6)$$

式中， dz 为前面定义过的维纳过程的增量； α 为漂移参数； σ 为方差参数。注意，在任何时间区间 Δt 上， x 的变化表示为 Δx ，服从均值为 $E(\Delta x) = \alpha \Delta t$ ，方差为 $\text{Var}(\Delta x) = \sigma^2 \Delta t$ 的正态分布。

图 3—1 显示了式 (3-6) 表示的布朗运动的三条样本路径，其中 $\alpha = 0.2$ ，标准差 $\sigma = 1.0$ 。图形是以年为单位显示的 (1950—2000 年)，产生每条样本路径所使用的时间区间 Δt 为 1 个月，利用式 (3-7) 计算 x_t 的样本路径。

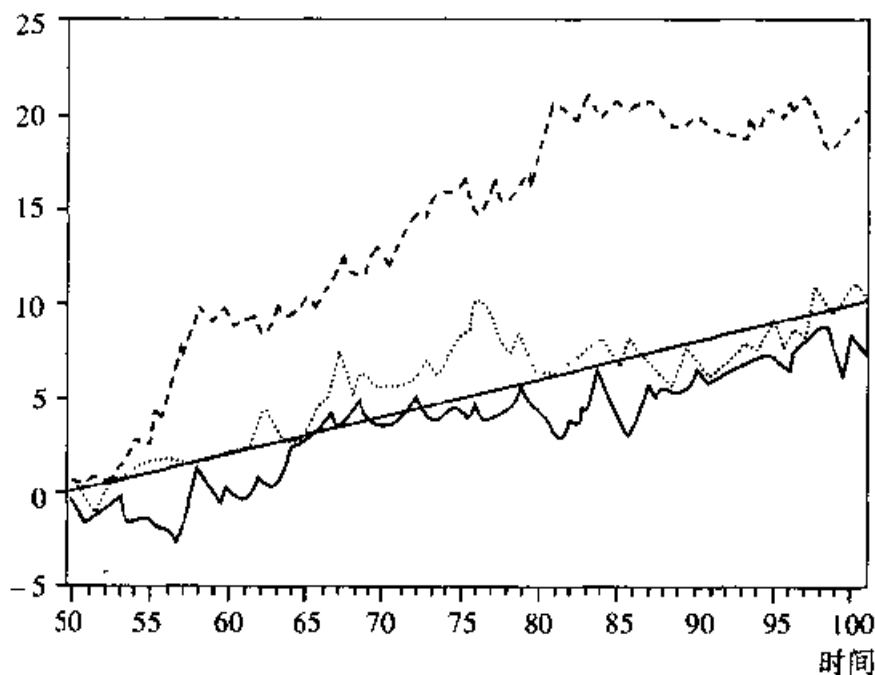


图 3—1 带漂移的布朗运动的样本路径

$$x_t = x_{t-1} + 0.01667 + 0.2887\epsilon_t \quad (3-7)$$

66 式中 $x_{1950} = 0$ 。在式 (3-7) 中, 对任意时刻 t , ϵ_t 服从标准正态分布 (注意式 (3-7) 中的参数 α , σ 是以月为单位的, 每年 0.2 的增长趋势表明每月的增长趋势是 0.016。每年有 0.1 的标准差表明每年的方差也是 0.1, 故每月的方差为 $\frac{1}{12} = 0.0833$, 因此, 每月的标准差为 $\sqrt{0.0833} = 0.2887$)。图中所示的趋势线是式 (3-7) 中 $\epsilon_t = 0$ 时的直线。

图 3-2 显示了对同一随机过程的最优预测。其中, 样本路径产生的是从 1950—1970 年末, 同样采用式 (3-7), 所构造的 $x(t)$ 的预测是从 1975—2000 年。(为了比较预测效果, 我们同样产生了该随机过程从 1970—2000 年的样本路径。) 由于布朗运动的马尔可夫性, 我们仅需要 x_t 在 1974 年 12 月的值来进行后面的预测。1974 年 12 月以后第 T 月的预测值为

$$\hat{x}_{1974+T} = x_{1974} + 0.01667T$$

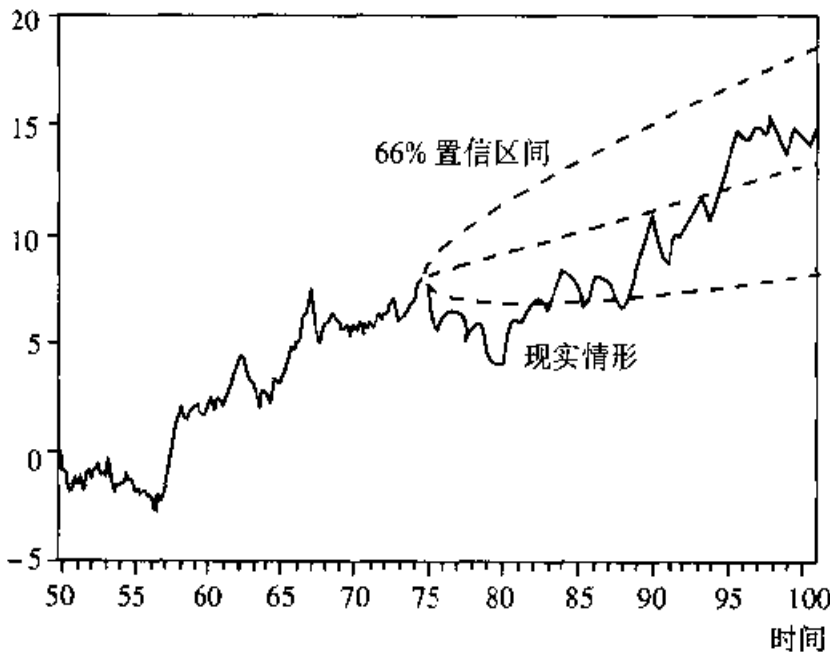


图 3—2 带漂移的布朗运动的最优预测

67 图形同样显示了预测值的 66% 置信区间, 也就是 $x(t)$ 的预测路径加上或减去一个标准差。($x(t)$ 的 95% 置信区间为预测路径加上或减去 1.96 倍标准差。) 又因为维纳过程的方差是随时间期限而线性增长的, 故其标准差是随时间期限 t 以 \sqrt{t} 的速度增长的。因此, T 月后 66% 的置信区间为

$$x_{1974} + 0.01667T \pm 0.2887\sqrt{T}$$

读者可用同样的方法构造 95% 或 90% 的置信区间。

由图 3—1 和图 3—2 可以看出, 从长期来看, 趋势项是布朗运动的主要决定因素, 而在短期内, 过程的波动决定了布朗运动。这正是下述事实的意义: $x_t - x_0$ 的均值为 at , 其标准差为 $\sigma\sqrt{t}$; 当 t 很大时, $\sqrt{t} \ll t$, 故过程主要由 t 的系数决定; 而当 t 很小时^①, $\sqrt{t} > t$, 这时过程主要由 \sqrt{t} 的系数决定。考虑 $a > 0$ 时 $x_t < x_0$ 的概率也可以证明这一点: 对很大的 t , 这个概率非常小; 而对很小的 t , 这个概率接近 $\frac{1}{2}$ 。

带漂移的布朗运动是一个非常简单却又十分重要的随机过程, 因此有必要清楚地掌握它。在这里, 维纳过程的定义及其在式 (3-6) 中所推广的性质好像显得有些随意。例如, 为什么 dx 依赖于 \sqrt{dt} 而不直接依赖于 dt ? x 在任一有限区间上的预期变化服从正态分布是否合理? 使式 (3-6) 及其性质更加生动有趣的方式是说明它如何与离散时间的随机游动联系在一起。下面我们来叙述这一问题。

3.2.2 布朗运动的随机游动表示

68

本节我们将说明式 (3-6) 如何能从离散时间的随机游动的连续极限中推导出来。^[7]为说明这一点, 我们将时间 t 按长度 Δt 分解为 $\frac{t}{\Delta t}$ 个时间区间。假设在每一时间区间中变量 x 增加或减少数量 Δh , x 增加的概率为 p , 减少的概率为 $1-p$ 。假设初始点为 x_0 , 图 3—3 显示了 x 在三个阶段中每一阶段的可能取值。对 t 和 x 的每种可能组合, x_t 达到某点的概率同样标在了图中。注意到从每一阶段到下一阶段, 随机变量 Δx 的可能取值为 $\pm \Delta h$ 。并且 x 还是一个具有独立增量的马尔可夫过程。这是因为 x 的未来取值的概率分布仅依赖于其当前取值, 并且在每一阶段内, x 增加或减少的可能性独立于前一阶段所发生的情形。

下面我们考察 x 在未来取值的分布。首先注意 Δx 的均值为 $E(\Delta x) = (p-q)\Delta h$, 并且有

$$E[(\Delta x)^2] = p(\Delta h)^2 + q(-\Delta h)^2 = (\Delta h)^2$$

^① 如 $0 < t < 1$ 。——译者注

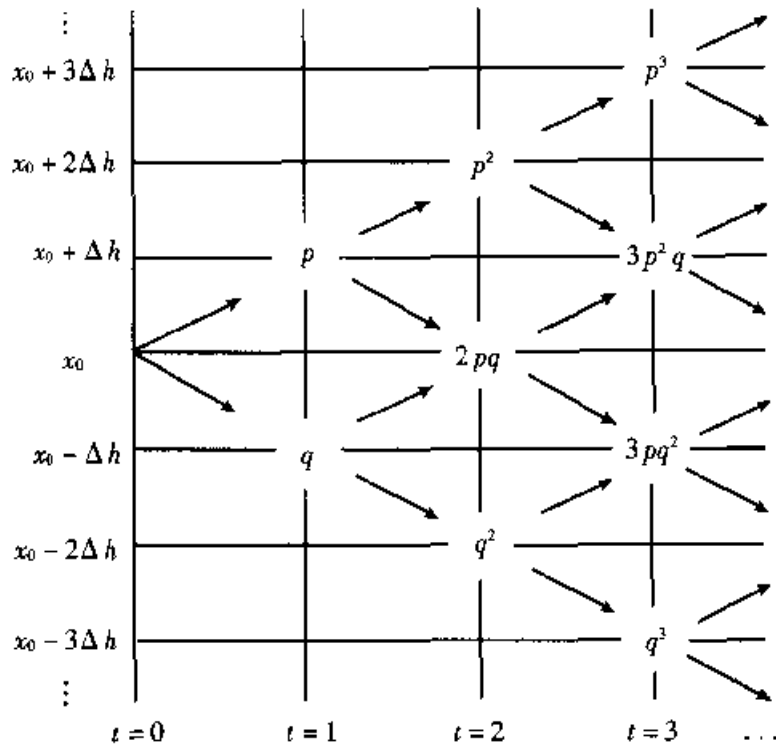


图 3—3 布朗运动的随机游动表达式

因此, Δx 的方差为

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Delta x) &= E[(\Delta x)^2] - (E[\Delta x])^2 \\ &= [1 - (p - q)^2](\Delta h)^2 \\ &= 4pq(\Delta h)^2 \end{aligned} \quad (3-8)$$

长度为 t 的时间区间有 $n = \frac{t}{\Delta t}$ 个离散步骤。因为随机游动的连续步骤相互之间是独立的, 累积变化 $x_t - x_0$ 服从二项分布, 其均值为

$$n(p - q)\Delta h = t(p - q)\frac{\Delta h}{\Delta t}$$

其方差为

$$n [1 - (p - q)^2] (\Delta h)^2 = \frac{4pqt (\Delta h)^2}{\Delta t}$$

为解释这一点, 考虑由 n 次独立试验组成的序列, 其中试验成功记作 1, 发生概率为 p ; 试验失败记作 0, 发生概率为 $q = 1 - p$ 。 n 次试验中成功的次数服从均值为 np 、方差为 npq 的二项分布 (Feller, 1968, p.223, p.238)。上面的表述是可以类比的。例如, 若把成功记作 Δh , 将失败记作 $-\Delta h$, 则在 $[0, t]$ 时间内方差为 $4(\Delta h)^2$ 乘以一般二项式的方差。

迄今为止, 概率 p 和 q 与增量 Δh 和 Δt 都是任意选取的。这里, 我们希望令 $\Delta t \rightarrow 0$ 。这样做是希望 $x_t - x_0$ 的均值和方差保持不变, 且独立于 p , q , Δh 和 Δt 的特定选择。另外, 我们将以极限形式得到式(3-6)。我们可以确保这就是事实。若令

$$\Delta h = \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (3-9)$$

及

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right) \\ q &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3-10)$$

那么

$$p - q = \frac{\alpha}{\sigma} \sqrt{\Delta t} = \frac{\alpha}{\sigma^2} \Delta h$$

将 Δh 和 $p - q$ 的这些表达式代入前面关于 $x_t - x_0$ 的均值和方差的公式, 并令 $\Delta t \rightarrow 0$ 。对任一有限的 t , 随机游动的步骤 n 将趋于无穷, 则该二项分布将收敛于一个正态分布, 该正态分布的均值为

$$t \frac{\alpha}{\sigma^2} \Delta h \frac{\Delta h}{\Delta t} = \alpha t$$

其方差为

$$t \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^2 \Delta t \right] \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta t} \rightarrow \sigma^2 t$$

这些, 实际上正是我们所需要的有关布朗运动的价值, α 为其单位时间内的漂移, σ^2 为其单位时间内的方差。在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时取极限, $x_t - x_0$ 的均值和方差都独立于 Δh 和 Δt 。

那么, 我们看到, 当时间区间和步长一同趋于零而保持式(3-9)中的关系时, 布朗运动是随机游动的一种极限。更进一步, Δh 和 Δt 之间的这种联系并不是任意的; 这是保持 $x_t - x_0$ 的方差仅取决于 t 而不取决于步骤数量的唯一途径。因此, 为什么在式(3-6)中 dx (通过 dz) 取决于 dt 的平方根而非 dt 现在就很清楚了; 为什么 x 在有限时间段内的变化是正态分布现在也应当很清楚了, 因为步骤数量变得很大时, 二项分布趋近于正态分布。

布朗运动有一个有趣的性质: 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 在任何一个有限时间区间内, 服从布朗运动的粒子经过的轨迹的长度为无穷大。实际上这可由 Δh 和 Δt 的联系中得到。因 $|\Delta x| = \Delta h$ (确定), $E(|\Delta x|) = \Delta h$, 在长为 t 的时间区

间内，粒子经过路径的预期总长度为

$$n\Delta h = t \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta t}}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，上面的式子将趋近于 ∞ 。类似地， $\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \pm \infty$ ，取决于 $\Delta x = +\Delta h$ 或 $-\Delta h$ 。那么布朗运动的样本路径必定包含许多向上和向下的运动，这看起来非常像锯齿。这样的路径是不可微的，即 $\frac{dx}{dt}$ 不存在，当然也不能提供 $E\left(\frac{dx}{dt}\right)$ 。但 $E(dx)$ 一般来说是存在的，因此， $E\left(\frac{dx}{dt}\right)$ 也是存在的。

3.3 广义布朗运动——伊藤过程

71 维纳过程可用做对许多广泛的随机变量建模的基石。我们将考察一些例子，它们都是我们前一节所研究过的带漂移的布朗运动的推广的情形。其形式为

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (3-11)$$

式中， dz 为维纳过程的增量； $a(x, t)$ 和 $b(x, t)$ 为已知的（非随机的）函数。这里的漂移系数和方差系数是当前状态和时刻的函数。由式（3-11）所表示的连续时间随机过程 $x(t)$ 称为伊藤过程。

考虑伊藤过程增量的均值与方差，因 $E(dz) = 0$ ，故 $E(dx) = a(x, t)dt$ ， dx 的方差为 $E[dx^2] - E(dx)^2$ ，其中含有 dt ， $(dt)^2$ 和 $(dt)(dz)$ （由式（3-5）知其阶为 $(dt)^{\frac{3}{2}}$ ）项。对无穷小的 dt ，含 $(dt)^2$ 和 $(dt)^{\frac{3}{2}}$ 的项可忽略不计，故阶为 dt 的项的方差为

$$\text{Var}(dx) = b^2(x, t)dt$$

我们将 $a(x, t)$ 看做伊藤过程的瞬间期望漂移率（drift rate），而 $b^2(x, t)$ 则看做方差的瞬间变动率（variance rate）。

3.3.1 几何布朗运动

式（3-11）的一个重要的例子是带漂移的几何布朗运动，即 $a(x, t) = \alpha x$ ， $b(x, t) = \sigma x$ ，其中 α, σ 均为常数。这时式（3-11）变为

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad (3-12)$$

从对式(3-6)中的简单布朗运动的讨论中,我们知道 x 的变化率 $\frac{\Delta x}{x}$ 服从正态分布。由于变化是 x 的自然对数的变化,因此, x 的绝对变化 Δx 服从对数正态分布(lognormally distributed)。

在这里, x 与其对数在某种程度上有着更复杂的关系。在下一节,我们将证明若 $x(t)$ 由式(3-12)给出,则 $F(x) = \log x$ 服从下面的带漂移的简单布朗运动:

$$dF = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz \quad (3-13)$$

因而在有限时间区间 t 上, $\log x$ 的变化服从均值为 $\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t$,方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布。对于 x 自身,可以证明,若当前的 $x(0) = x_0$,则 $x(t)$ 的期望值为

$$E[x(t)] = x_0 e^{\alpha t}$$

$x(t)$ 的方差为^[8]

$$\text{Var}[x(t)] = x_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

关于几何布朗运动的期望的结果可用来计算 $x(t)$ 在一段时间内的期望贴现值。例如,若贴现率 r 超过增长率 α ,我们有

$$E\left[\int_0^{\infty} x(t) e^{-rt} dt \right] = \int_0^{\infty} x_0 e^{-(r-\alpha)t} dt = \frac{x_0}{r-\alpha} \quad (3-14)$$

这是一个有用的公式。后面章节中将证明这一结果非常有用。我们将用它来计算服从几何布朗运动的利润流的贴现值。

几何布朗运动常用于构造证券价格、利率、工资率、产出价格以及其他经济和金融变量的模型。图3-4显示了式(3-12)的三条样本路径,其漂移率 $\alpha = 0.09$,即每年变动9%;标准差 $\sigma = 0.2$,即每年变动20%。选择这些参数的原因是它们近似于纽约股票交易指数每年的预期增长率和标准差变动率。与图3-1一样,在产生样本路径时所选择的时间长度 Δt 为1个月,则 $x(t)$ 可用式(3-15)来计算:

$$x_t = 1.0075 x_{t-1} + 0.0577 x_{t-1} \varepsilon_t \quad (3-15)$$

式中, $x_{1950} = 100$,在每一时刻来自均值为0、方差为1的正态分布。图中还显示出趋势线,即 $\varepsilon_t = 0$ 时的式(3-15)。注意到这些样本路径中有一条显示股票市场的表现超过了其预期增长率,但是其他两条的表现则明显低于预期增长率。

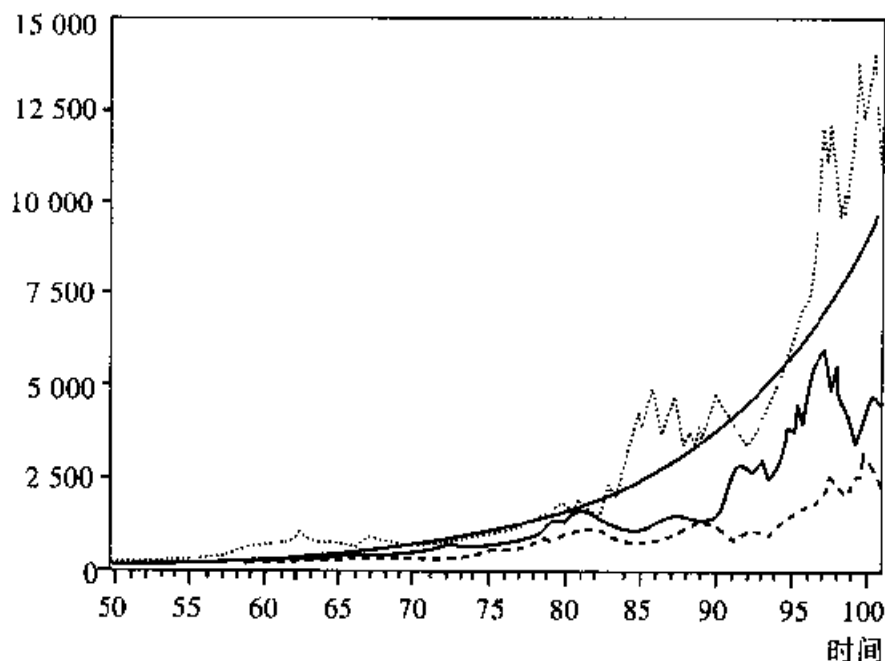


图 3—4 几何布朗运动的样本路径

图 3—5 显示了该过程的最优预测。与以前一样，产生的样本路径是从 1950—1974 年末， $x(t)$ 的预测建立在 1975—2000 年的状态之上。为进行比较，图中还显示了现实情况，即样本路径的延拓。由马尔可夫性，我们仅需要 $x(t)$ 在 1974 年 12 月的值来进行预测。 x 的预测值由下式给出：

$$\hat{x}_{1974+T} = (1.0075)^T x_{1974}$$

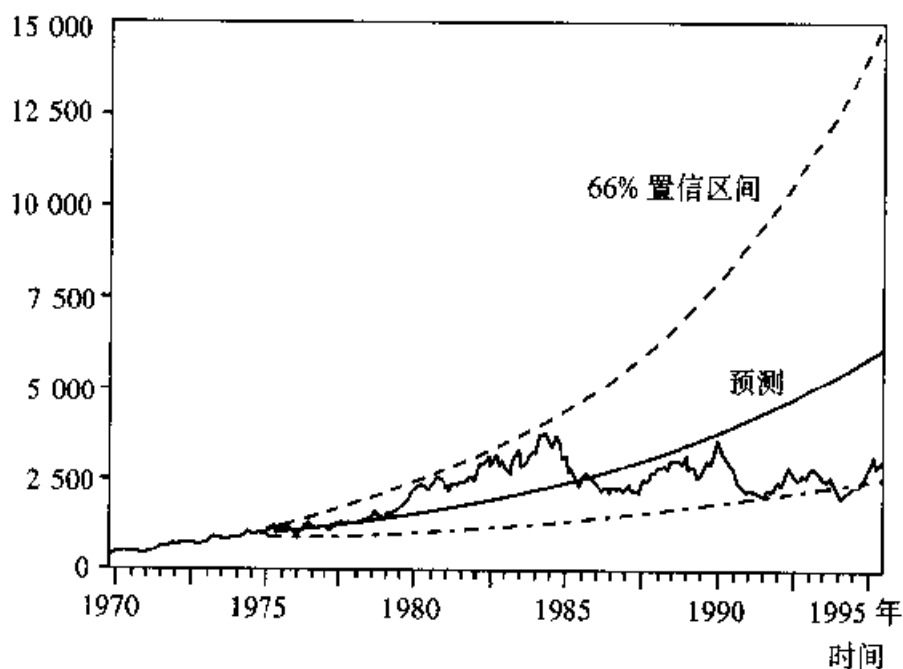


图 3—5 几何布朗运动的最优预测

式中, T 为从 1975 年 1 月开始所经过的月数。图中还给出了置信度为 66% 的预测置信区间。因 x 的变化率的标准差与 \sqrt{t} 成正比, 我们可给出该置信区间的上下限:

$$(1.0075)^T (1.0577)^{\sqrt{T}} x_{1974} \sim (1.0075)^T (1.0577)^{-\sqrt{T}} x_{1974}$$

这个预测区间是很宽的。对图中所示的这一样本路径, 股票市场的实际表现差于其预测值。

3.3.2 均值回归过程

如图 3—1 和图 3—4 所示, 布朗运动的样本路径趋于背离其出发点。这一性质对某些经济变量(如投机的资产价格)是现实的, 但对别的经济变量却不一定成立, 如铜、原油等某些原材料的价格等。尽管这些商品的价格经常被模型化为几何布朗运动, 但这些价格以某种方式与长期边际生产成本相联系。换句话说, 尽管在短期内石油价格会随机地上下波动(作为对石油输出国中的战争或革命的反应而变动, 或作为对欧佩克(石油输出国组织)卡特尔的巩固或削弱的反应而变动)。但从长期来看, 石油价格将回到生产石油的边际成本。因此, 石油价格应该模型化为均值回归(mean-reverting process)过程。

最简单的均值回归过程——O-U 过程 (Ornstein-Uhlenbeck process) 可用式 (3-16) 来表示:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (3-16)$$

式中, η 为向均值回归的速度; \bar{x} 为 x 的“正常”水平, 即 x 所要回归的值(若 x 是商品价格, 则 x 可能是生产该商品的长期边际成本)。注意到 x 的预期变化取决于 x 与 \bar{x} 之间的差异, 若 $x > \bar{x}$ ($< \bar{x}$), 则在下一段时间内 x 更容易下跌(上涨)。由此可知, 尽管 O-U 过程满足马尔可夫性, 但并不具有独立增量性。

若 x 的当前值为 x_0 , $x(t)$ 服从式 (3-16), 则 x 在未来任一时间 t 的期望值为

$$E(x_t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t} \quad (3-17)$$

另外, $x_t - \bar{x}$ 的方差为

$$\text{Var}(x_t - \bar{x}) = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta t}) \quad (3-18)$$

(式 (3-17) 和式 (3-18) 的推导参见本章附录。) 从这些公式可以看出,

当 t 变大时, x_t 的期望值收敛于 \bar{x} , 其方差收敛于 $\frac{\sigma^2}{2\eta}$ 。此外, 当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $\text{Var}(x_t) \rightarrow 0$ 。这表示 x 将永远不会偏离 \bar{x} 。最后, 当 $\eta \rightarrow 0$ 时, x 成为简单布朗运动, 且 $\text{Var}(x_t) \rightarrow \sigma^2 t$ 。

对不同的 η 值, 图 3—6 显示了式 (3-16) 的四条样本路径。在每种情形下 (以月为单位), $\sigma=0.05$, $\bar{x}=1$, $x(t)$ 的初始值 $x_0=1$ 。第一条路径的 $\eta=0$, 对应于无漂移的简单布朗运动。注意, 此时 $x(t)$ 趋向于远离其初始值。其他几条样本路径对应于 $\eta=0.01, 0.02$ 和 0.5 。注意, η 越大, x_t 越不会背离 \bar{x} 。当 $\eta=0.5$ 时, $x(t)$ 仅在 \bar{x} 附近做短期小距离漂移。

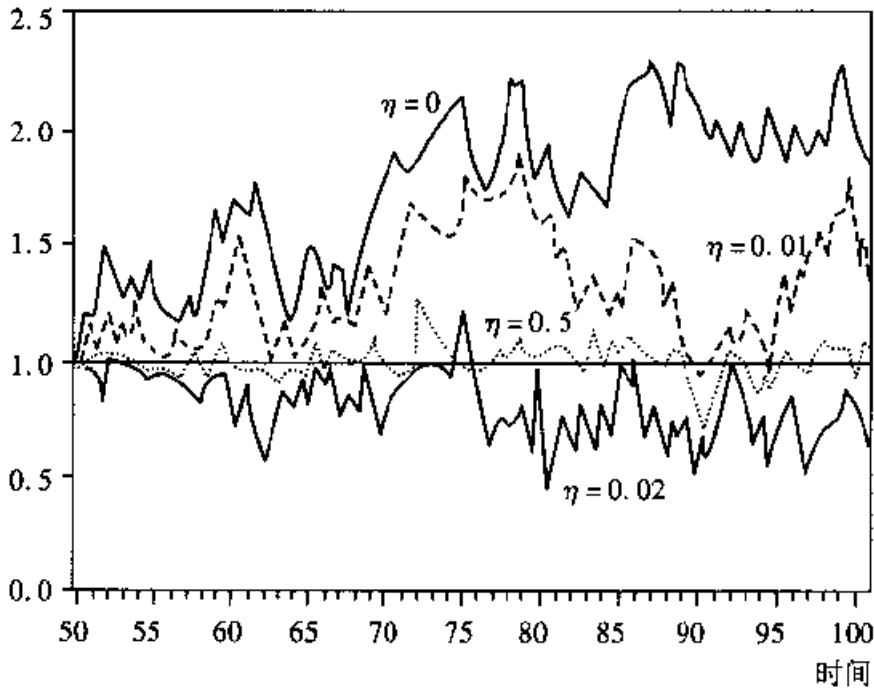


图 3—6 均值回归过程的样本路径: $dx = \eta (\bar{x} - x) dt + \sigma dz$

图 3—7 显示了 $\eta=0.02$ 时该过程的最优预测。图中的样本路径产生于 1950—1980 年底, x_t 的预测值是从 1981—2000 年。为进行比较, x_t 在 1981—2000 年的样本路径也同样显示出来。图中也显示了预测的 66% 的置

76 信区间。注意到经过四五年之后, 预测的方差收敛到 $\frac{\sigma^2}{2\eta} = \frac{0.0025}{0.04} = 0.0625$, 因此, 66% 的预测区间 (即预测值 \pm 一个标准差) 收敛到预测值 $\hat{x} \pm \sqrt{0.0625} = \hat{x} \pm 0.25$ 。

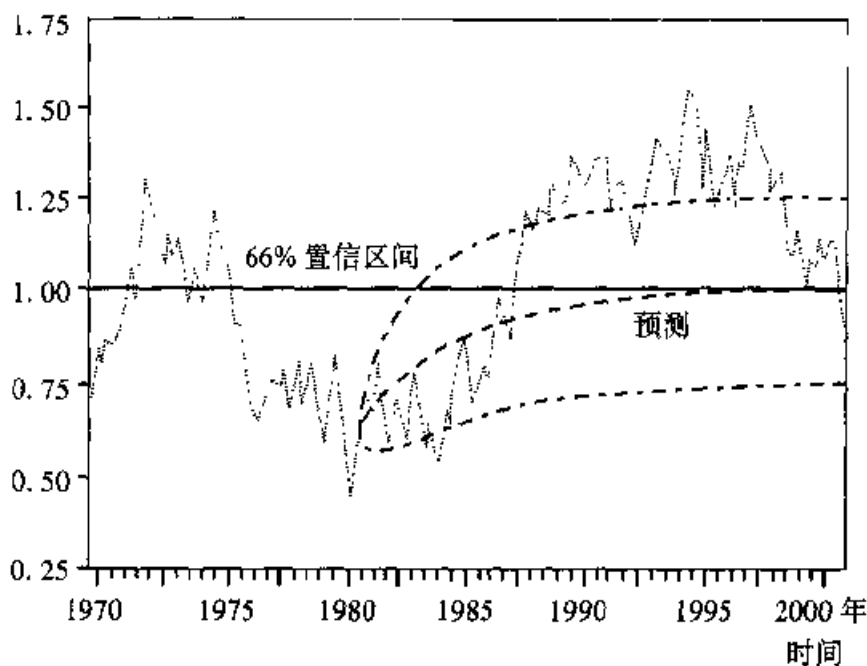


图3—7 均值回归过程的最优预测

式 (3-16) 是离散时间的一阶自回归过程的连续时间版本。明确地说, 式 (3-16) 是下述AR(1)过程在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限:

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}(1 - e^{-\eta}) + (e^{-\eta} - 1)x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3-19)$$

式中, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$, $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta})$ 。

因此, 利用离散数据 (实际也只能得到离散数据) 进行下述回归可以估计出式 (3-16) 中的参数:

$$x_t - x_{t-1} = a + bx_{t-1} + \varepsilon_t$$

求得参数 a , \hat{b} , 则 $\bar{x} = -\frac{a}{\hat{b}}$, $\hat{\eta} = -\log(1 + \hat{b})$, 且

77

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{\log(1 + \hat{b})}{(1 + \hat{b})^2 - 1}}$$

式中, $\hat{\sigma}_\varepsilon$ 为回归方程的标准差。

我们可以简单地对式 (3-16) 进行推广。例如, 我们希望 $x(t)$ 回归到式 (3-16) 中的 \bar{x} , 同时, 方差变动率也随着 x 增长。这时, 我们可使用下述过程:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma x dz \quad (3-20)$$

另外, 变量的百分比变化也可用简单的均值回归过程来描述。这等价于用过程

$$dx = \eta x(\bar{x} - x)dt + \sigma x dz \quad (3-21)$$

来描述 x_t 。在本书后面我们将考察不同的均值回归过程对投资决策问题的影响。

结束本节前我们回顾一下前面提出的问题：几何布朗运动和均值回归过程哪个能更好地为原材料和其他商品的价格建模。解决这个问题的一种方法是检查问题中价格变量的数据，特别是估计式 (3-19) 并检验方程右边 x_{t-1} 的系数是否显著地异于零。关于这个检验有两个问题：(1) 当式 (3-19) 右边 x_{t-1} 的系数为零的零假设成立时（因此 x_t 为随机游动），其普通最小二乘估计量对零是有偏的。因此，我们不能采用标准的 t 检验去检验该估计量是否显著地异于零。然而另一种检验，称为单位根检验 (unit root test)，可以很方便地用于这种情形。^[9] (2) 通常需要许多年的数据才能以一定的置信度确定一个变量是否真的是回归均值的。

图 3—8 和图 3—9 显示了过去 120 年的原油价格和黄铜价格 (以 1967 年美元的不变价格计算)。^[10] 从图中大致可看出这些价格是回归均值的，但回归均值的速度非常慢。对数据进行单位根检验可证实这一点。对 120 年的数据进行单位根检验，我们可轻易地拒绝价格服从随机游动的假设，即数据确认这些价格是回归均值的。然而，若只用过去三四十年的数据进行单位根检验，我们不能拒绝价格服从随机游动的假设。这看来是许多其他经济变量所面临的问题，只用 30 来年的数据在统计上很难区分到底是随机游动还是均值回归过程。

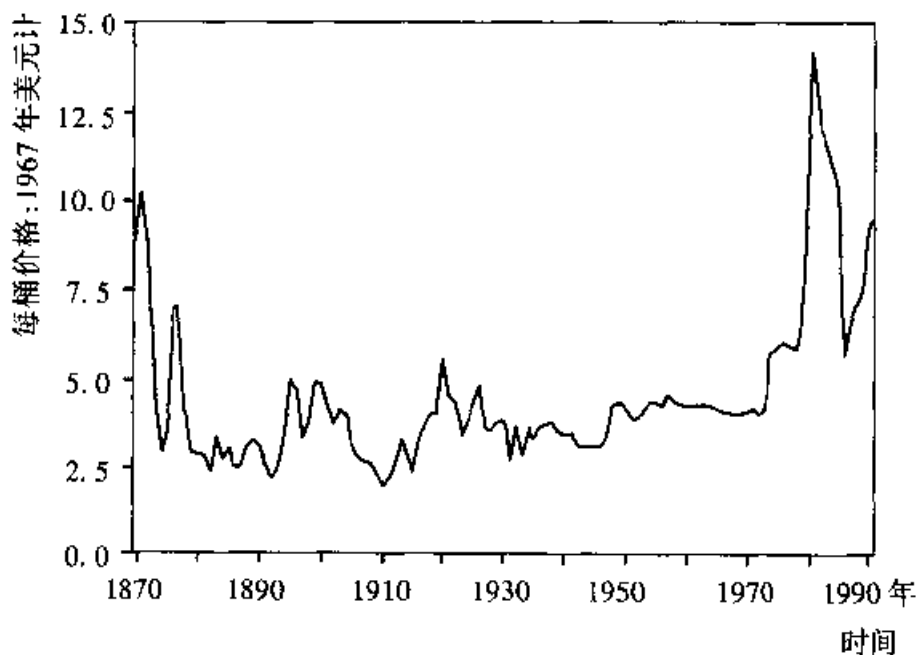


图 3—8 1967 年美元计的每桶原油价格

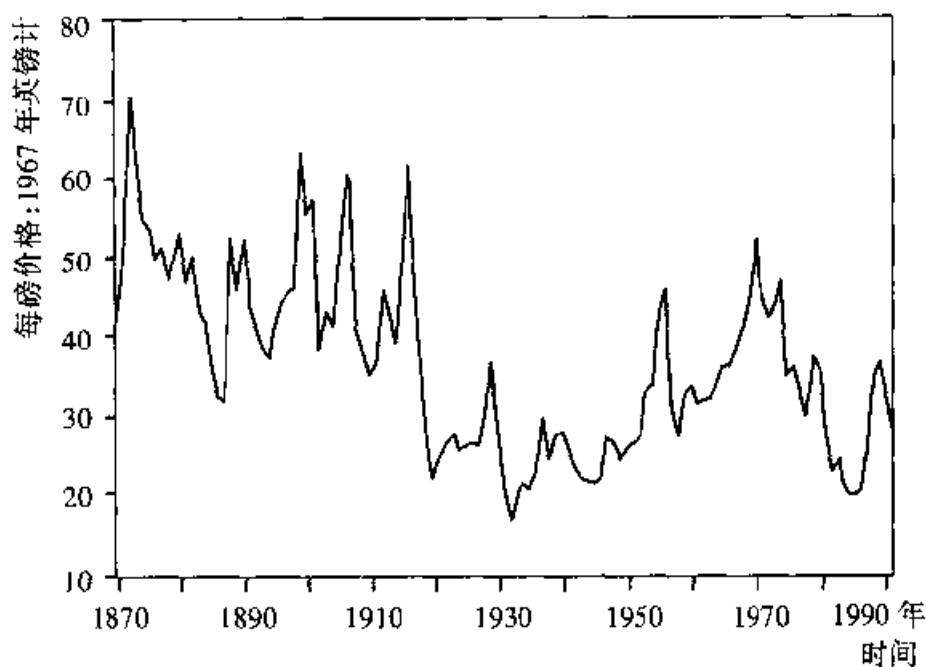


图 3—9 1967 年英镑计的每磅黄铜价格

因此，在决定是否用均值回归过程来为价格或其他经济变量建立模型时，更多的时候我们往往依靠理论的假设（如对经济机制均衡的直观考察）而不是统计的检验。建立模型要考虑的另一个标准是分析的可操作性。在后面的章节中我们可以看到，利用几何布朗运动来建立模型时，评价一个项目和寻找一种最优投资规则要简单得多。^[11]

3.4 伊藤引理

79

我们已经知道式 (3-11) 所表示的伊藤过程对时间是连续的，但又不可微。然而在实际中我们经常要处理关于伊藤过程的函数，并且希望求得这些函数的导数。例如，我们希望描述投资于铜矿的某种期权价格，该价格为市场上黄铜价格的函数，而黄铜的价格可用几何布朗运动来描述。在这种情形下，我们想确定期权价格所服从的随机过程。为做到这一点，我们往往需要对伊藤过程的函数进行积分或微分，这时我们需要利用伊藤引理。

我们可以简单地将伊藤引理看做一种泰勒 (Taylor) 展开式，这是非常容易理解的。假设 $x(t)$ 服从式 (3-11) 表示的过程，考虑函数 $F(x, t)$ 对 x

至少是二阶可微的, 对 t 为一阶可微。我们希望求出该函数的全微分 dF 。普通微积分的规则是以 x 和 t 的一阶变化来定义这一微分的:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

80 若假设我们也包括 x 的高阶微分, 则

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} (dx)^3 + \dots \quad (3-22)$$

在普通微积分中, 这些高阶项在取极限时可忽略。为说明这一点在当前是否仍然成立, 展开式 (3-22) 右边的第三项与第四项。首先代人关于 dx 的式 (3-11) 来确定 $(dx)^2$:

$$(dx)^2 = a^2(x, t)(dt)^2 + 2a(x, t)b(x, t)(dt)^{\frac{3}{2}} + b^2(x, t)dt \quad (3-23)$$

$(dt)^{\frac{3}{2}}$ 和 $(dt)^2$ 是 dt 的高阶无穷小量, 我们忽略这些项, 并记

$$(dx)^2 = b^2(x, t)dt$$

至于式 (3-22) 右边第四项中, $(dx)^3$ 的展开式中每一项关于 dt 的阶数均大于 1, 故在极限条件下, 比 dt 更快地趋于零。对更高阶的任何项, 如 $(dx)^4$ 等, 这一点都是成立的。因此, 伊藤引理给出 dF 的微分为

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 \quad (3-24)$$

将关于 dx 的式 (3-11) 代人, 我们还可以将上面的展开式重新记为

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} dx \quad (3-25)$$

与普通微积分的链式法则相比, 式 (3-25) 多了一项。为给出直观解释, 并简单起见, 我们假设漂移率 $a(x, t) = 0$, 且 $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, 则 $E(dx) = 0$, 但 $E(dF) \neq 0$ 。这正是詹森 (Jensen) 不等式的含义。若 F 为 x 的凸函数 (即 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$), 则 $E(dF) > 0$ 。若 F 为 x 的凹函数 (即 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$), 则 $E(dF) < 0$ 。

对伊藤过程, dx 可看做 \sqrt{dt} , 而 $(dx)^2$ 可看做 dt , 因此, 凸性或凹性的作用体现在 dt 的阶上, 所以在 F 的微分中这些项不能被忽略。式 (3-25)

81 中多出来的那一项正好反映了这一结果。

我们可以很容易地将上述泰勒级数展开式推广到几个伊藤过程的函数

中。例如, 设 $F = F(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ 是关于时间 t 和 m 个伊藤过程 x_1, x_2, \dots, x_m 的函数, 其中

$$dx_i = a_i(x_1, \dots, x_m, t)dt + b_i(x_1, \dots, x_m, t)dz_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (3-26)$$

并且 $E(dz_i dz_j) = \rho_{ij} dt$ 。伊藤引理给出的全微分 dF 可写为

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (3-27)$$

将式 (3-26) 代入式 (3-27), 我们可将 dF 展开为

$$\begin{aligned} dF = & \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i a_i(x_1, \dots, t) \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_i b_i^2(x_1, \dots, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \rho_{ij} b_i(x_1, \dots, t) b_j(x_1, \dots, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right] dt \\ & + \sum_i b_i(x_1, \dots, t) \frac{\partial F}{\partial x_i} dz_i \end{aligned} \quad (3-28)$$

例 3.1 几何布朗运动。我们回到式 (3-12) 中的几何布朗运动。我们将利用伊藤引理来证明 $F(x) = \log x$ 所服从的过程实际上由式 (3-13)

给出。由于 $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x}$ 及 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$, 由式 (3-24) 有

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2x^2} (dx)^2 = \alpha dt + \sigma dz - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz \end{aligned} \quad (3-29)$$

因此, 在任一有限时间区间 T 上, $\log x$ 的变化服从均值为 $\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T$ 、方差为 $\sigma^2 T$ 的正态分布。

为什么 $F(x) = \log x$ 的漂移率小于 α ? 这是因为 $\log x$ 为 x 的凹函数, 而 x 是不确定的。(由詹森不等式知) $E(\log x) \leq \log(Ex)$ 。时间期限 T 越长, x 的不确定性就越大, 因此, $\log x$ 的期望值要比 x 的期望值的对数变化小 (这正好是詹森不等式的结果), 故 $\log x$ 的漂移率小于 α 。

例 3.2 相关的布朗运动。作为第二个例子, 考虑函数 $F(x, y) = xy$, 其中 x 和 y 均为几何布朗运动:

$$\begin{aligned} dx &= \alpha_x x dt + \sigma_x x dz_x \\ dy &= \alpha_y y dt + \sigma_y y dz_y \end{aligned}$$

且 $E(dz_x dz_y) = \rho dt$ 。我们来寻找 $F(x, y)$ 和 $G = \log F$ 所服从的方程。

因 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, 且 $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$, 由式 (3-27) 可得

$$dF = xdy + ydx + dx dy \quad (3-30)$$

将 dx 和 dy 带入式 (3-30), 整理得

$$dF = (\alpha_x + \alpha_y + \rho\sigma_x\sigma_y)Fdt + (\sigma_x dz_x + \sigma_y dz_y)F \quad (3-31)$$

因此, F 仍然服从几何布朗运动。 $G = \log F$ 服从什么运动过程呢? 进行与前面例子相同的步骤, 可得

$$dG = \left(\alpha_x + \alpha_y - \frac{1}{2}\sigma_x^2 - \frac{1}{2}\sigma_y^2 \right) dt + \sigma_x dz_x + \sigma_y dz_y \quad (3-32)$$

由式 (3-32) 可知, 在任意时间区间 T 上, $\log F$ 的变化服从均值为 $\left(\alpha_x + \alpha_y - \frac{1}{2}\sigma_x^2 - \frac{1}{2}\sigma_y^2 \right) T$ 、方差为 $(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y) T$ 的正态分布。

例 3.3 贴现值。 假设 $F(x) = x^\theta$, 其中 x 服从式 (3-12) 的几何布朗运动。我们将说明如何计算期望的贴现值:

$$E \left[\int_0^\infty F(x(t)) e^{-rt} dt \right]$$

由伊藤引理, dF 可写为

$$\begin{aligned} dF &= \theta x^{\theta-1} (\alpha x dt + \sigma x dz) + \frac{1}{2} \theta(\theta-1) x^{\theta-2} \sigma^2 x^2 dt \\ &= \left[\theta\alpha + \frac{1}{2} \theta(\theta-1) \sigma^2 \right] F dt + \theta\sigma F dz \end{aligned} \quad (3-33)$$

由式 (3-33) 可以看出 F 服从几何布朗运动。因此, 我们可利用关于几何布朗运动的期望公式 (3-14), 记作

$$E[F(x, t)] = F(x_0) \exp \left[\left(\theta\alpha + \frac{1}{2} \theta(\theta-1) \sigma^2 \right) t \right] \quad (3-34)$$

故贴现值为

$$\begin{aligned} &E \left[\int_0^\infty F(x(t)) e^{-rt} dt \right] \\ &= \int_0^\infty F(x_0) \exp \left[\left(\theta\alpha - r + \frac{1}{2} \theta(\theta-1) \sigma^2 \right) t \right] dt \end{aligned}$$

计算得

$$\frac{x_0^\theta}{r - \theta\alpha - \frac{1}{2} \theta(\theta-1) \sigma^2}$$

式中, 假定分母大于零。

3.5 反射壁和长期分布

假设 x 服从简单布朗运动式 (3-6), 其初始点为 x_0 。在时间 t , x_t 服从均值为 $(x_0 + at)$ 、方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布。我们限定过程 x 不能超过上反射壁 \bar{x} 。如果采用布朗运动的随机游动表示, 这表示从 $x - \Delta h$ 出发, 若 x 要做一个向上的跳跃, 则反射回 $\bar{x} - \Delta h$ (而 x 做向下的跳跃到 $\bar{x} - 2\Delta h$ 是可以的)。类似地, 我们也可在 \underline{x} 处放一个下反射壁。

在经济学应用中, 由于市场中的均衡机制, 往往会存在这样的反射壁。例如, 若 x 表示商品价格, 它就是新公司进入时的上反射壁, 也是现有公司退出时的下反射壁。在第 8 章和第 9 章中我们将遇到这些模型。

这里, 我们要讨论当 x 服从此种过程且很长一段时间之后会发生什么。根据马尔可夫性, 在遇到反射壁之后, 初始值 x_0 的影响将会消失。当过程在两个反射壁之间来回运动很长时间之后, 我们预期它将成为一个长期平稳的过程。我们希望能找到该分布的概率密度, 记作 $\phi(x)$ 。

我们再次利用布朗运动的随机运动表达式。考虑任意 3 个相邻的点 $x - \Delta h$, x 和 $x + \Delta h$ 。在任意一个充分小的时间区间 Δt 上, 概率集 $\phi(x - \Delta h)$ 以概率 p 增大, 而概率集 $\phi(x + \Delta h)$ 以概率 q 下降, 其中 p, q 由式 (3-10) 给出。这些移动构成了 x 在该区间外的概率集。如果概率分布是平稳的, 这一定就是 $\phi(x)$ 。因此

$$\phi(x) = p\phi(x - \Delta h) + q\phi(x + \Delta h) \quad (3-35)$$

现在我们将 p 和 q 代入, 利用泰勒定理展开等式右边, 并合并同类项, 有

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\sigma^2} \right) \Delta h \right] \left[\phi(x) - \Delta h \phi'(x) + \frac{1}{2} (\Delta h)^2 \phi''(x) + \dots \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\sigma^2} \right) \Delta h \right] \left[\phi(x) + \Delta h \phi'(x) + \frac{1}{2} (\Delta h)^2 \phi''(x) + \dots \right] \\ &= \phi(x) - \left(\frac{\alpha}{\sigma^2} \right) (\Delta h)^2 \phi'(x) + \frac{1}{2} (\Delta h)^2 \phi''(x) + \dots \end{aligned}$$

被忽略的项都比 $(\Delta h)^2$ (或 Δt) 更快地趋近于零。因此, 我们从等式两边将 $\phi(x)$ 消去, 再除以 $(\Delta h)^2$, 并采用 $\Delta h \rightarrow 0$ 时的极限形式。这给出了微分方程: 84

$$\phi''(x) = \gamma \phi'(x) \quad (3-36)$$

式中, $\gamma = \frac{2\alpha}{\sigma^2}$ 。

容易看出该方程的通解为

$$\phi(x) = Ae^{\gamma x} + B$$

式中, A, B 为待定常数。为确定 A, B , 我们必须考虑在两个反射壁 x 和 \bar{x} 上所发生的情形。先考虑上反射壁。概率集合 $\phi(\bar{x} - \Delta h)$ 以概率 p 向上移动, 然后正好反射回 $\bar{x} - \Delta h$ 。因此, 平衡这些概率集合的方程被修正为

$$\phi(\bar{x} - \Delta h) = p\phi(\bar{x} - \Delta h) + p\phi(\bar{x} - 2\Delta h)$$

展开上式并像以前那样简化, 我们发现

$$\phi'(\bar{x}) = \gamma\phi(\bar{x})$$

将通解代入上式, 我们发现 $B = 0$ 。下反射壁 x 也能得到相同的结论。

最后, 选出的常数 A 必须能确保在 \bar{x} 与 x 之间全部概率集合的总和等于 1, 有

$$\phi(x) = \frac{\gamma \exp(\gamma x)}{\exp(\gamma \bar{x}) - \exp(\gamma x)} \quad (3-37)$$

因此, 长期平稳概率密度就是这样一种简单的指数。很自然, 如果 x 过程有正的漂移率 ($\alpha > 0$ 从而 $\gamma > 0$), 该指数就应该朝上反射壁提高; 而如果它有负的漂移率, 该密度会朝其右边下降。如果 $\gamma > 0$, 事实上, 我们可以令下反射壁 $x \rightarrow -\infty$, 并考虑一个仅有上反射壁 \bar{x} 的过程; 它将有一个长期平稳分布, 其中密度依指数下降到 \bar{x} 的左边。类似地, 如果 $\gamma < 0$, 我们可以让上反射壁 $\bar{x} \rightarrow \infty$ 。

在第 8 章和第 9 章, 我们将有机会用到这些分布。其中有两种推广的情形。在其中一种情形下, 我们将推广考虑“突然死亡”跳跃过程的观点。更进一步的推广包括另外一种情形, 即 x 服从一般的伊藤过程, 并考察 x 的概率分布的实际动态变化而不仅仅是其长期平稳状态。这两种推广都需要有关概率密度的微分方程(柯尔莫哥洛夫方程)的阐述, 我们在本章附录中介绍推导过程。

85 3.6 跳跃过程

我们前面介绍的都是扩散过程, 即处处连续的随机过程。但更现实的是, 将经济变量看做不频繁却离散跳跃的过程来建立模型。一个例子是, 当新竞争者进入一个企业很少的市场时, 价格往往会突然下降。类似地, 为了对开发类似专利的竞争者的成功作出反应, 我们可以把专利的价格模型化为有不可预测的但有相当大的下降的情况。或者, 我们可将石油价格看成布朗

运动和跳跃过程的混合；在正常时期，石油价格波动是连续的，但在战争或革命开始或结束时，油价也会发生较大的下降或上升。在本节，我们将讨论泊松跳跃过程 (Poisson process)，并介绍伊藤引理的一种形式，它有助于我们对泊松过程的处理。

泊松过程是具有固定或随机跃度的跳跃过程，其中跳跃发生的时间服从泊松分布。我们称这些跳跃为“事件”。记 λ 为事件的平均发生率，在无穷小的时间区间 dt 上，事件发生的概率为 λdt ，而事件不发生的概率为 $1 - \lambda dt$ 。事件是跃度为 u 的跳跃， u 自身是一随机变量。

与维纳过程类似，记 q 为一泊松过程，即

$$dq = \begin{cases} 0, & \text{概率为 } 1 - \lambda dt \\ u, & \text{概率为 } \lambda dt \end{cases}$$

对应于式 (3-11) 中的伊藤过程，我们将变量 x 的随机过程记为如下的泊松微分方程：

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dq \quad (3-38)$$

式中， $f(x, t), g(x, t)$ 为(非随机的) 已知函数。

假设 $H(x, t)$ 为 x 和 t 的某一可微函数，我们导出 H 的预期变化 $E(dH)$ 的表达式。首先，将 dH 展开成如下形式：

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dx = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} [f(x, t)dt + g(x, t)dq] \quad (3-39)$$

(注意，与伊藤过程不同， dx 并不依赖于 \sqrt{dt} ，因而高阶项趋于零的速度比 dt 快。) 这样 x 的变化通过两种方式引起 H 的改变：(1) $H(x, t)$ 连续且确定地变动以对 x 的漂移作出反应；(2) 存在泊松事件发生的可能性。若泊松事件发生， x 将有一个大小为 $ug(x, t)$ 的随机改变，而 $H(x, t)$ 也将有相应改变。因泊松事件在区间 dt 上发生的概率为 λdt ，我们有

$$E\left[\frac{\partial H}{\partial x} g(x, t)dq\right] = E_u\{\lambda[H(x + ug(x, t), t) - H(x, t)]\}dt \quad (3-40)$$

式中，等号右边的期望是针对跳跃的跃度 u 来求的。因此， H 的微分的期望可写成

$$E[dH] = \left[\frac{\partial H}{\partial t} + f(x, t)\frac{\partial H}{\partial x}\right] dt + E_u\{\lambda[H(x + g(x, t)u, t) - H(x, t)]\}dt \quad (3-41)$$

当处理连续过程时，我们也可以像伊藤引理那样使用式 (3-41)。

有时我们会遇到伊藤过程和跳跃过程的混合，前者在所有时间内都起作用，而后者不频繁地发生。伊藤引理的适当形式也综合了这两种效果。因此，若

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz + g(x, t)dq$$

则函数 $H(x, t)$ 的变化的期望为

$$E[dH] = \left[\frac{\partial H}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right] dt + E_x \{ \lambda [H(x + g(x, t)u, t) - H(x, t)] \} dt \quad (3-42)$$

注意到二阶导数项仅仅与过程中连续部分所引起的方差有关；而跳跃部分的贡献在于右边的最后一项，涉及 H 在不同的离散点间的差。

例 3.4 工资的贴现。假设有一个永远生存的个体，他的工资在随机时刻有一个大小为 ϵ 的固定的增长。若 λ 为增长的平均发生率，则该个体的工资可用微分方程写为

$$dW = \epsilon dq \quad (3-43)$$

式中， u 以概率 1 等于 1。该个体的预期收入流的现值为多少呢？

87 我们希望找到

$$V(W) = E \int_0^{\infty} W(t) e^{-\rho t} dt$$

我们可将 V 看成一项资产，并且令该资产的正常回报率 ρ 等于分红（当前工资）和预期资本收益之和：

$$\rho V dt = W(t) dt + E(dV)$$

在这种情形下：

$$E(dV) = \left(\frac{dV}{dW} \right) \lambda \epsilon dt = \left(\frac{\lambda \epsilon}{\rho} \right) dt$$

因此，有

$$V(W) = \frac{W}{\rho} + \frac{\lambda \epsilon}{\rho^2}$$

因此， V 等价于支付一笔永续年金，即当前工资 W 加上每单位时间平均增加的市场价值（如利息等）。

例 3.5 机器的价值。假设有一台机器在运转期间产生常数利润流 π ；机器不需要维持，但在某一时刻它将损坏且不得不丢弃。若 λ 为损坏发生率， ρ 为贴现率，该机器的价值为多少？

该机器的价值服从过程

$$dV = -Vdq$$

式中，“事件”指 u 以概率 1 等于 1。故资产回报方程为

$$\rho V dt = \pi dt + E(dV) = \pi dt - \lambda V dt$$

这样

$$V = \frac{\pi}{\rho + \lambda}$$

因而我们可以将机器运转带来的利润流看成永续年金，并通过贴现率和 λ 来对它进行估价。这是一个非常一般的想法：当泊松事件以发生率 λ 发生时，利润流将会停止；我们可以当做利润流从未停止来计算该利润流的期望现值，但应把 λ 加到贴现率中。在后面的章节中我们将遇到这个例子的许多应用。

3.7 文献导引

在本章中，我们对随机过程和伊藤引理的处理是介绍性和启发式的。对随机过程及其性质的更深入讨论可见考克斯和米勒 (Cox and Miller, 1965)、费勒 (Feller, 1971) 和卡林和泰勒 (Karlin and Taylor, 1975, 1981) 的论述。考克斯和米勒 (Cox and Miller, 1965) 以及卡林和泰勒 (Karlin and Taylor, 1981) 提供了对柯尔莫哥洛夫方程的一个非常好的处理。关于连续过程和跳跃过程在建立经济和金融模型中的使用的讨论，参见默顿 (Merton, 1990, Chap.3) 的论述。关于随机过程更严格的方法见卡拉扎斯和施里夫 (Karatzas and Shreve, 1988) 的论述。

对伊藤引理及其应用的一些更详细但仍是介绍性的讨论，可参见默顿 (Merton, 1971)、乔 (Chow, 1979)、马利亚里斯和布洛克 (Malliaris and Brock, 1982) 及霍尔 (Hull, 1989) 的论述。(默顿 (Merton, 1971) 也提供了对泊松过程的一种很好的讨论和一些例子。) 更严格的处理参见库什纳 (Kushner, 1967)、阿诺德 (Arnold, 1974)、多珊 (Dothan, 1990) 及哈里森 (Harrison, 1985, Chap. 4) 的论述。另外，对期望现值更详细的讨论可见迪克西特 (Dixit, 1993a) 的论述。

附录

柯尔莫哥洛夫方程

有时, 我们需要回答下述问题: 若 $x(t)$ 服从特定的随机过程, 其初始值为 x_0 , 在经过一定时间 t 后, $x(t)$ 落在某一范围内的概率为多大? 或 $x(t)$ 在时间 $t \leq T$ 内到达点 x_1 的概率为多少? 为回答这样一些问题, 我们需要描述 $x(t)$ 的概率密度及其随时间的演变情况。利用柯尔莫哥洛夫方程我们可以解决这一问题。

利用本章第 2.2 节中引入的离散时间随机游动表达式, 我们可以推导出式 (3-6) 中带漂移的简单布朗运动的柯尔莫哥洛夫方程。回忆以前的做法, 我们将长度为 t 的时间区间分为 $n = \frac{t}{\Delta t}$ 个离散步骤, 在每一步中, x 以概率 p 增加 Δh , 或以概率 $q = 1 - p$ 减少 Δh 。最后, 为保证 $(x_t - x_0)$ 的方差独立于 Δt 的特定选择, 我们令 $\Delta h = \sigma \sqrt{\Delta t}$ 。

令 $\phi(x_0, t_0; x, t)$ 表示 $x(t)$ 的概率密度函数, 给定较早时间 t_0 , 有 $x(t_0) = x_0$, 这样:

$$\text{Prob}[a \leq x(t) \leq b \mid x(t_0) = x_0] = \int_a^b \phi(x_0, t_0; u, t) du$$

89 在时间区间 $[t - \Delta t, t]$ 上, 过程 $x(t)$ 到达点 x 有两种方式: 一是从 $x - \Delta h$ 增加到 x ; 二是从 $x + \Delta h$ 减少到 x 。故我们有

$$\begin{aligned} \phi(x_0, t_0; x, t) &= p\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta h) \\ &\quad + q\phi(x_0, t_0; x + \Delta h, t - \Delta h) \end{aligned} \quad (3-44)$$

在前面的讨论中, 我们将这看成是平稳状态的动态推广 (见式 (3-35))。

现在将 $\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta h)$ 在 $\phi(x_0, t_0; x, t)$ 展开成泰勒级数:

$$\begin{aligned} &\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta h) \\ &= \phi(x_0, t_0; x, t) - \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta h \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dots \end{aligned}$$

注意到三阶项及更高阶项都含 $(\Delta t)^{\frac{3}{2}}, (\Delta t)^2$ 等, 故它们比 Δt 更快地趋于零。对 $\phi(x_0, t_0; x + \Delta h, t - \Delta h)$ 也做同样的展开, 并将它们代入式 (3-44), 得

$$\begin{aligned} \phi(x_0, t_0; x, t) &= (p + q)\phi(x_0, t_0; x, t) - (p + q)\Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &\quad - (p - q)\Delta h \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(p + q)(\Delta h)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

最后,我们利用 $p + q = 1$, 由式(3-10)知 $p - q = \left(\frac{a}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}$, 又有 $\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$, 将它们代入以上方程, 依据 Δt 的幂排列并重新整理, 得

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x_0, t_0; x, t) - a \frac{\partial}{\partial x} \phi(x_0, t_0; x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x_0, t_0; x, t) \quad (3-45)$$

式(3-45)为带漂移布朗运动的柯尔莫哥洛夫向前方程, 它描述了概率密度 $\phi(x_0, t_0; x, t)$ 随时间的演变情形。用同样的方法我们可得到式(3-11)中一般伊藤过程的柯尔莫哥洛夫向前方程:^[12]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b^2(x, t) \phi(x_0, t_0; x, t)] - \frac{\partial}{\partial x} [a(x, t) \phi(x_0, t_0; x, t)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \phi(x_0, t_0; x, t) \end{aligned} \quad (3-46)$$

式(3-45)和式(3-46)称为向前方程, 因为它们把时间 t_0 的初始值 x_0 作为边界条件, 然后求解 x 未来值的密度函数。类似地, 可以描述时间后退时密度函数的演化, 即将时间 t 时的 $x(t)$ 作为边界条件, 求 x_0 在 $t_0 < t$ 时的密度函数。伊藤过程的柯尔莫哥洛夫向后方程为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b^2(x_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \phi(x_0, t_0; x, t) + a(x_0, t_0) \frac{\partial}{\partial x_0} \phi(x_0, t_0; x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_0} \phi(x_0, t_0; x, t) \end{aligned} \quad (3-47)$$

在本书后面我们将用到柯尔莫哥洛夫方程, 这里先考虑两个例子是有用的。

例 3.6 O-U 过程。在这个例子中, 我们回到式(3-16)的简单 O-U 过程(均值回归过程)。为简单起见, 设 $\bar{x} = 0$, 则方程变为

$$dx = -\eta x dt + \sigma dz \quad (3-48)$$

下面我们证明式(3-17)和式(3-18)给出了 $x(t)$ 的均值和方差。我们可以利用柯尔莫哥洛夫向前方程来证明这个命题。

$x(t)$ 的矩母函数(moment-generating function)为

$$M(\theta, t) \equiv E(e^{-\theta x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_0, t_0; x, t) e^{-\theta x} dx \quad (3-49)$$

则

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{-\theta x} dx \quad (3-50)$$

O-U 过程的柯尔莫哥洛夫向前方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \eta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \phi \quad (3-51)$$

将 $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ 代入式 (3-50), 积分后得到下述关于 $M(\theta, t)$ 的方程:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \theta^2 M - \eta \theta \frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial M}{\partial t} \quad (3-52)$$

91 这个偏微分方程必须根据边界条件来求解:

$$M(0, t) = 1, -M_\theta(0, 0) = x_0, \text{ 且 } \text{Var}(x(0)) = M_{\theta\theta}(0, 0) - x_0^2 = 0$$

读者可自行证明该方程的解为

$$M(\theta, t) = e^{\sigma^2 \theta^2 / 4\eta} \left[1 - x_0 \theta e^{-\eta t} + \left(\frac{1}{2} x_0^2 - \frac{\sigma^2}{4\eta} \right) \theta^2 e^{-2\eta t} \right] \quad (3-53)$$

利用 $E(x_t) = -M_\theta(0, t)$ 和 $E(x_t^2) = M_{\theta\theta}(0, t)$, 读者可证明式 (3-17) 和式 (3-18)。

例 3.7 可更新资源的稳定状态分布。柯尔莫哥洛夫方程为偏微分方程, 一般情况下难以求解。然而, 我们通常对随机变量长期稳定状态的特征感兴趣。并不是所有的随机过程都有能收敛到某些稳定状态函数 (例如, 几何布朗运动没有稳定状态函数, 而 O-U 过程则具有稳定状态函数) 的概率分布。但是, 若稳定状态分布存在, 在大多数情况下它能够通过柯尔莫哥洛夫向前方程找到, 这时的柯尔莫哥洛夫方程退化为常微分方程。

作为一个简单的练习, 我们首先直接从式 (3-45) 中重新推导出反射壁之间长期平稳的布朗运动的负指数分布。该分布独立于初始状态 x_0, t_0 以及当前时间 t , 因此, 我们得到函数 $\phi(x)$ 的一个常微分方程:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \phi''(x) - \alpha \phi'(x) = 0$$

这与前面讨论过的式 (3-36) 相同, 其求解过程也与前面一样。

现在考虑一个更复杂的随机过程, 它通常用来描述可更新资源存量 $x(t)$ 在依赖于 x 的一定开发速度 $q(x)$ 下的演化:

$$dx = [f(x) - q(x)]dt + \sigma(x)dz \quad (3-54)$$

式中, $f(x)$ 为资源的生长函数, 它是一个凹函数且满足:

$$f(x_{\min}) = f(x_{\max}) = 0, \text{ 且对 } x_{\min} < x < x_{\max}, \text{ 有 } f(x) > 0$$

关于可更新资源的许多文献讨论了式 (3-54) 的确定性形态, 将社会最优 $q(x)$ 与来自竞争性市场的结论进行比较。然而, 生物学家和人口生态
92 学家早已认识到, 大多数的可更新资源存量的演变是随机的, 并且式 (3-54)

是一个自然的表示。^[13] 尽管 $x(t)$ 是随机波动的, 研究 x 在达到稳定状态均衡时的概率密度正是我们所关注的。

在达到稳定状态均衡时, 向前方程式 (3-46) 中的 ϕ 将不依赖于 x_0 , t_0 或 t 。记此平稳概率密度函数为 $\phi(x)$, (在求一次积分后) 方程可改写为

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\sigma^2(x) \phi_\infty(x)] = [f(x) - q(x)] \phi_\infty(x)$$

这可以重写为

$$\frac{d[\sigma^2(x) \phi_\infty(x)]}{\sigma^2(x) \phi_\infty(x)} = \frac{2}{\sigma^2(x)} [f(x) - q(x)] dx \quad (3-55)$$

两边积分后可得到稳定状态密度的下述方程:^[14]

$$\phi_\infty(x) = \frac{m}{\sigma^2(x)} \exp \left[2 \int^x \frac{f(v) - q(v)}{\sigma^2(v)} dv \right] \quad (3-56)$$

式中, m 为一个使 $\int_0^\infty \phi_\infty(x) dx = 1$ 的积分常数。

作为一个例子, 假定 $f(x)$ 为逻辑斯蒂函数 (Logistic function), 即

$$f(x) = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K} \right)$$

式中, K 为资源存量的可开采容量。此外, 假设资源不开采, 即 $q(x) = 0$, 而且 $\sigma(x) = \sigma x$ 。那么, ($\sigma^2 < 2\alpha$ 时) 由式 (3-56) 可使得以下稳定状态密度函数成立:

$$\phi_\infty(x) = \left(\frac{2\alpha}{\sigma^2 K} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} - 1} \frac{x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} - 2} e^{-\frac{2\alpha x}{\sigma^2} K}}{\Gamma \left(\frac{2\alpha}{\sigma^2} - 1 \right)} \quad (3-57)$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 表示伽玛函数 (gamma function)。由此方程我们可以确定 x 在达到稳定状态均衡时的期望值为

$$E(x_\infty) = K \left(1 - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) \quad (3-58)$$

注意, 随机波动降低了 x 在稳定状态时的期望值, 并且当 $\sigma^2 \rightarrow \alpha$ 时, $E(x_\infty) \rightarrow 0$; 此外, 若 $\sigma^2 \geq \alpha$, 随机波动将会使资源存量耗尽, 即 ϕ_∞ 成为退化测度且 $x(t)$ 以概率 1 收敛到 0 (对这一点及可更新资源相关模型的更详细的讨论, 以及最优随机开发规则 $q^*(x)$ 的推导可见平迪克 (Pindyck, 1984) 的论述)。

【本章注释】

[1] 人们可能会说随机性只是气象学的局限性的一种反映。一般来讲,

如果我们可以在构建充分完备和精确的气象模型，这种随机性就可以忽略。但是从操作的观点来看，也许下周气温确实是一个随机变量。

[2] 在本书中，我们并不想详细且严格地证明随机过程，实际上仅提供了能满足我们应用的最简单的解释和认识。关于随机过程的详细的一般证明，参见考克斯和米勒 (Cox and Miller, 1965)，费勒 (Feller, 1971) 及卡林和泰勒 (Karlin and Taylor, 1975) 的论述。

[3] 这里忽略了在相当长的时间内全球气温会变暖或者变冷的可能。

[4] 1827年，植物学家罗伯特·布朗 (Robert Brown) 首先观察到并描述了悬浮在液体中的微粒的运动，这是由相邻粒子间明显的连续随机影响所产生的；因此，就有了布朗运动这一术语。1905年，阿尔伯特·爱因斯坦 (Albert Einstein) 提出了布朗运动的数学理论，诺伯特·维纳 (Norbert Wiener) 1923年进一步发展了爱因斯坦的理论并使之更严格。

[5] 通常我们采用自然对数，即对数的底总是 e 。

[6] 若 X, Y 为两个随机变量，它们之间的相关系数定义为 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{(\sigma_X \sigma_Y)}$ 。在这里 $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ 。

[7] 考克斯和米勒 (Cox and Miller, 1965) 详细讨论了这种方法。我们这里的说明采用迪克西特 (Dixit, 1993a) 的论述。

[8] 关于对数正态分布的详细讨论可参见艾奇逊和布朗 (Aitchison and Brown, 1957) 的论述。

[9] 单位根检验最初由迪基和富勒 (Dickey and Fuller, 1981) 提出，现在已有了进一步的推广。对这些检验的介绍，参见平迪克和鲁宾菲尔德 (Pindyck and Rubinfeld, 1991, Chap.15) 的论述。

[10] 1870—1973年的数据来源于曼塞 (Manthy, 1978)；1973年后的数据来源于美国能源信息和矿业局。价格按批发价格指数 (现在为生产价格指数) 进行了调整。

[11] 当潜在的随机变量被模型化为均值回归的过程时，通常不可能获得最优投资规则的解析解，因此我们必须利用数值解技巧。反对将原油及其他可耗竭资源的价格模型化为几何布朗运动的强有力的证据，可参见伦德 (Lund, 1991b) 的论述。

[12] 关于柯尔莫哥洛夫向前与向后方程的推导及更详细的讨论参见卡林和泰勒 (Karlin and Taylor, 1981) 的论述。

[13] 见伯丁顿和梅 (Beddington and May, 1977) 以及戈尔和里克特-戴恩 (Goel and Richter-Dyn, 1974) 的论述。对可更新资源经济学在确定性框架下的讨论见克拉克 (Clark, 1976) 的论述。

[14] 默顿 (Merton, 1975) 也提供了这个方程的一种推导, 并指出了它如何用于随机演化人口的新古典主义增长模型。

第4章 不确定条件下的动态最优化



时间在投资决策中起着非常重要的作用。企业今天的投资支出将产生一个未来的收入流，该收入流除了受企业及其竞争者后来所做的其他决策影响外，还受到不确定性的影响。在做当前决策时，企业必须能预见所有这些可能的发展。正如我们在第2章所强调的，这种未来从一方面来说就是在以后做同样决策的机会，因此，延期的权利应包括在今天的选择菜单中。我们用以建立投资决策模型的数学知识，必须能够解决所有这些考虑。

本章将介绍这样两种知识：动态规划（dynamic programming）及或有债权分析（contingent analysis）。这两种知识实际上是紧密相关的，在许多应用中它们往往导出相同的结

果。然而，它们对金融市场和企业用于评价未来现金流的贴现率所提出的假设是不同的。

动态规划是研究动态优化问题的一种常用的工具，而且在处理不确定性问题时也非常有用。它将整个决策过程分为两个部分：即期决策和评价函数。评价函数从来自即期决策的条件出发评价所有后续决策的结果。如果规划的期限是有限的，在期限末端所作出的最后一个决策将没有后续决策，因此可采用标准的静态优化方法来处理，所得到的解就是倒数第二个决策的评价函数。这个评价函数也可以作为从后往前的两阶段的决策，依次类推。因此，我们可倒推到最初的条件。这一系列计算过程看起来很复杂，但计算机软硬件的进步使得这种方法非常可行。本书中，我们对许多问题是采用这种方法获得解的。若规划的期限是无穷的，看起来更加困难的计算可以采用其递归特征来简化，即每一项决策所产生的另一个问题就像是初始问题。这不仅使数值计算变得简单，而且还有可能得到解的一些理论特征，有时我们还有可能获得解析解。

或有债权分析建立在金融经济学的基础上。首先注意投资计划由随时间而变化并取决于未说明的不确定事件的成本与收益流来限定的。拥有某一投资机会或从某一已完成的项目中获得经营利润流的权利的企业或个人就拥有了一种有价值的资产 (asset)。现代经济是拥有全部资产种类的一种非常丰富的菜单的市场。如果我们的投资项目或投资机会碰巧是这些可交易资产中的一种，它会有一个已知的市场价格。即使它并不能直接交易，人们仍然可以通过将它与其他可交易的资产联系起来从而算出它的一个隐含价值。

我们所需要的只是能最终在未来每一期以及未来每种不确定条件下确切地复制来自投资项目的回报模式的交易资产的可交易资产的某些组合或投资组合。(这种投资组合的成分不必是固定不变的，它可以随着资产成分的价格的变化而变化)。那么，投资项目的价值必须等于该投资组合的总价值，因为任何差异都会提供一种套利的机会：通过购买两种资产或资产组合中价格较低的并出售其中价格较高的而得到确定的收益。隐含于这种计算中的要求是企业应当以最有效的方式利用其投资机会，因为如果它不这样做，套利者可以购买该投资机会并获得正利润。一旦我们知道该投资机会的价值，我们就能找到获得该价值的最佳投资形式、投资规模和投资时机，因此得出最佳的投资决策。

在第4.1节，我们说明了动态规划的基本思想。考虑到连续性，我们从

95 第 2 章的两阶段例子开始，然后将它推广到更长的时间跨度，包括离散时间段和连续时间段。其中，我们考虑了在第 3 章中所引入的两种特殊不确定性形式，即伊藤过程和泊松过程。第 4.2 节阐述了未来不确定回报的或有债权的一般观点，以及通过套利对其价格的确定，这里的焦点仍然是伊藤过程和泊松过程。第 4.3 节解释了这两种方法之间的联系还说明了在不同风险程度下获得贴现回报与定价回报的简单方法之间的联系。

贯穿全书，我们强调方法背后的直觉而不是正式证明。本章附录给出了技术细节的一个概述。

4.1 动态规划

在这一节，我们将介绍动态规划的基本思想。我们从第 2 章提出的两阶段例子开始，从而提供了动态规划观点的简单离散假定并继续我们以前的分析。然后，我们把它推广到多阶段决策的一般理论。最后，我们讨论连续时间情形，并用伊藤过程和泊松过程来表示背后的不确定性。这正是后面章节会出现的大多数应用的假定。

4.1.1 两阶段的例子

第 2 章中一个推广了的例子引入了投资决策的最优时机和期权价值的观念。我们首先比较即时投资和等待的现值。实际上，动态规划是对更一般的动态决策作出这种比较的一种系统方法。为说明这一点，我们继续推广我们的例子。

作为第一步，在本节中我们将以更一般的方式重新讨论第 2 章提出的两阶段问题。以前，对例子中的大多数参数我们选择一些特定的数值；现在，我们假设这些参数可以取任意值。记 I 为投资于工厂的沉没成本，该工厂在每个阶段永远生产一个虚拟产品，令 r 表示利率。假设在阶段 0 虚拟产品的价格为 P_0 ；从阶段 1 开始，产品价格为 $(1+u)P_0$ 的概率为 q ，为 $(1-d)P_0$ 的概率为 $(1-q)$ 。

96 先假设投资机会仅在阶段 0 存在；若企业在阶段 0 决定不投资，在阶段 1 它将不能改变决定。记 V_0 为企业从其投资中所取得收入的期望现值。根据虚拟产品两种可能价格的相应概率加权平均并贴现，我们有

$$\begin{aligned}
 V_0 &= P_0 + [q(1+u)P_0 + (1-q)(1-d)P_0] \left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots \right] \\
 &= P_0 + [1+q(u+d)-d]P_0 \frac{\frac{1}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}} \\
 &= \frac{P_0[1+r+q(u+d)-d]}{r}
 \end{aligned}$$

(注意：为了使上面的求和级数收敛，我们需要 $r > 0$ 。) 若 $V_0 > I$ ，则企业选择投资，所获投资收益为 $V_0 - I$ ；若 $V_0 < I$ ，则不进行投资，所获投资收益为零；若 $V_0 = I$ ，则企业对投资与否无所谓，收益均为零。令 Ω_0 为企业在该项目上的净回报，若企业必须在阶段 0 以“勿失良机” (now-or-never) 为基础决定是否投资，根据上面的分析，我们有

$$\Omega_0 = \max[V_0 - I, 0] \quad (4-1)$$

现在考虑现实的情形，未来任何阶段投资机会都仍然存在。这时，在阶段 0 的决策涉及不同的权衡：现在投资，或者等到阶段 1 再决定最佳选择。为评价这一点，企业必须预测自己的决策在未来不同条件下的结果。从阶段 1 向前，条件不会发生任何变化，因而任何有利的投资项目将不会推迟到阶段 1 之后才发生，那么我们只需预测到阶段 1 为止就行了。

假设企业在阶段 1 没有进行投资，而是在等待。在阶段 1，价格将变成：

$$P_1 = \begin{cases} (1+u)P_0, & \text{概率为 } q \\ (1-d)P_0, & \text{概率为 } (1-q) \end{cases}$$

并且在以后的阶段 2, 3, ... 中，价格将保持在这一水平。该收入流在阶段 1 的贴现值为

$$V_1 = P_1 + \frac{P_1}{(1+r)} + \frac{P_1}{(1+r)^2} + \dots = \frac{P_1(1+r)}{r}$$

对这两种可能性（价格在阶段 0 和阶段 1 之间活动）中的任一种，若 $V_0 > I$ ，则企业将进行投资，所实现的净回报为

$$F_1 = \max[V_1 - I, 0]$$

这个未来最优决策的结果有时候被称为连续价值 (continuous value)。从阶段 0 来看，阶段 1 的价格为 P_1 ，从而价值 V_1 ， F_1 都是随机变量。记 E_0 为利用阶段 0 的可能信息算出的期望（即概率加权平均），则我们有

$$E_0[F_1] = q \max \left[\frac{(1+u)P_0(1+r)}{r} - I, 0 \right] + (1-q) \max \left[\frac{(1-d)P_0(1+r)}{r} - I, 0 \right] \quad (4-2)$$

这可以称为期望的连续价值，或称为连续价值，但被理解为期望值。

现在回到阶段 0，这时企业有两种选择。若立即投资，则企业所获收益为期望现值减去投资成本，即 $V_0 - I$ ；若不进行投资，企业得到由前面推导出来的连续价值 $E_0[F_1]$ ，但这个价值在阶段 1 才开始取得，必须用因子 $\frac{1}{1+r}$ 来贴现到阶段 0。显然，最优决策就是产生更大收益的那一种。因此，整个投资机会都是最优安排的投资的利润的净现值，记为 F_0 ，我们有

$$F_0 = \max \left\{ V_0 - I, \frac{1}{1+r} E_0[F_1] \right\} \quad (4-3)$$

企业的最优决策是使得这个净现值最大化的决策。

上述分析展示了动态规划的基本思想。我们将整个决策过程分为两个部分：即时选择和后续选择。这些选择的所有效果被总结到连续价值中。为找到最优决策序列，我们采用回溯法。在最后一个决策点，我们能作出最优决策并找到连续价值（即我们例子中的 F_1 ）。在前一个决策点，我们知道期望的连续价值，因而我们能优化当前选择。在我们的例子中只有两个阶段，因此，决策到此就结束了。对有多个阶段的情形，重复上述过程即可。

在阶段 1 投资机会仍然存在的决策要比基于“勿失良机”必须在阶段 0 作出投资的决策受到较少的限制。式 (4-1) 给出了后一种情形下的回报 Ω_0 ，因为在这一情形下，决策过程在时间 0 就终止了，可称为在时间 0 的终止价值 (termination value)。现在我们有来自式 (4-3) 的限制更少的决策问题的净现值 F_0 。二者的差 ($F_0 - \Omega_0$) 正好为额外自由的价值，即决策的延期期权 (option to postpone)。

98 在第 2 章中，我们对这个一般模型中的一些特殊情形计算了投资机会的价值 F_0 和终止价值 Ω_0 ，其中给出了参数 P_0 、 q 等的具体数值。读者可复习那些例子，并将它们放到我们这里所讲的一般理论中去。这里我们指出那些结论的一些特征。由图 2—4 可以看出，这些价值是初始价格 P_0 的函数。当 P_0 超过临界值 249 美元时，企业发现立即投资是最佳选择，因而推迟期权没有价值，故 $F_0 = \Omega_0$ ，并在此价格范围内 ($P_0 > 249$ 美元) 等于 $V_0 - I$ 。当 $P_0 < 249$ 美元，这时最优的选择是等待，因而 F_0 的图像高于 Ω_0 的图

像。在第2章的另一个例子的图形中,当其他参数变动时,类似的性质同样成立。在表示机会的全部价值 F_0 的直线与表示终止价值 Ω_0 的直线的交叉处,我们找到了立即投资是最优的临界点。

为更好地理解那些影响推迟期权的价值的因子,我们更进一步地考察 F_0 和 Ω_0 之间的差异。(1)企业推迟了决策也就放弃了在阶段0的收益 P_0 ,这种差异支持立即行动。(2)推迟决策同样意味着推迟投资成本,这种差异支持等待,因为利率为正。(更一般的情形是,投资成本本身会随时间而变化,这时将带来新的问题。例如,若企业预期设备成本随时间推移会变得更便宜,这会是等待的另一种理由。)(3)这也是最重要的,等待使我们可以就价格上升或下降这两种可能情况下的每一种分别优化。这样一来,立即行动必须基于二者的平均。对不同的可能性可采取不同的行动,特别地,制止在价格下降时投资,使得等待的额外自由有了价值。^[1]

4.1.2 多阶段模型

我们来推广上面的两阶段模型。在后面的章节中,我们主要应用时间为连续的情形,状态变量的不确定性由维纳过程或更一般的扩散过程的形式给出。然而,在本节中,我们在不确定性由离散时间马尔可夫过程给出的情形下来说明动态规划。在这种情形下,许多一般性质可以更容易地证明。并且,后面章节所讨论的随机过程可以看成是离散时间马尔可夫过程的极限。正如我们在第3章所看到的,扩散过程是马尔可夫过程,当每一时间区间的长度和随机游动的每一步的步长适当地变小时,它可看成是离散时间随机游动的极限。 99

因为我们所考虑的问题是其在投资方面的应用,所以我们主要考虑一家企业的决策行为,但我们考虑的问题对一般情形也同样适用。企业当前状态由状态变量 x 来表示,它将影响企业的决策以及扩张机会。为简单起见,假设 x 的取值为标量(实数),但我们的理论可以很容易地推广到任意维度的矢量状态。在任何时间(或阶段) t ,变量 x_t 的取值已知,但未来取值 x_{t+1}, x_{t+2}, \dots 为随机变量。假设过程 $\{x_t\}$ 为马尔可夫过程,即与未来值的概率分布的决定有关的信息都包括在当前状态 x_t 中。

在每一阶段 t ,企业面临多种选择,我们用控制变量 u 来表示这些选择。在上面的例子中,企业面临的选择仅有立即投资或等待,我们可取 u 为一个二元标量,其中 $u=0$ 表示等待,而 $u=1$ 表示立即投资。在其他应用中,例如,若投资规模也是被选择的因素,则 u 可取为连续变量。若企

业除了投资成本外还有其他选择,例如,在时刻 t 雇用工人,这时的 u 是一个向量。控制变量在时刻 t 的取值 u_t 仅仅依赖于时刻 t 的信息,即 x_t 。

在时刻 t 的状态变量和控制变量影响企业即期的利润流,我们将它记为 $\pi_t(x_t, u_t)$ 。这里相应的控制变量 u_t 可能是雇用工人的数量或所购买的原材料的数量等。在阶段 t 时的 x_t, u_t 同样也影响未来状态的概率分布。这里 u_t 可能是投资额或研究与开发费用 (R&D),甚至是放弃该企业的决策等。令 $\Phi_t(x_{t+1}|x_t, u_t)$ 表示以当前信息 (指状态或控制变量) 为条件、状态变量在下一阶段的累积概率分布函数。

在任意两阶段之间的贴现因子为 $\frac{1}{1+\rho}$ (ρ 为贴现率)。我们的目标是在时间上选择一系列的控制变量 $\{u_t\}$, 使收益的期望净现值最大化。有时我们限制我们的决策在某一时刻 T 终止,并且最后的回报依赖于最后所达到的状态。记此最终回报函数 (terminal payoff function) 为 $\Omega_T(x_T)$ 。

现在,我们来应用基本的动态规划知识。注意我们的思路是将决策过程分为两个部分,即刻的阶段以及后续阶段。假设当前时刻为 t , 状态为 x_t 。我们用 $F_t(x_t)$ 表示企业从这一点开始最优地作出全部决策的结果,即企业的全部现金流的预期净现值。

当企业选择控制变量 u_t , 它所得到的即期现金流为 $\pi_t(x_t, u_t)$ 。在下一阶段 ($t+1$), 状态为 x_{t+1} , 最优决策产生的结果为 $F_{t+1}(x_{t+1})$ 。在时刻 t 看来,这一结果为随机变量,因而我们必须对它取期望值 $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$ 。这也就是我们所说的连续价值。^[2] 贴现到时刻 t , 即期现金流和该连续价值之和为

$$\pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$$

企业将选择 u_t 使上式最大化,并且结果刚好为 $F_t(x_t)$, 因此有

$$F_t(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F_{t+1}(x_{t+1})] \right\} \quad (4-4)$$

隐藏在这个公式下的结论在贝尔曼 (Bellman) 最优化原理中得到了正式说明:一种最优决策有下述性质,无论初始行为怎样,剩余决策组成一个以初始行为的结果为初始状态的最优决策。其中剩余选择 u_{t+1}, u_{t+2} 等的最优结果为剩下的连续价值之和,因而只需选择最优的即期控制 u_t 即可。

式 (4-4) 称为贝尔曼方程 (Bellman equation), 或最优化基本方程 (fundamental equation of optimality)。式中,右边第一项为即期收益,第二

项为连续价值, 该阶段的最优决策是使得这两项之和最大化的决策。

在两阶段例子中, 即期投资的收益为 $V_0 - I$, 等待虽没有回报而仅有贴现的连续价值 $\frac{E_0[F_1]}{1+r}$, 在这种方案中的最优二元选择所选出的是两者中较大的一个。因此, 我们以前导出的式 (4-3) 是一般的贝尔曼方程式 (4-4) 的特例。

如果多阶段问题具有固定的有限期界 T , 我们可类似地从最后一个时刻开始向前分析。在时间期界的最后时刻 T , 企业得到的最终回报为 $\Omega_T(x_T)$ 。则在此阶段的前一阶段我们有

$$F_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}} \left\{ \pi(x_{T-1}, u_{T-1}) + \frac{1}{1+\rho} E_{T-1}[\Omega_T(x_T)] \right\}$$

故我们可知在 $T-1$ 期的价值函数。接着我们可以求出 u_{T-2} 的最大化问题, 并导出价值函数 $F_{T-2}(x_{T-2})$, 依此类推。这种过程一度被认为太复杂而实用性不强, 从而产生了间接的计算方法。然而, 计算机技术的进步使这种后溯计算方法非常适用。后面章节中的一些数值模拟就采用了这种方法, 本章最后将提供这种方法的一个例子。

4.1.3 无穷期限

若决策问题没有固定的有限时间期界, 就没有最后的价值函数使我们可以依此向后进行计算。然而, 问题的递归结构不仅使理论分析变得简单, 也使得数值解法变得可行。关键的简化在于无穷期界所导出的式 (4-4) 和 t 以前的状态无关。当然, 当前状态 x_t 确实起作用, 但是日历日期 t 自身却没有影响。这使得利润流函数 π 、转移概率分布函数 Φ 以及贴现率 ρ 都与实际标记的日期 t 独立。许多经济应用满足或假设了这一条件。

在上面的假设下, 除了新的出发状态, 单阶段问题实际上就与上面的问题一样了, 因而价值函数对所有阶段都一样。因此, 我们将价值函数写成 $F(x_t)$, 函数下面关于时间的下标就不标准了。对任何时间 t 的贝尔曼方程变为

$$F(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F(x_{t+1})] \right\}$$

因 x_t 和 x_{t+1} 可能是任何可能状态, 将它们记成一般形式 x 和 x' 。则对任意的 x , 我们有

$$F(x) = \max_u \left\{ \pi(x, u) + \frac{1}{1+\rho} E[F(x') | x, u] \right\} \quad (4-5)$$

102 式中的期望是在已知当前阶段的 x 和 u 的条件下求得的。这就是无穷水平动态规划问题的递归贝尔曼方程。

因为没有固定的终止日期可以使我们采用后溯法求解，我们似乎没有一个明显的构造性的方法去找出价值函数 F 。而如果不知道函数 F ，我们就无法通过求解贝尔曼方程右边的最大化问题来找到最优控制 u 。因此我们需要保证式 (4-5) 的解的存在性以及找到这个解的方法。幸运的是，这两个问题并不很困难。

递归贝尔曼方程式 (4-5) 可看成一簇方程，只要知道 x 的每一个可能值中的一个，就知道未来的所有方程，即 $F(x)$ 的所有值。若 x 只取有限个离散值 x_i ，则式 (4-5) 可以看成是一个联立方程组，方程的个数与未知量 $F(x_i)$ 的个数相同。更一般地，我们可将式 (4-5) 看成泛函方程 (functional equation)，其中整体函数 (whole function) F 是未知的。

不管表面形式怎样，式 (4-5) 是非线性方程。最优选择 u 依赖于式 (4-5) 右边的期望，也就是说依赖于出现过的所有值 $F(x')$ (因为期望可以看成 $F(x')$ 依一定概率的加权平均数)。将最优选择 u 带回到式 (4-5)，所得到的结果可能是 $F(x')$ 的非线性函数。

一般来说，对非线性泛函方程我们并不知其是否有解，更不用说解的惟一性了。幸运的是，递归贝尔曼方程有一个非常特殊的结构，使得我们在经济应用的一些典型条件下可以证明方程 $F(x)$ 的解的存在性与惟一性。从应用上来考虑，这是一个技巧方面的问题。在本章附录 1 中，我们给出了证明的一个框架。有兴趣的读者可以阅读一些更理论化的著作 (Stokey, Lucas and Prescott, 1989, Chap. 4, and Chap.9)。但该技巧的证明确实有间接的回报，它实质上是一种可操作的求解方法。

我们可以用迭代的过程来求解上述递归贝尔曼方程。从任何一个猜测的真实价值函数 $F^{(1)}(x)$ 出发，将它用到式 (4-5) 右边，找到一个相应的最优选择 u^1 ， u^1 可表示为 x 的函数。将 u^1 带回方程，在方程右边得到 x 的一个新函数，记为 $F^{(2)}(x)$ 。将 $F^{(2)}(x)$ 作为一个新猜测的真实价值函数，重复上面的过程，可以得到新的最优选择 u^2 ，…这样得到的一系列猜测的价值函数 $F^{(3)}(x)$ ， $F^{(4)}(x)$ ，…收敛到真实的价值函数 $F(x)$ 。并且无论初始函数怎么选取，总可以收敛到真实的价值函数。当然，恰当猜测的初始函

数会使该过程以更少的步骤到达近似的期望精确度。

收敛的关键在于方程右边的因子 $\frac{1}{1+\rho}$ 小于 1, 它可以使每一步的猜测误差减小。只要利润流量是有界的, 选择 u 的误差将不会增大。逐步地, 将只剩下正确解。

这个过程很容易理解、编程和计算。这个过程可能会持续很长时间, 特别是当贴现率 ρ 很小时, 每一步只以很小的规模下降。然而, 当可以让其个人计算机整天不停地运转, 而不是尝试稀缺的资源时, 这已经不再是禁止性的考虑了。因而这个方法越来越广泛地应用于各个领域, 甚至是计量经济学的工作中。在本章后面我们将提供这个方法的一个数值例子。

4.1.4 最优停止

有一类动态规划对我们的应用非常重要。这里, 在任何阶段的选择都是二元变量 (即只有两个选择): 一个是取得最后回报而终止; 另一个是继续到下一阶段, 下一阶段另一组相同的二元选择仍然存在。在第 2 章和第 4.1 节的投资模型中, “停止” 对应于作出投资, 而 “继续” 对应于继续等待。在这里, “继续” 在该阶段内不产生任何利润流。然而, 在其他问题中可能会有相应的利润流。例如, 对于一家处于很恶劣的经济条件下的企业正在考虑关闭, 继续经营会产生利润流 (或正或负), 而终止会产生厂房和设备的一定的放弃价值, 以及企业必须支付给员工的全部解雇费、场地恢复和违约等的其他成本。

记 $\pi(x)$ 为利润流, $\Omega(x)$ 为终止回报, 则贝尔曼方程可写为

$$F(x) = \max \left\{ \Omega(x), \pi(x) + \frac{1}{1+\rho} E[F(x') | x] \right\} \quad (4-6)$$

对 x 值的某一范围, “终止” 可使式 (4-6) 右边最大化, 而对于其他的 x 值, “继续” 可使方程右边最大化。一般来说, 这个分割可以是任意的, 以 “终止” 为最优选择的区间可以与 “连续” 为最优选择的区间交换。然而, 大多数经济应用中有更复杂的结构。其中仅存在一个临界点 x^* , 使得 x^* 的一边 “终止” 为最优选择, 而 x^* 的另一边 “连续” 为最优选择。例如, 在第 2 章的投资问题中初始价格的临界值为 $P_0 = 249$ 美元, 因而在阶段 0, 在 P_0 的右边 (即初始价格大于 249 美元), 投资是最优选择; 而在 P_0 的左边 (初始价格小于 249 美元), 等待是最优选择。在我们所有的应用中都有类似的性质, 并且我们还可以从直观上判断在临界点的哪一边什么行

为是最优的。为帮助读者理解，我们来解释导致这一结果的一些条件。我们仅从直观上来讨论这一问题，更正式的讨论见附录 2。

为确定起见，我们来考察这样一个例子：在 $x > x^*$ 时，“连续”为最优选择；而在 $x < x^*$ 时，“终止”为最优选择。我们来检查什么条件使得 x 较大时，“连续”比“终止”更优。(1) 由“继续”而产生的即期利润相对于“终止”利润要高。因前者是流量，而后者为存量，我们将它们表示为可比较的形式。精确的条件 (1) 说明

$$\pi(x) + \frac{1}{1+\rho} E[\Omega(x') | x] - \Omega(x) \quad (4-7)$$

应随着 x 的增大而增大。(2) 任何当前的有利条件在经过一个很短的时间后不会突然变成了不利条件。这个条件要求随机过程 x 是正序列相关的，或具有一致性。更确切地说，若在一个阶段内 x 上升，则在下一阶段内条件分布 $\Phi(x' | x)$ 将赋予较大的值以更高的权重，即它将向右上方移动。(在技术术语中，这也就是“一阶随机占优” (first-order stochastic dominance) 的概念)。以上两个条件足以确保我们所需要的结论。

若式 (4-7) 随 x 的增大而减小，那么在 x^* 的左边，“继续”将是最优选择；而在 x^* 的右边，“终止”将是最优选择。注意到我们没有改变条件 (2)，即我们并没有要求随机过程 x 为负向一致性。

我们再强调一遍，这两个条件在我们所有的应用中都是满足的。条件 (1) 在每一个具体例子中很容易检验；条件 (2) 对常见随机游动过程，如布朗运动、均值回归过程的自回归过程以及我们所能想到的大多数经济应用过程都成立。

为简化我们的符号，以上我们没有考虑利润流和终止回报与时间 t 有关的情况。这个推广并不困难，这时临界点变成依赖于时间 t 的函数 $x^*(t)$ 。在下面的内容中我们主要考虑这一情形。

4.1.5 连续时间

回到第 4.1.2 中的一般控制问题，假设每个阶段的时间长度为 Δt 。在时间连续时，我们对 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限状态感兴趣。记 $\pi(x, u, t)$ 为单
105 时间的利润率，故在长为 Δt 的时间阶段上所获利润为 $\pi(x, u, t) \Delta t$ 。类似地，记 ρ 为单位时间的贴现率，因而在长为 Δt 的时间区间上贴现因子为

$$\frac{1}{1+\rho\Delta t}$$

现在, 贝尔曼方程式 (4-5) 变为

$$F(x, t) = \max_u \{ \pi(x, u, t) \Delta t + (1 + \rho \Delta t)^{-1} E[F(x', t + \Delta t) | x, u] \}$$

两边同乘以 $(1 + \rho \Delta t)$, 整理得

$$\begin{aligned} \rho \Delta t F(x, t) &= \max_u \{ \pi(x, u, t) \Delta t (1 + \rho \Delta t) \\ &\quad + E[F(x', t + \Delta t) - F(x, t)] \} \\ &= \max_u \{ \pi(x, u, t) \Delta t (1 + \rho \Delta t) + E[\Delta F] \} \end{aligned}$$

两边同除以 Δt , 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 可得

$$\rho F(x, t) = \max_u \left\{ \pi(x, u, t) + \frac{1}{dt} E[dF] \right\} \quad (4-8)$$

式中, $\frac{1}{dt} E[dF]$ 为 $\frac{E[\Delta F]}{\Delta t}$ 的极限。这里必须注意, 式中的期望是基于“当前”的 x 和 u 条件下的期望, 并且当计算 $F(x, t)$ 在区间 dt 上的变化时, 必须将 x 和 t 变化的影响都考虑进去。

贝尔曼方程的这个形式使获得利润流的权利是一种资产的观点变得清楚了, 且 $F(x, t)$ 就是其价值。式 (4-8) 的左边表示在单位时间内我们有一个正常收益, ρ 为贴现因子, 这使得决策者持有这种资产。在方程右边, 第一项为资产的当期回报或分红, 而第二项表示期望的资本收益率 (若为负值则表示发生损失)。因此, 方程右边表示持有这项资产在单位时间内所获的预期总收益。等式成立等价于无套利或均衡条件, 表示投资者持有这项资产的主动性。 u 的最大化表示现阶段对资本的应用是最优的。当然, 我们这里的最优性不仅指当期收益, 且着眼于未来价值。

式 (4-8) 右边的极限依赖于 x' 在时间 Δt 后的期望。有两类连续性的随机过程使得式 (4-8) 右边的形式便于进一步分析, 并且在“继续”区域内容易找到函数 $F(x, t)$ 的解。幸运的是, 这两种过程对大多数经济问题来说是很有用的。这两种过程就是我们在第 3 章中所讨论过的伊藤过程和泊松过程。在下面, 我们将在这两种过程的框架下进一步讨论动态规划问题。 106

上面的分析仅局限于一个很小的时间区间 $[t, t + dt]$ 上, 所得到的式 (4-8) 对任何时间 t 都成立。通过选择有限的时间期界 T 并利用终止回报, 或者令时间期界为无限并利用递归结构, 或者其他一些途径, 我们可以完成这种分析。在这些分析中, 解的存在性和惟一性的严格数学证明在连续时间下变得非常困难。由于这些细节并不影响我们的应用, 我们略去了它

们，并建议读者参阅弗莱明和里谢尔 (Fleming and Rishel, 1975) 或克里洛夫 (Krylov, 1980) 的论述。

从另一个角度来看，我们的数学被简化了。我们用一种非常不正规和启发式的方式处理了连续时间的极限，后面也将这样做。然而，很有必要提醒读者，一些非常难以处理而且必须以更严格的方式小心处理的问题被掩盖了。在离散时间下，我们规定在当前阶段 t 采取的行動 u_t 可以取决于当前状态 x 时的信息，而不是未来的随机状态 x_{t+1} 。在连续时间下，这两者结合在一起。我们必须小心谨慎，以便使选择不依赖于有关未来的信息，即使是“下一时刻”也不行。否则，我们将根据后见之明而行事，并且获得无限的利润。从技术上来看，允许不确定性在时间上是“右连续的”，而策略则在时间上是“左连续的”，就可以避免这种问题。那么，对该随机过程在某一时刻发生的任何跳跃，行动直到该时刻之后才会改变。关于这一点的讨论和严格的分析，参见达菲 (Duffie, 1988, pp.139-140) 的论述。

4.1.6 伊藤过程

推导出式 (4-8) 的一种简单形式的第一类连续时间随机过程是我们在第 3 章中讨论过的伊藤过程。第 3 章中的式 (3-11) 限定了其增量形式，这里我们仍然坚持这一点。但现在考虑漂移参数和扩散参数都依赖于控制变量 u 和状态变量 x ，则伊藤过程可表示为

$$dx = a(x, u, t)dt + b(x, u, t)dz \quad (4-9)$$

式中， dz 为标准布朗运动的增量。同以前一样，记利润流为 $\pi(x, u, t)$ ，企业（资产）价值记为 $F(x, t)$ 。

107 令 x 为时刻 t 已知的出发状态， $x' = x + dx$ 为经过一个小的时间区间 Δt 后的随机状态。第 3 章中的式 (3-25) 描述了用于这种过程的伊藤引理。将伊藤引理用于价值函数 F ，我们有

$$E[F(x + \Delta x, t + \Delta t) | x, u] = F(x, t) + [F_t(x, t) + a(x, u, t)F_x(x, t) + \frac{1}{2}b^2(x, u, t)F_{xx}(x, t)]\Delta t + o(\Delta t)$$

式中， $o(\Delta t)$ 为比 Δt 更快地趋于零的项。则“均衡回报”条件式 (4-8) 可表示为

$$\rho F(x, t) = \max_u \left\{ \pi(x, u, t) + F_t(x, t) + a(x, u, t) F_x(x, t) + \frac{1}{2} b^2(x, u, t) F_{xx}(x, t) \right\} \quad (4-10)$$

我们可将最优控制 u 看成为 x, t ; $F_t(x, t), F_x(x, t), F_{xx}(x, t)$; 以及决定 π, a, b 的函数形式的其他参数。将最优控制 u 的表达式代入式 (4-10) 的右边, 得到一个以 F 为因变量, x, t 为自变量的二阶偏微分方程。一般来说, 这个方程非常复杂。然而, 在很多应用中我们可采用解析方法或数值方法来求解。

这个方程的解法就是离散时间方程的解法的一般类推。若存在固定的时间期界 T , 并且终止回报 $\Omega(x_T, T)$ 给定时, 方程的边界条件为

$$F(x, T) = \Omega(x, T)$$

对所有 x 都成立。我们可以从时间 T 开始, 利用后溯方法找到全部更早时刻 $x(x < T)$ 的解 $F(x, t)$ 。事实上, 在实践中, 我们必须选择用于方程解的计算的 x, t 的离散步长。我们将提供这种过程的两个例子。本章后面有一个例子, 我们将直接计算动态规划问题; 在第 10 章中有一个例子, 我们将求偏微分方程本身的解。

若时间期界是无穷的, 且函数 π, a, b 不直接依赖于时间 t , 则价值函数也不依赖于时间 t 。这时式 (4-10) 变为以 x 为惟一自变量的常微分方程:

$$\rho F(x) = \max_u \left\{ \pi(x, u) + a(x, u) F'(x) + \frac{1}{2} b^2(x, u) F''(x) \right\} \quad (4-11)$$

注意我们采用了标准的微积分的记号, 即用 “'” 表示只有一个自变量的函数的全微分; 用下标表示含多个自变量的函数的偏微分。一般情况下, 我们采用这种记号, 但有时也会用下标表示全微分, 例如, 若函数符号因为其他原因需要用下标表示时。

在第 5 章~第 9 章的大多数投资模型中, 我们经常会求解形如式 (4-11) 的方程, 我们会逐步说明适当的求解方法。现在我们转向控制问题的一种特殊类型, 即伊藤过程的最优停止问题。这个问题在我们所有的应用中都十分重要。

4.1.7 最优停止和平滑粘贴

这里我们考虑一个二元决策问题。在每一时刻, 企业或持续其当前状态

得到利润流；或终止当前状态而得到终止回报。利润流 $\pi(x, t)$ 和终止回报 $\Omega(x, t)$ 可依赖于状态变量 x 和时间 t 。其中 x 服从伊藤过程：

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (4-12)$$

最明显的例子是一家企业决定是否终止经营，出售其设备而得到设备的放弃价值。投资决策可表示为这种形式：“继续”意味着等待，这时利润流为零；“终止”表示投资，并且终止的回报等于项目的未来回报减去其投资成本的期望现值。

直觉表明，对每一个 t 存在一个临界值 $x^*(t)$ ，在 $x^*(t)$ 的一端“继续”是最优的，而在其另一端“终止”是最优的。在第 4.1.4 中我们看到，为确保这一点，利润流和终止回报必须满足一定的条件。若表达式 (4-7) 是 x 的增函数，则对较大的 x ，“继续”相对来讲更有吸引力。在连续时间情形，若 x 服从伊藤过程，由附录 2 中的分析，对每一个 t ，有

$$\begin{aligned} & \pi(x) - \rho\Omega(x, t) + a(x, t)\Omega_x(x, t) \\ & + \frac{1}{2}b^2(x, t)\Omega_{xx}(x, t) + \Omega_t(x, t) \end{aligned}$$

这应是 x 的增函数。类似地，若上述表达式为 x 的减函数，则对较大的 x ，“终止”相对来讲更有吸引力。在我们的应用中，上面两个条件中总有一个成立。为了说明上的方便，在我们的例子中采用的是前一个条件成立。

给定上述条件，我们可将临界值 $x^*(t)$ 看成 t 的函数，则 $x^*(t)$ 的图像构成一条曲线将 (x, t) 平面分成两个区域，在曲线上方“继续”为最优选择^①；在曲线下方，“终止”为最优选择^②。当然我们事先并不知道曲线 $x = x^*(t)$ 的方程，它作为动态规划问题的解的一部分需要我们将它找出来。

109 现在，最优停止问题的贝尔曼方程式 (4-6) 变为

$$\begin{aligned} F(x, t) = \max \{ & \Omega(x, t), \pi(x, t) + (1 + \rho dt)^{-1} \\ & \times E[F(x + dx, t + dt) | x] \} \end{aligned}$$

在连续区域中，右边第二项较大。根据伊藤引理将上式展开并像以前那样化简，得到关于价值函数的偏微分方程：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}b^2(x, t)F_{xx}(x, t) + a(x, t)F_x(x, t) \\ & + F_t(x, t) - \rho F(x, t) + \pi(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (4-13)$$

① 称此区域为继续区域。——译者注

② 称此区域为终止区域。——译者注

对 $x > x^*(t)$, 上式成立, 我们还需找到在 $x = x^*(t)$ 时使上式成立的边界条件。由贝尔曼方程我们知道, 在停止区域有 $F(x, t) = \Omega(x, t)$, 由连续性得下述条件:

$$F(x^*(t), t) = \Omega(x^*(t), t) \quad (4-14)$$

对所有 t 成立。这个条件通常被称为“价值匹配”(value-matching) 条件。因为它要求未知函数 $F(x, t)$ 的值与已知的终止回报函数 $\Omega(x, t)$ 相同。

但边界本身是未知的: 在 (x, t) 空间中, 使偏微分方程式 (4-13) 成立的区域是内生的(由方程自身决定的)。该区域的边界, 即曲线 $x^*(t)$, 被称为自由边界。因此, 求解方程并决定其有效区域的全部被称为一个自由边界问题。

显然, 为解出 $F(x, t)$ 及边界 $x^*(t)$, 除条件式 (4-14) 外我们还需要第二个条件。偏微分方程的数学理论在这方面没有帮助; 应用于自由边界的这个条件依赖于各种具体的应用, 并且来自经济(或物理、生物等, 取决于具体的情形)方面的考虑。对我们这里考虑的问题来说, 正确的条件是要求对任意的 t , $F(x, t)$ 和 $\Omega(x, t)$ 的值作为 x 的函数在边界 $x^*(t)$ 相切, 即

$$F_x(x^*(t), t) = \Omega_x(x^*(t), t) \quad (4-15)$$

对所有 t 成立。这个条件称为“高阶联系”(high-order contact) 或“平滑粘贴”(smooth-pasting) 条件, 因为它不仅要求两个函数的值在边界处相等, 而且要求两个函数的导数或斜率在边界处也相等。

尽管连续性非常直观, 但斜率的连续性或平滑粘贴是值得注意和推敲的。然而有关这方面的讨论技巧性很强, 我们将它留在附录 3 中。这里我们仅说明它是怎么起作用的。

4.1.8 例: 机器的最优放弃

110

后面几章有很多关于动态规划及或有债权分析的应用。我们已经在一般的情形下非常详细地说明了这些理论, 下面提供的具体例子将是有用的。这里我们并没有详细地解答例子, 只在直观上给出了解的方法。我们希望用这个例子说明在特定背景下的各种步骤, 并为读者即将遇到的更详细的应用奠定基础。

假设这里的资产是用来生产虚拟产品的机器, 其寿命为 T 年。由于机器逐年磨损会降低其产出能力或需要更高的维护成本, 而且由于经济中其他方面的技术进步会使该机器与新机器相比其竞争力下降, 因此, 机器的盈利

能力在其寿命期间逐年降低。由于一般的商业周期或对虚拟产品的特殊性质的需求变化，对机器的生产能力还有随机性冲击。设状态变量 x 为现在运营的收益流，并假设其变化满足

$$dx = a dt + b dz$$

式中， $a < 0$ ，表示利润流在机器的寿命期间逐年下降。

在机器寿命的任何时间内，企业可淘汰机器。若当前利润流为负，则淘汰变得更有吸引力。然而，机器一旦被淘汰，它将很快锈蚀，收益流恢复时，重新启动它的成本非常大。因此企业必须预先看到将来的这些可能性才能作出淘汰的决策。为保持机器处于运营状态，企业可能会承受一定的损失。当然，若机器接近其使用寿命，则企业就不大可能再愿意接受损失，因而我们必须跟踪当前利润 x 和机器年限 t 这两个变量。从直观上来说，存在这样一条临界曲线 $x^*(t)$ ，当 x 低于这条曲线时机器就被淘汰。

实际用于计算的参数是 $T = 10$ 年， $\rho = 0.10$ /年， $a = -0.1$ /年和标准差 0.2 /年或方差为 0.04 /年。为获得数值解，我们利用布朗运动的离散逼近。取 $\Delta t = 0.01$ 或 3.65 天，相应地，利润变量 x 的每一个离散步的增量为 $\Delta h = b \sqrt{\Delta t} = 0.02$ 。

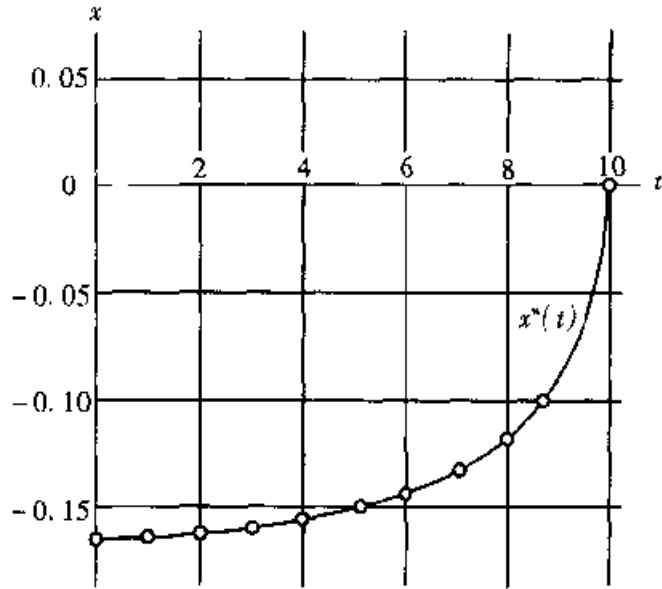
我们直接应用第 4.1.2 的方法解此动态规划方程。从无须考虑未来的时间 T 出发，采用后溯方法逐步求解。图 4—1 显示了问题的解。其中图 4—1(a) 显示了最优临界曲线—— (t, x) 空间内的自由边界 $x^*(t)$ 。在每一时刻，若当前 x 在曲线上方，则机器保持运营，其价值函数 $F(x, t)$ 满足对应于式 (4-13) 的微分方程，即

$$\frac{1}{2} b^2 F_{xx}(x, t) + a F_x(x, t) + F_t(x, t) - \rho F(x, t) + x = 0$$

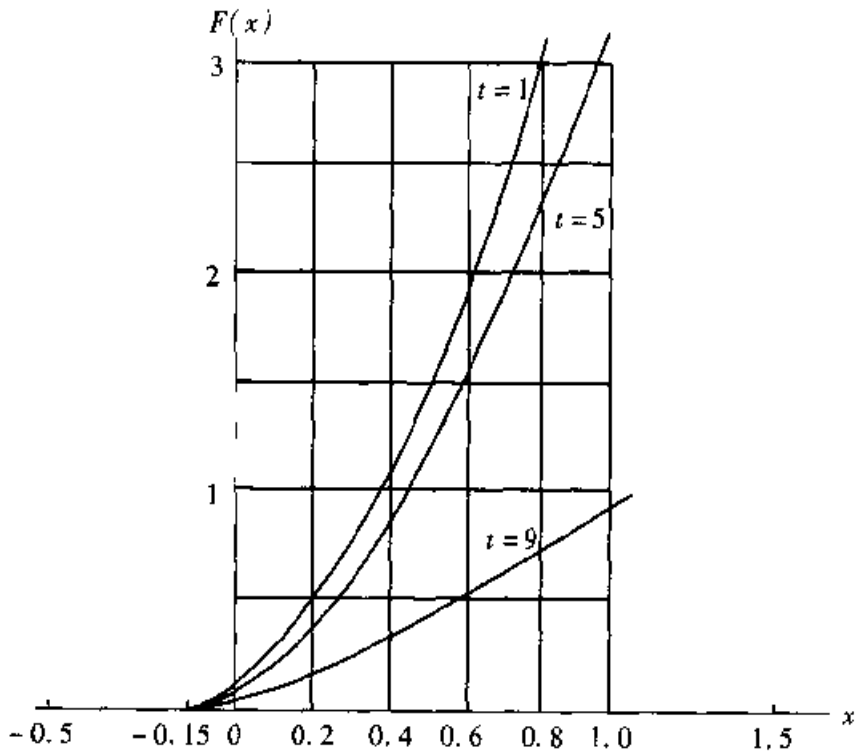
若 x 在曲线下方，机器被淘汰，终止价值为零。（通过指定一些其他的放弃价值函数，我们也可获得相应的解。）注意，当机器接近其物理寿命时，临界值接近于零——因为在机器寿命要终止时，我们没有理由保持一个引起损失的机器而期待未来的转变。机器剩余寿命越长，企业越愿意承受损失而保留机器（因 x 是随机的，未来可能会出现产品价格上涨等机会）。然而，这种效应最终会稳定下来。在 10 年期限内，对一个崭新的机器，企业愿意保持它的运营，即使当前损失是 0.15。

图 4—1(b) 显示了价值函数 $F(x, t)$ 对不同的 t 作为 x 的函数的图像。如我们所期望的， x 越大，机器的价值越高。然而，即使对 $x = 0$ ，机

器仍有价值，因为我们假定 x 是一个简单的布朗运动， x 的值在未来有可能会上升。注意到价值匹配和平滑粘贴的条件成立：对任意选定的 t ，当 x 接近 $x^*(t)$ 时， $F(x, t)$ 和 $F_x(x, t)$ 接近于零。



(a)



(b)

图4-1 折旧及放弃

当机器的物理寿命很长，实际上我们可把它看做无限时情况会怎样？这时可去掉时间 t ，而直接解关于 $F(x)$ 的方程，或在式 (4-13) 中将时间去掉，并将它写作一个常微分方程：

$$\frac{1}{2}b^2 F''(x) + aF'(x) - \rho F(x) + x = 0$$

利用价值匹配和平滑粘贴条件： $F(x^*) = 0, F'(x^*) = 0$ ，我们可找到方程的解 $F(x)$ 及临界值 x^* 。在第 5 章~第 7 章中，我们将更详细地论述这个过程，有兴趣的读者可试着求解此方程。我们的数值解是放弃机器的临界值 $x^* = -0.17$ 。这样，只要考虑到未来对吸收当前损失的意愿的影响，10 年的寿命差不多已接近无限。

4.1.9 泊松过程

第 3 章介绍了泊松（跳跃）过程。在一个很短的时间区间 dt 内，随机变量 x 发生跳跃的概率为 λdt ，其中 λ 为跳跃的平均发生率。若跳跃发生，其跃度为 $g(x, t)u$ ，其中 $g(x, t)$ 为已知函数， u 为随机变量。 x 不发生随机跳跃的概率为 $(1 - \lambda dt)$ ，这时 x 增加一个固定的量 $f(x, t) dt$ 。采用与布朗运动类似的记号，将它记为

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dq \quad (4-16)$$

式中， dq 为一随机变量，以 λdt 的概率等于 u ，以 $(1 - \lambda dt)$ 的概率等于零。

考虑状态变量服从泊松过程时的动态规划问题。我们用最优停止问题来说明这一点，因为这就是本书最通常的一种应用。同样， x 的值分为两个区域，停止区域（在这一区域中，“停止”为最优选择，终止价值为 $\Omega(x, t)$ ）和继续区域（至少在下一个小的时间区间 dt 内，“继续”为最优选择，即期利润流为 $\pi(x, t)$ ）。在这种情形下，资产价值的回报方程式 (4-8) 会有什么变化呢？我们来导出这种情形下的资产回报方程。

首先，假设 u 为一已知非随机常数，则 dF 的变化有两种可能，依赖于从 x 到 $x + g(x, t)u$ 的跳跃是否进入停止区域。若 $x + g(x, t)u$ 进入停止区域，则

$$dF = \lambda dt [\Omega(x + g(x, t)u) - F(x, t)] \\ + (1 - \lambda dt) [F(x + f(x, t)dt) - F(x, t)]$$

将上面的式子代入方程式 (4-8)，并令 $dt \rightarrow 0$ ，我们有

$$\begin{aligned} \rho F(x, t) = & \pi(x, t) + \lambda [\Omega(x + g(x, t)u) - F(x, t)] \\ & + F_x(x, t)f(x, t) \end{aligned} \quad (4-17)$$

若 $x + g(x, t)u$ 仍在继续区域中, 我们得到一个类似的方程, 只不过用 $F(x + g(x, t)u)$ 代替式 (4-17) 中的 $\Omega(x + g(x, t)u)$ 。更一般地, 当 u 为随机变量时, 必须同时考虑这两种情形, 通过对 u 的分布取期望我们可得到一个组合的方程。

注意一个新事实: 与伊藤过程情形中的偏微分方程式 (4-13) 不同, 式 (4-17) 并不局限于连续区域。我们不能对两个区域分开求解再将它们粘贴在终止边界上。因而对一般的泊松过程, 最优停止问题变得相当复杂。

然而, 我们有一些简单的情形。假设跳跃发生, 它总是跳到一个相同的已知点 x_0 。若 x_0 在连续区域内, 我们有

$$(\rho + \lambda)F(x, t) = \pi(x, t) + \lambda F(x_0, t)$$

若 x_0 在停止区域, 对 $\Omega(x_0, t)$ 我们有类似的方程成立。例如, x_0 对应利润流的突然停止, 则 $\Omega(x_0, t) = 0$ 且 $F(x, t) = \frac{\pi(x, t)}{\rho + \lambda}$ 。这里的泊松发生率 λ 的作用在于增加贴现率 ρ 。¹¹⁴

在后面的章节里, 我们将讨论不确定性服从一些易于分析的简单的泊松过程的应用。在一些例子中, 还有一些混合的模型, 其中变量 x 以一特定的失效率服从泊松跳跃, 并且在没有跳跃的时候服从伊藤过程。那么, 这些方程及它们的解就包含了我们这里所列出的特征。

4.2 或有债权分析

在研究最优停止问题的时候, 我们将 $F(x, t)$ 解释为资产的价值。该资产为其所有者赋予企业未来的利润流 $\pi(x, t)$ 。式 (4-8) 表示这样一个条件: 投资者持有这项资产很短的一段时间, 即期利润流和期望的资本收益构成总的投资回报率 ρ 。我们指定此贴现率是外生的, 但在实际中它也被解释为资本的机会成本。因此, 它应当等于投资者将资本投入具有相同风险特征的其他投资项目的回报率。现在, 我们更明确地阐述这一思想, 并将它推广以便提供一种更好的风险处理方法。

金融经济学已经发展出描述投资者决策并来自于这些决策的综合作用的

市场均衡及资产均衡的复杂理论。一个基本的假定是经济中存在大量可交易的具有不同回报率和不同风险的资产。为对一个新资产进行定价，我们可通过现有可交易资产的组合来复制新资产的回报和风险，则新资产的价格必须等于该组合的市场价格。否则，追求利润的套利者可利用二者的不一致，购买较便宜的资产通过重新包装，再以较高的价格卖出去，因而等价资产或资产组合（指两种资产的回报和风险都相同）的价格在均衡中不一致将不能保持。在我们的分析中处于继续区域内的资产可用这种方式进行分析。我们的大多数理论都是在不确定性可用伊藤过程来描述的框架下进行的。

4.2.1 资产组合的复制

我们从最简单的情形开始。假设利润流依赖于变量 x ， x 看做企业的产出价格。因为将处理的是回报的百分比增长，假设 x 服从几何布朗运动可使我们的分析更加方便。我们有

$$dx = \alpha x dx + \sigma x dz \quad (4-18)$$

式中， α 为增长率参数； σ 为比例方差参数； dz 为标准维纳过程的增量。在后面还可将此进一步推广。

假设企业的产出本身可作为一种资产在金融市场上交易。如产出为石油、铜等商品时，这在理论上是可行的。后面我们将证明，只要 x 的风险，即式 (4-18) 中的 dz 项能够用某一可交易资产或资产组合复制，则上述假设成立。

同任何资产一样，只有该产出能产生充分高的回报时，投资者才持有该项资产。部分回报来自于期望的价格增长 α ；另一部分来自于直接分红（如产品可能是产出更多木材的树木）或间接分红（如石油或铜的持有者可能是以该产品为投入品的企业，它发现持有该种产品的存货要比依靠现货市场好，这时的分红是隐性的“便利收益”（convenience yield））。我们将在第 5 章和第 6 章更详细地讨论这种便利收益，这里仅把它看成一种红利，并记其比例为 δ 。令 $\mu = \alpha + \delta$ ，表示总的期望回报率。

这个期望回报必须足以弥补持有该项资产所带来的风险。当然该风险不是这些有影响的风险，而仅是不可分割的风险。整个市场组合提供了最大的多样性，因此，是资产回报率和整个市场组合的协方差决定了风险贴息。

通过分析，我们将假设无风险回报率 r 是外生决定的，如政府债券的回报率。^[3]由资本资产定价模型（CAPM），得出均衡的基本条件为

$$\mu = r + \phi\sigma\rho_{xm} \quad (4-19)$$

式中, ϕ 为总体的市场参数(风险的市场价格), 在我们的分析中它是外生变化的; ρ_{xm} 为特定资产 x 的回报与整个市场组合 m 的回报间的相关系数,^[4]

利用已知价值的可交易的资产来复制企业的回报和风险特征, 我们找到利润流为 $\pi(x, t)$ (实际上是赋予其所有者获得利润流的资产的价值) 的企业价值 $F(x, t)$ 。特别地, 考虑投资 1 美元到无风险资产中, 同时也购买该企业 n 单位的产品, 我们将寻求合适的 n 来获得所要的复制。这个组合成本为 $(1 + nx)$ 美元。持有该组合一个很短的时间区间 dt , 在这段时间里, 无风险资产有确定的回报 $r dt$, 而其他资产支付红利并获得随机的资本收益。因而所投资的每 1 美元的总收益为

$$\frac{r + n(\alpha + \delta)x}{1 + nx} dt + \frac{\sigma nx}{1 + nx} dz$$

将它与持有该企业所有权相同的很短一段时间区间 dt 的价值相比较。首先要花费 $F(x, t)$ 购买企业, 所获得的分红就是收益 $\pi(x, t) dt$ 。若作出初始决策时, x 已知, 其中就没有不确定性。^[5] 该项资产同样产生一个随机的资本收益, 根据伊藤引理, 我们有

$$dF = [F_t(x, t) + \alpha x F_x(x, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx}(x, t)] dt + \alpha x F_x(x, t) dz$$

投资的每 1 美元收益为

$$\frac{\pi(x, t) + F_t(x, t) + \alpha x F_x(x, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx}(x, t)}{F(x, t)} dt + \frac{\alpha x F_x(x, t)}{F(x, t)} dz$$

如果我们的组合复制了拥有该企业的风险(即 dz 项的系数相同), n 必须满足

$$\frac{nx}{1 + nx} = \frac{x F_x(x, t)}{F(x, t)}$$

然而, 在市场中风险相同的资产必须获得相同的回报, 因而上述选择必须确保

$$\frac{\pi(x, t) + \alpha x F_x(x, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx}(x, t)}{F(x, t)} = \frac{r + n(\alpha + \delta)x}{1 + nx}$$

将 $\frac{nx}{1 + nx}$ 代入上式, 右边变为

$$r \left[1 - \frac{x F_x(x, t)}{F(x, t)} \right] + (\alpha + \delta) \frac{x F_x(x, t)}{F(x, t)}$$

化简, 回报方程变为关于价值函数 F 的偏微分方程:

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x,t) + (r-\delta)xF_x(x,t) + F_t(x,t) - rF(x,t) + \pi(x,t) = 0 \quad (4-20)$$

式(4-20)与利用动态规划方法推导出的式(4-13)惊人地相似。事实上,若我们在动态规划中采用 $a(x,t) = \alpha x$, $b(x,t) = \sigma x$ 的几何布朗运动,得到的结果几乎完全一样。惟一不同的是无风险利率 r 代替了外生的贴现率 ρ ,而 F_x 的系数由 α 变成了 $(r-\delta)$ 。在第4.3节中我们将讨论动态规划法与或有债权分析之间的这种对应关系。

推导出相同结果的另一种等价方法是构造一个由该企业 and n 单位资产 x 的空头所组成的投资组合,选择 n 使得这个组合是无风险的。这在代数上更简单一些,在以后我们一般采用这种方法。然而,前面所给出的方法更直接、更清楚地说明了构造复制组合的概念。

4.2.2 生成资产的应用

即使 x 的风险不能直接在市场上交易,如果某种资产或资产组合描述或生成了 x 的不确定性,这种资产或资产组合能够交易也就足够了。下面说明怎样进行这一过程。将 x 推广到服从式(4-12)所示的任一伊藤过程,我们展示用另外的方法来复制 x 的风险。

假设存在一种可交易的资产,其随机变动与 x 的随机过程完全相关。(这种可交易资产可以是股票或期货合约之类的一种简单资产,也可以是简单资产的动态组合,即资产组合的内容可不断地调整,使得组合的价值与 x 的过程完全相关。)为使读者注意参加交易的资产描述或生成了 x 的风险,我们称其为生成的资产(即复制的资产)。记 X 为其市场价格,则随机过程 X 必然有以下形式(与 x 的形式相同):

$$dX = A(x,t)Xdt + B(x,t)Xdz \quad (4-21)$$

118 注意以下两点:(1)系数 $A(x,t)$ 和 $B(x,t)$ 是状态变量 x 的函数,而不是用来复制的资产 X 的函数。这是为了与状态变量包含了经济体现有状态的所有信息的解释保持一致。(2)资产价格变动程式(4-21)的系数 $A(x,t)$ 和 $B(x,t)$ 与状态变量的演变过程式(4-12)中的系数 $a(x,t)$ 和 $b(x,t)$ 并无联系;但若 X 与 x 的随机变化一致的话,两个维纳过程中的增量 dz 是一样的。(当我们说两个过程是一致的话,表示这两个过程有相同的实现,而不仅是有相同的概率分布。)

假设用来复制的资产也以比例 $D(x, t)$ 支付红利, 则投资于该资产的每 1 美元在从 t 到 $t + dt$ 的很短一段时间内产生的总回报为

$$[D(x, t) + A(x, t)]dt + B(x, t)dz$$

下面我们来看当回报率为多大时投资者才愿意持有这种复制资产。由资本资产定价模型的公式, 所需的期望回报率 $\mu_X(x, t)$ 为

$$\mu_X(x, t) = r + \phi \rho_{xm} B(x, t) \quad (4-22)$$

为理解这一点, 将它与以前关于 x 的公式(4-19)比较。风险的市场价格 ϕ 是一个总量参数, 因而它在两种情形下是相同的。 X 的回报率的标准偏差为 $B(x, t)$, 因两个过程的增量 dX 和 dx 是完全相关的, 故 X 的回报率与整个市场的回报率之间的相关系数与 x 的回报率与整个市场的回报率之间的相关系数相同, 都是 ρ_{xm} 。最后, 注意在资产 X 被实际持有的均衡状态下, 我们必须有

$$\mu_X(x, t) = D(x, t) + A(x, t) \quad (4-23)$$

现在, 考虑一个组合, 它由企业 and X 的 n 单位的空头构成, 购买该组合需要花费 $[F(x, t) - nX]$ 美元。在很短的时间区间 dt 内持有该组合, 这段时间内企业支付红利 $\pi(x, t)dt$, 空头的持有者必须将此红利支付给多头的持有者。该组合的资本收益为

$$dF - n dX = \left(F_t + aF_x + \frac{1}{2} b^2 F_{xx} - nAX \right) dt + (bF_x - nBX) dz$$

这里我们利用了伊藤引理, 为简化起见, 省略了对函数的讨论。为使该组合是无风险的, dz 的系数必须为零, 即必须选取 $n = \frac{bF_x}{BX}$ 。

完成这一步后, 现在我们令该组合的期望回报率等于无风险回报率, 即 $r(F - nX)dt$ 。这样做并化简, 找到 $F(x, t)$ 所满足的偏微分方程:

$$\frac{1}{2} b^2(x, t) F_{xx}(x, t) + \left\{ a(x, t) - \left[\frac{b(x, t)}{B(x, t)} \right] [\mu_X(x, t) - r] \right\} F_x(x, t) - rF(x, t) + F_t(x, t) + \pi(x, t) = 0 \quad (4-24)$$

这与以前得到的方程式(4-20)基本相同。

采用或有债权定价方法的优点是: 这些方程的系数可由特定的模型自身得到, 如 $a(x, t)$; 也可以观察到或从市场中估计出来, 如 $\mu_X(x, t)$ 。因此, 可以解出上述偏微分方程而得到企业的价值。

4.2.3 平滑粘贴

上面的分析仅假设在很短的一段时间 dt 内持有某些资产。在时间 $t + dt$

后的情况没有涉及，但这并不影响所导出的偏微分方程式(4-24)或式(4-20)的有效性。然而，为求解这些方程我们需要边界条件，因此，有必要关注更长的时间跨度的情况。

如果前面所评价的企业具有固定的时间期界 T ，即在时间 T 企业会被迫终止而取得终止回报 $\Omega(x_T, T)$ ，我们可以在 $F(x, T) = \Omega(x, T)$ 对所有的 x 都成立的边界条件的约束下求解上述偏微分方程。类似地，如果在某些时刻 t ($t < T$)，状态变量 x 达到临界值时企业也会被迫终止。这时的边界条件为

$$F(x^*(t), t) = \Omega(x^*(t), t)$$

对所有 t 都成立。这正是前面讲动态规划时所发现的价值匹配条件式(4-14)。

有时，在知道其终止回报 $\Omega(x, t)$ 之后，企业可最优地选择其终止时间。这种决策是为了使企业的价值最大化。由动态规划的分析，我们知道这种选择确定了一个临界值或自由边界 $x^*(t)$ ，这时所需要的是“平滑粘贴”条件式(4-15)：

$$F_x(x^*(t), t) = \Omega_x(x^*(t), t)$$

对所有 t 都成立。

4.2.4 泊松过程

120 假设状态变量 x 服从式(4-16)中的泊松跳跃过程而不是伊藤扩散过程，我们能否像前面一样构造一个复制组合并得到类似于式(4-20)的一个方程？

大体上也许可以找到一种资产复制 $x(t)$ 的随机变化。例如，若 $x(t)$ 为石油的价格（假设石油价格服从泊松过程），用于复制的资产可以是临近期限的石油期货合约。然而，更一般的是我们必须用动态资产组合来复制 $x(t)$ 。该组合的成分可以随 $x(t)$ 的变化而连续地调整。若 $x(t)$ 服从扩散过程，这样做是可行的，因为 x 的路径本身是连续的，当 x 沿时间从一个值移动到另一个值时，动态组合能够连续地调整。若 x 为具有离散跳跃的泊松过程，这样做则是不可行的。

这说明当不确定性由泊松过程来描述时，我们通常需要下面两个假设中的一个：(1) 泊松过程 x 的随机变化和市场组合无关，这时对风险没有作出调整，式(4-20)仍然成立，只不过 $\delta = \gamma - \alpha$ （注意，这等价于在动态规划中贴现率等于无风险利率 r ）。(2) 作为选择，我们也可使用外生贴现率为 ρ 的动态规划。

4.3 两种方法之间的联系

现在，读者应该看到动态规划与或有债权评价之间的平行关系。动态规划的价值函数与或有债权分析中的资产价格满足非常相似的偏微分方程。动态规划的贝尔曼方程可以根据资产价值和投资者持有该种资产的愿望来解释。或有债权分析中的边界条件来自于这种思想：投资者希望最优地选择期权的执行时间来最大化他们的资产价值。

然而，这两种方法之间也有一些差别。动态规划方法由一个特定的贴现率 ρ 出发， ρ 是外生的且是目标函数的一部分。在或有债权分析中，所要求的资产回报率是由资本市场的整体均衡条件推导出来的。只有无风险利率 r 被认为是外生的（甚至在更一般的均衡分析水平中， r 也可被认为是内生的）。因此，或有债权分析方法提供了对贴现率的一种更好的处理方法。 121

权衡这种考虑，或有债权分析要求在市场中存在充分多的风险资产。我们试图评价的资产回报中的随机成分 dz 实际上可以由一些可交易资产（或资产的动态组合）的回报中的随机成分来复制。这是一个很强的要求——我们不仅需要该随机成分服从相同的概率分布，而且要求它们完全相关，即一个过程的每一条路径（实现）可由另一个过程完全复制。动态规划没有做这种要求，如果风险不能市场中交易，目标函数可简单地反映决策者对风险价值的主观评价。目标函数通常被假定为利用贴现率 ρ 算出的效用函数流的现值形式。这在它自身是一个限制，但它也能够被推广。当然，我们对个人偏好没有客观信息或可观察到的信息，因此，对这个理论的检验会比较困难。

因此，我们看到，这两种方法都具有各自的优点和缺点，综合两种方法能解决大量的应用问题。在特定的应用中，其中一个可能比另一个在实践操作中更方便，不同的读者也可能感觉其中一种方法更好。但是这两种方法在它们共同的基础上没有原则上的差别。在后面的章节中，我们会经常平行地使用这两种方法，为方便起见我们也会经常从一种方法转到另一种方法。例如，第5章中我们先采用动态规划再使用或有债权分析解决这样一个很基本的投资问题——何时作出沉没支出以便获得现值为 V 的工厂，其中 V 服从几何布朗运动。这使我们可以更详细地探究两种方法之间的差别。

4.3.1 等价于风险中性的估价

对动态规划和或有债权评价之间的一种更深入的探讨产生了记录和解释

资产价值的偏微分方程解的一种有用方法。我们用已熟悉的框架来阐明这一点。假设一家企业的利润流 $\pi(x, t)$ 依赖于状态变量 x ，并且我们要求该企业在有限时间期界 T 终止，其终止收益为 $\Omega(x_T, T)$ 。假设状态变量服从几何布朗运动：

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz$$

这些特殊的假设使得我们可以用最简单的方式来说明，但是读者可以看到其基本思想对更一般的情形仍然适用。

假设在时间 t 的状态为 x 。记 $F(x, t)$ 为企业的价值，即获得一定的利润流的权利。我们分别用本章所介绍的两种形式（动态规划和或有债权分析）来导出 $F(x, t)$ 。

首先使用动态规划。设外生的贴现率为 ρ ，则 $F(x, t)$ 为式 (4-25) 所表示的期望现值：

$$F(x, t) = E_t \left[\int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} \pi(x_\tau, \tau) d\tau + e^{-\rho(T-t)} \Omega(x_T, T) \right] \quad (4-25)$$

式中， E_t 为期望是基于时刻 t 时的信息。

考虑时刻 dt 后的状态，状态变量变为 $(x + dx)$ ，相应地，资产价值变为 $F(x + dx, t + dt)$ 。将它表示为时刻 t 时的等价单位，我们要乘上一个贴现因子 $e^{-\rho dt}$ 。另外， dx 为时刻 t 时预期的增量，故我们必须取期望。因此

$$F(x, t) = \pi(x, t)dt + e^{-\rho dt} E_t [F(x + dx, t + dt)] \quad (4-26)$$

我们把从 t 到 T 的整个时间区间分成了两部分——很短的时间区间 dt 及其后的时间区间。这个思想是动态规划中的全部本质，故式 (4-26) 是一个贝尔曼方程，只不过是一个特例。在这个例子中，因为在时间区间 dt 内无行动决策发生，因而在右边没有取最大化。

利用伊藤引理将式 (4-26) 右边展开，略去在 $dt \rightarrow 0$ 时比 dt 更快地趋于零的项，可得

$$\begin{aligned} & \pi(x, t)dt + e^{-\rho dt} E_t [F(x + dx, t + dt)] \\ &= \pi(x, t)dt + (1 - \rho dt) [F(x, t) + F_t(x, t)dt + F_x(x, t)\alpha x dt \\ & \quad + \frac{1}{2} F_{xx}(x, t)\sigma^2 x^2 dt] \\ &= F(x, t) + \left[\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 F_{xx}(x, t) + \alpha x F_x(x, t) + F_t(x, t) - \rho F(x, t) \right. \\ & \quad \left. + \pi(x, t) \right] dt \end{aligned}$$

将上式代入式(4-26)并化简,我们得到 $F(x, t)$ 满足下列偏微分方程:

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x, t) + \alpha xF_x(x, t) + F_t(x, t) - \rho F(x, t) + \pi(x, t) = 0 \quad (4-27)$$

这正是关于几何布朗运动的动态规划方程。其边界条件为

$$F(x, T) = \Omega(x, T) \quad (4-28)$$

对所有 t 都成立。根据构造可知表达式(4-25)满足此方程,换言之,式(4-25)即为该偏微分方程的解。

如果我们从推导出的方程及其边界条件出发,再寻求该方程的解,要找出这个解是非常困难的。但是,这是一个很幸运也非常例外的情形,我们在导出方程之前就已知道了方程的解式(4-25)。当然要计算式(4-25)中的期望也是一件很麻烦的工作。我们知道,给定 t 时的初始状态 x ,在未来任意时刻的状态是服从对数正态分布的。而且,对 $\tau \geq t$, $\log x_\tau$ 的均值为 $\log x + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(\tau - t)$, 方差为 $\sigma^2(\tau - t)$ 。若 $\pi(x, t)$ 和 $\Omega(x, t)$ 具有很方便的函数形式,如幂函数或指数函数,则有可能得到清晰的表达式(4-25),否则我们只能求助于数值解法。然而,我们很快就会看到,表达式(4-25)有一些概念上的作用。

式(4-25)是具有边界条件式(4-28)的偏微分方程式(4-27)的解,这个结果实际上是费曼-柯科(Feynman-Kac)公式的一个特例。关于这一点的更详细、更严格的讨论可见卡拉扎斯和施里夫(Karatzas and Shreve, 1988, p. 267)的论述。^[6]

现在我们从或有债权评价的角度来考虑企业的价值 $F(x, t)$ 。前面我们已经说明企业的价值服从偏微分方程式(4-20):

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x, t) + (r - \delta)xF_x(x, t) + F_t(x, t) - rF(x, t) + \pi(x, t) = 0$$

注意 r 为无风险利率,且 $\delta = \mu - \alpha$ 为资产 x 的分红或便利收益。边界条件仍为式(4-28)。

这里我们事先并不知道方程的解。然而,利用这一偏微分方程与由动态规划方法导出的偏微分方程式(4-27)在形式上的相似性,我们可以得到其解:后者的外生贴现率 ρ 现在由无风险市场利率来代替;几何布朗运动中 x 的增长率 α 由 $r - \delta$ 代替。换句话说,如果假设 x 服从增长率为 $\alpha' = r - \delta$ 的几何布朗运动,为对未来回报估价,我们可用无风险利率 r 将其贴

现。因而解可以写为

$$F(x, t) = E_t' \left[\int_t^T e^{-r(\tau-t)} \pi(x'_\tau, \tau) d\tau + e^{-r(T-t)} \Omega(x'_T, T) \right] \quad (4-29)$$

式中, x' 为一个人为变量, 在时刻 t 与 x 的初始值相同, 但服从一个新的几何布朗运动:

$$dx' - a'x' dt + \sigma x' dz \equiv (r - \delta)x' dt + \sigma x' dz \quad (4-30)$$

期望 E_t' 是针对随机过程 x' , 并且基于在时刻 t 的信息。

这里, 我们就有了“等价于风险中性的估价”的一个实例。等价风险中性估价在金融经济学中有非常广泛的应用和兴趣。更严格和更一般的讨论见达菲 (Duffie, 1988, Section 17) 与黄和莱茨伯格 (Huang and Litzenberger, 1990, Chap. 8) 的论述。

4.3.2 例子

我们用一些简单例子来说明这个过程。在每种情形下, 我们求初始价值 $F(x, 0)$ 。

首先考虑没有利润流的最简单情形, 并假定终止利润为 $\Omega(x) = x$ 。则

$$F(x, 0) = e^{-rT} E_0[x_T]$$

采用等价于风险中性的观点, 过程 x' 的期望为

$$E_0[x'_T] = x e^{(r-\delta)T}$$

因此

$$F(x, 0) = e^{-rT} x e^{(r-\delta)T} = x e^{-\delta T} = e^{-\mu T} x e^{aT}$$

换句话说, 我们认识到 x 以速率 a 增长, 以风险调整利率 μ 为条件贴现其未来值。显而易见, 这有助于以一种简单的方式说明一般公式并建立起读者对它们的信任。

125 下面假设 $\Omega(x) = x^\beta$ (β 已知), 利用对数正态分布的标准结果:

$$E_0[(x'_T)^\beta] = x^\beta \exp \left[\beta(r-\delta)T + \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta-1)T \right]$$

及

$$F(x, 0) = x^\beta \exp \left[\left(\frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - r \right) T \right]$$

对 $\beta=1$, 上式等于 $x e^{-\delta T}$, 与上面结果一样; 对 $\beta=0$, $F(x, 0) = e^{-rT}$; 收益 $x^0 \equiv 1$ 是无风险的, 因此, 贴现是在无风险利率 r 下进行的。最后,

若 β 为下述二次方程的根:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - r = 0$$

则 $F(x, 0) = x^\beta$ 。这里增长恰好被贴现所抵消, 因而我们可在初始状态 x 下评价终止收益函数, 并称其为资产价值。在第6章及其他地方我们将用到这一结果。

对一个更具欺骗性的例子, 考虑风险中性和无贴现的情形, 对数值 a , b 定义:

$$\Omega(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这时 $F(x, 0)$ 为几何布朗运动从初始状态 x 出发, 在时间 T 后进入区间 (a, b) 的概率。令 $b \rightarrow a$, 我们得到极限 $\frac{F(x, 0)}{b-a}$, 这正是相应的概率密度。

我们的每个方法都显示出价值函数满足下述偏微分方程:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx}(x, t) + \alpha x F_x(x, t) + F_t(x, t) = 0$$

换句话说, 作为资产定价公式的推论, 我们已经推导出柯尔莫哥洛夫向后方程 (见第3章附录)。^①

4.4 文献导引

动态规划是由理查德·贝尔曼等人在20世纪50年代发展起来的。它是经济分析和运筹学中的标准工具, 而且在一些教科书中得到讨论。对此经济学家有特别简单的解释, 参见迪克西特 (Dixit, 1990, Chap.11) 的论述。其他好的解释可以在德赖弗斯 (Dreyfus, 1965)、哈里斯 (Harris, 1987) 及卡米恩和施瓦茨 (Kamien and Schwarz, 1991) 的书中找到。一个非常突出且非常完整的处理, 同时还包括在动态一般均衡理论、增长理论、劳动经济学及其他主题方面的一些应用, 参见斯托基、卢卡斯和普雷斯科特 (Stokey, Lucas and Prescott, 1989) 的论述。

^① 注意 $F(x, 0)$ 为几何布朗运动从初始状态 x 出发, 在时间 T 后进入区间 (a, b) 的概率, 上式正是柯尔莫哥洛夫向后方程。——译者注

在本书中，我们仅在布朗运动的最优控制和停止背景下利用动态规划。更详细但仍然停留在直觉水平上的著作，参见迪克西特（Dixit, 1993a）的论述；非常严格的处理，参见弗莱明和里谢尔（Fleming and Rishel, 1975）及克里洛夫（Krylov, 1980）的论述。

或有债权分析是沿着布莱克和斯科尔斯（Black and Scholes, 1973）与默顿（Merton, 1971, 1973）的先驱性文章而系统地发展起来的，尽管萨缪尔森（Samuelson, 1965）的贡献值得提起，因为他在那篇文章中引入了随机微积分和平滑粘贴条件。或有债权分析现在已经成为金融经济学文献中地位显赫的部分，而且有专门的著作，如考克斯和鲁宾斯坦（Cox and Rubinstein, 1985），霍尔（Hull, 1989）以及加罗和拉德（Jarrow and Rudd, 1983）的论述。初学者可以从鲁宾斯坦（Rubinstein, 1987）和瓦里安（Varian, 1987）在《经济观察杂志》（Journal of Economic Perspectives）的一个特殊座谈会上的发言中受益。考克斯和罗斯（Cox and Ross, 1976）及考克斯、罗斯和鲁宾斯坦（Cox, Ross and Rubinstein, 1979）利用了我们在本章前面所讨论过的布朗运动的随机游动表达式阐述了或有债权。更高级的处理包括达菲（Duffie, 1988, 1992）、多珊（Dothan, 1990）及黄和莱茨伯格（Huang and Litzenberger, 1990）的论述。

关于等价于风险中性定价及相关观点的先驱性严格处理，参见哈里森和克雷普斯（Harrison and Kreps, 1979）的著作。这些观点的起源可在阿罗（Arrow, 1970）与考克斯和罗斯（Cox and Ross, 1976）的著作中找到。

伯恩斯坦（Bernstein, 1992）的著作是关于这些观点的发展的一种极好的且非常有趣的说明。

附录

1. 递归动态规划

这里我们概略地证明无穷期界动态规划的贝尔曼方程式（4-5）的解的存在性和惟一性。为方便读者，我们给出贝尔曼方程：

$$F(x) = \max_u \left\{ \pi(x, u) + \frac{1}{1+\rho} E[F(x') | x, u] \right\} \quad (4-5)$$

127 我们寻求满足式（4-5）的函数 $F(x)$ 。将式（4-5）右边看做一个算子或

看做函数的函数。给定函数 $F(x)$ ，右边定义了一个关于 x 的新函数。当进行计算时，其解是一个返回自身的函数，用技术性术语来讲，我们找到了该算子的一个不动点。

下面进行迭代过程。从任意选择的初始函数 $F^{(1)}(x)$ 出发，将它用到式 (4-5) 右边，这时右边全部为已知，因此对每个 x ，利用算子作用可得到一个新函数 $F^{(2)}(x)$ 。将算子作用于 $F^{(2)}(x)$ ，得到下一迭代 $F^{(3)}(x)$ ，依次进行下去。这样得到的函数序列 $F^{(m)}(x)$ 在 $m \rightarrow \infty$ 时的极限是什么呢？

假设不从 $F^{(1)}(x)$ 出发，我们选择一个新的初始函数 $Z^{(1)}(x) = F^{(1)}(x) + k$ ，式中 k 为正常数。将其代入式 (4-5) 右边。首先注意到：

$$(1 + \rho)^{-1} E[Z^{(1)}(x') | x, u] = (1 + \rho)^{-1} \{ E[F^{(1)}(x') | x, u] + k \}$$

这样，在右边我们得到了额外的一项 $(1 + \rho)^{-1} k$ 。这一项既不改变 u 最大化时的选择，也不改变其他项的值。因此，对所有的 x ，算子作用于 $Z^{(1)}(x)$ 将产生一个新函数：

$$Z^{(2)}(x) = F^{(2)}(x) + (1 + \rho)^{-1} k$$

继续这个过程，在第 m 步：

$$Z^{(m)}(x) = F^{(m)}(x) + (1 + \rho)^{-(m-1)} k$$

因此，选择初始函数时，变化 k 的误差将随着迭代步数的增加以几何速度减少。在我们的迭代中，每一步减少的比例为 $\frac{1}{1 + \rho}$ 。因此，迭代极限将收敛到同一个函数 $F(x)$ ，而与初始函数的选择无关。这在直观上很清楚，严格的证明也不困难。在极限条件下， $F^{(m+1)}(x)$ 变得与 $F^{(m)}(x)$ 相同，极限方程 $F(x)$ 是迭代步骤的不动点。很显然，它也满足泛函方程式 (4-5)。这个误差以几何速度递减的性质（称为“收缩映射性质”（contraction mapping property））使得我们可以证明解的存在性和惟一性，并且迭代过程也提供了数值解法。

2. 最优停止区域

128

考虑只有继续和停止的二元选择，其贝尔曼方程由式 (4-6) 给出：

$$F(x) = \max \left\{ \Omega(x), \pi(x) + \frac{1}{1 + \rho} E[F(x') | x] \right\} \quad (4-6)$$

对于使式 (4-6) 右边的最大值取第二项的 x 值来讲，即

$$\pi(x) + \frac{1}{1 + \rho} \int F(x') d\Phi(x' | x) > \Omega(x)$$

“继续”为最优选择。当反向不等式成立时，立即“停止”为最优选择。我们将 x 区域的相应分割分别称为“继续区域”和“停止区域”。我们对这些区域的结构非常感兴趣。

对任意指定的 $\pi(x)$, $\Omega(x)$ 和 $\Phi(x'|x)$, 这些区域可以是任何次序的可变区间。因此, 对 x 值的最小范围, 继续是最优的; 而对超过该范围的 x , 停止是最优的。然后, “继续”又是最优的, 依次类推。然而, 在很多经济问题中, 我们希望对继续区域和停止区域能够由一个临界值 x^* 清楚地划分, 使得对 $x < x^*$, 继续为最优; 而对 $x > x^*$, 停止为最优 (或者相反)。我们来寻找回报与分布函数的适当条件, 使得上述划分成为可能。

在式 (4-6) 两端同时减去 $\Omega(x)$, 并记 $G(x) = F(x) - \Omega(x)$, 则我们有

$$\begin{aligned} G(x) &= \max \left[0, \pi(x) - \Omega(x) + (1 + \rho)^{-1} \int F(x') d\Phi(x'|x) \right] \\ &= \max \left[0, \pi(x) - \Omega(x) + (1 + \rho)^{-1} \int \Omega(x') d\Phi(x'|x) \right. \\ &\quad \left. + (1 + \rho)^{-1} \int G(x') d\Phi(x'|x) \right] \end{aligned} \quad (4-31)$$

我们做两个假设使得我们所需要的性质成立。

129

假设 1: 表达式

$$\pi(x) + (1 + \rho)^{-1} \int \Omega(x') d\Phi(x'|x) - \Omega(x)$$

是 x 的单调函数; 为确定起见, 假设它是单调增加的。

这正是在等待一阶段后停止与立即停止之间的价值差异。等待一阶段的可解释为可以等待直到最优停止时间的到来。如果函数是单调增加的, 我们希望对较大的 x , 继续是最优选择; 对较小的 x , 停止是最优选择。若函数是单调下降的, 则反之。

假设 2: 存在不确定性的正向一致性, 即 x 的当前值增加时, 关于未来状态 x' 的概率分布函数 $\Phi(x'|x)$ 也一致地增大。

如果假设 2 不成立, 经过短时期后较大的 x 在当前的相对优势可能变成劣势。一般来说, 这个假设对我们考虑的随机过程都是成立的。

给定上述两个假设, 式 (4-31) 中函数 $G(x)$ 的解必定是单调增加的。为说明这一点, 注意到右边的最大化算子中的第二项包括两个部分。第一部分正好是假设 1 的表达式:

$$\pi(x) - \Omega(x) + (1 + \rho)^{-1} \int \Omega(x') d\Phi(x' | x)$$

它已经直接被假设为单增的。第二部分，即积分部分为

$$(1 + \rho)^{-1} \int G(x') d\Phi(x' | x)$$

如果 $G(x)$ 是单增的，则它也是单增的。事实上，由假设 2， $\Phi(x' | x)$ 是关于 x 的单增函数以及 $G(x)$ 的单增性可知，第二部分是单调增加的。因此由一个单增函数出发，经过式 (4-6) 右边的算子作用后仍得到一个单增函数。故这个迭代的不动点，即方程式 (4-31) 的解也是单增的。^[7]

我们已经证明了式 (4-31) 中右边的第二项是单增的，因而存在惟一的点 x^* ，当且仅当 $x > x^*$ 时，它大于零。因此对 $x > x^*$ ，继续是最优选择；而对 $x < x^*$ ，停止是最优选择。

当时间连续时，我们必须用 ρdt 和 $\pi(x)dt$ 分别代替 ρ 和 $\pi(x)$ 。假设 $x' = x + dx$ ，且 x 服从几何布朗运动 $dx = \mu x dt + \sigma x dz$ 。用伊藤引理将 $\Omega(x')$ 展开并化简，这时假设 1 变成要求

$$\pi(x) - \rho \Omega(x) + \mu x \Omega'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \Omega''(x)$$

对 x 单调。

3. 平滑粘贴

这里我们考虑有限时间期界上的最优停止问题，其中状态变量服从伊藤过程。我们较正式地来论证价值匹配式 (4-14) 和平滑粘贴条件式 (4-15) 决定了分割继续区域和停止区域的自由边界。

在时间区间 dt 上，贝尔曼方程式 (4-6) 为

$$F(x, t) = \max\{\Omega(x), \pi(x, t)dt + (1 - \rho dt)F(x, t) + E[dF]\}$$

如果右边大括号中的第一项较大，则停止是最优选择；反之，继续为最优选择。

固定一个特殊的 t ，为确定起见，假设在我们考虑的问题中连续区域为 $\{x > x^*(t)\}$ ，停止区域为 $\{x < x^*(t)\}$ 。如果条件式 (4-14) 不成立，即 $F(x^*(t), t) < \Omega(x^*(t), t)$ 。由连续性知，在 $x^*(t)$ 右边一个很小的区间内， $F(x, t) < \Omega(x, t)$ 。而贝尔曼方程中右边第二项与 $F(x, t)$ 仅相差一些关于 dt 的项，因而对充分小的 dt ，我们可使右边第二项在这一范围内小于 $\Omega(x, t)$ ，于是立即停止就是最优选择，这与 $\{x > x^*(t)\}$ 作为临界值的定义相矛盾。下面假定 $F(x^*(t), t) < \Omega(x^*(t), t)$ ，由

连续性知, 在 $x^*(t)$ 左边的一个很小的区间内, $F(x, t) < \Omega(x, t)$, 因此, 对于充分小的 dt , 继续产生的价值要大于 $\Omega(x, t)$, 因此, 停止就不是最优的。这与 $x^*(t)$ 的定义相矛盾。

对平滑粘贴条件的证明也可用反证法。我们利用图 4—2 帮助说明这一点。同样我们假设 $\{x > x^*(t)\}$ 为继续区域, $\{x < x^*(t)\}$ 为停止区域。如果函数 $F(x, t)$ 和 $\Omega(x, t)$ 在 $x^*(t)$ 处不相切, 则它们一定在某一弯折处相等。这个弯折点不可能是如图 4—2 (a) 中的向上弯折点, 否则由 $\Omega(x, t)$ 的连续性, 在 $x^*(t)$ 右边的一小领域内, $\Omega(x, t) > F(x, t)$, 对这样的 x , 终止而不是继续将是最优条件, 这与 $x^*(t)$ 作为临界点的定义相矛盾。下面考虑形如图 4—2 (b) 中的向下弯折点。我们证明 $x^*(t)$ 131 不会是两种选择间的无差异点; 在区间 Δt 上, 继续是较好的选择。直观的想法是等待一个稍长一些的时间, 我们可以观察 x 的下一步变化, 从而在弯折点的两端选择一个较好的点。这两个选择的平均效果也要好于选择弯折点本身。这个平均效果即使贴现, 也要优于选择弯折点本身的效果 (因为选择是发生在 Δt 时间之后, 所以应该贴现到相同的时间)。这个原因是布朗运动的增量与 $\sqrt{\Delta t}$ 成比例, 因而它对价值的影响也与 $\sqrt{\Delta t}$ 成比例, 而贴现的影响是和 Δt 成比例的。当 Δt 很小时, 前者的效果相对较大 (因 $\sqrt{\Delta t} > \Delta t$)。这个论证需要一些详细的代数推导。

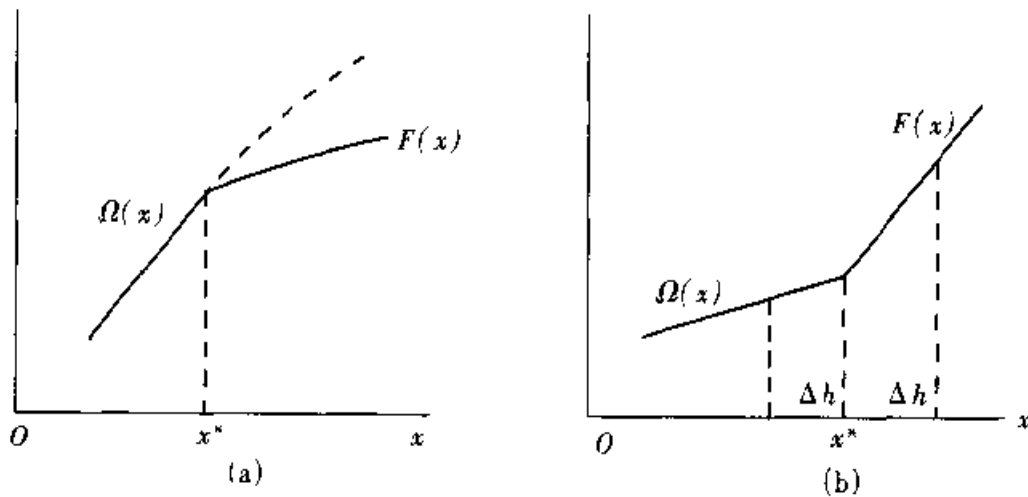


图 4—2 平滑粘贴的论证

如第 3 章所讲, 过程 x 可看成随机过程, 其跃度为 $\Delta h = b(x, t)\sqrt{\Delta t}$, 发生向上跳跃与向下跳跃的相应概率为

$$p = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + a(x, t) \sqrt{\Delta t}}{b(x, t)} \right]$$

$$q = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - a(x, t) \sqrt{\Delta t}}{b(x, t)} \right]$$

(在第3章中, 扩散过程的漂移系数 a 和扩散系数 σ 均为常数, 这里是更一般的形式: 函数 $a(x, t)$ 和 $b(x, t)$ 。)

考虑另一种决策: 在时间 Δt 内继续, 并且下一步如果 x 向上, 则仍然“继续”; 如果 x 向下, 则停止且取得停止回报。用适当的概率加权 (即取期望) 并贴现后得

$$\pi(x^*(t), t) \Delta t + (1 + \rho \Delta t)^{-1} [pF(x^*(t) + \Delta h, t + \Delta t) + q\Omega(x^*(t) - \Delta h, t + \Delta t)]$$

在 $(x^*(t), t)$ 处将上式展开成泰勒序列, 利用上面的价值匹配条件, 并注意到 Δt 的阶为 $(\Delta h)^2$, 展开式的头两项为

$$F(x^*(t), t) + \frac{1}{2} [F_x(x^*(t), t) - \Omega_x(x^*(t), t)] \Delta h$$

如果函数在向下弯折点处相同 (见图 4-2(b)), 则在 $x^*(t)$ 处 $F_x > \Omega_x$, 故上式第二项为正。因此, 这种策略优于在 $x^*(t)$ 处采取继续或终止的价值函数的共同值。而根据临界点的定义, 在这一点采取两种策略是无区别的, 故与临界点的定义矛盾。

【本章注释】

[1] 在技术术语中, 最大化是一个凸函数, 因此, 由詹森不等式, 式 (4-2) 中相互独立的最大化的均值大于相应均值的最大值。

[2] 一般情况下, 预期的符号是非常明确的。然而, 为了使得在时刻 t 的信息包括在该时刻的状态及控制更清楚, 一旦需要, 我们将它正式地描述为

$$E_t[F_{t+1}(x_{t+1})] = \int F_{t+1}(x_{t+1}) d\Phi_t(x_{t+1} | x_t, u_t)$$

式中, 积分范围为 x_{t+1} 的分布区间, 即 $\Phi_t(x_{t+1} | x_t, u_t)$ 存在的范围。

[3] 在现实中, 由于通货膨胀, 即使是政府债券也有一定的风险。我们这里完全忽略了它。关于确定利率期限结构的更完整的一般均衡模型, 参见考克斯、英格索尔和罗斯 (Cox, Ingersoll and Ross, 1985) 的论述。

[4] 关于资本资产定价模型的更多内容, 参见任何一本金融经济学的标

准教材；布雷利和迈尔斯 (Brealey and Myers, 1992) 的书是相对基础的一本，黄和莱茨伯格 (Huang and Litzenberger, 1990) 的书是较高级的一本。

[5] 在严格意义上，即使在这一很短的时间区间内，连续时间下 $\pi(x, t)$ 也可以变化，而且其演化是随机的。然而，由这种考虑所引起的差异的数量级为 $(dt)^2$ ，我们可以忽略它。

[6] 在量子电力学中，该结论证明具有巨大的操作意义。事实上，它隐含于费曼 (Feynman, 1949) 关于一个粒子在所有可能路径上加总的概率的表述技巧中。费曼的表述是在动态规划与伊藤引理被发现之前而发展起来的，因此费曼的方法是一项令人惊奇的成果。由于因变量 (概率的振幅) 在量子电力学中被复杂定价，与动态规划和或有债权定价方法相类似的方法不可能推广到超过数学形式的程度。如果真是这样，那么，除了其在物理学上的贡献外，费曼也可能被认为是金融经济学的鼻祖。

[7] 为了在技术上更精确，该算子接近于非减函数的凸锥体，因而在该算子空间有一不动点，这也是整个函数空间上的不动点。然而，在附录 1 我们已经证明，后一不动点是惟一的。

金融学前沿译丛

不确定条件下的投资

第Ⅲ篇

企业决策



第5章 投资机会与投资时机

135

在数学预备知识之后，我们现在可以回到对不确定条件下的投资决策的分析上来。本书中我们关心的主要是拥有两个非常重要特征的投资支出。(1) 开支至少是部分不可逆的；换句话说，沉没成本不可能被恢复。(2) 这些投资可能推迟，因此企业在调拨资源之前，有等待关于价格、成本及其他市场条件的新信息的机会。

正如第2章中的简单例子所表明的，推迟某种不可逆投资支出的能力可能会深深地影响到投资决策。特别地，它使商学院里普遍讲授给学生的简单的净现值规则（当项目预期现金流的现值至少与其成本一样大时投资于该项目）失效。这种规则是错误的，因为它忽略了现在就作出决定时的机会成本，因而放弃了等待新信息的机会。

正如我们在第 2 章所看到的，机会成本必须作为一部分包括在投资的总成本中。在本章及后面几章中，我们将在更一般的且更详细的水平上考察这种机会成本及其对投资的意义。

136 在本章，我们将提出并详细分析不可逆投资的一个最基本的连续时间模型。这个模型是由麦克唐纳和西格尔 (McDonald and Siegel, 1986) 最先发展出来的，该模型中，企业必须决定何时投资于单一项目。投资成本 I 是已知且固定的，但项目价值 V 服从几何布朗运动。简单的净现值规则是只要 $V > I$ 就投资，但正如麦克唐纳和西格尔所证明的，这是不正确的。因为 V 的未来值是未知的，现在就投资有机会成本。因此，最优投资规则是当 V 至少与超过 I 的某一临界值 V^* 一样大时才投资。正如我们即将看到的，对合理的参数值，这一临界值可能会是 I 的 2~3 倍。因此，简单的 NPV 规则就不仅仅是错误的，而且错误得非常严重。

在更详细地描述基本模型后，我们将说明如何能通过动态规划找到最优投资规则（即临界值 V^* ）。然而，产生的问题是贴现率的选择。如果资本市场是“完全的”（在某种意义上这将被明确），投资问题可能被看做是期权定价问题，并利用或有债权分析技术来求解。我们将以这种方式重新解决最优投资问题，然后考察企业投资期权的特征及其对关键参数的依赖。最后，我们将通过考虑项目价值 V 的另一种随机过程来扩展这个模型。特别地，我们将寻找并刻画适用于 V 服从均值回归过程及服从布朗运动/泊松跳跃的混合过程中的最优投资规则的特征。

5.1 基本模型

我们从麦克唐纳和西格尔 (McDonald and Siegel, 1986) 首先研究出的一个模型出发。他们考虑了下述问题，在哪一点支付沉没成本 I 以获得价值为 V 的项目是最优的？给定 V 并按照下面的几何布朗运动变化：

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \quad (5-1)$$

式中， dz 为维纳过程的增量。式 (5-1) 隐含着项目的当前价值是已知的，但是未来价值是对数正态分布，其方差随着时间期界线性增长；方程的严格形式见第 3.3.1 小节。这样，尽管随着时间推移企业会有新信息（企业发现

V 在变化), 项目的未来值也一直是不确定的。

很清楚, 式 (5-1) 是大多数实际项目的抽象。例如, 假定项目是拥有一定生产能力的虚拟产品的工厂。如果可变成本为正, 并且当产出价格低于可变成本时, 经营者拥有临时关闭工厂或完全放弃工厂的期权, V 将不再服从几何布朗运动, 即使虚拟产品的价格服从这种分布。(在第 6 章和第 7 章中, 我们将研究出一些模型, 其中产出价格服从几何布朗运动, 而项目可以临时性关闭或放弃。) 如果可变成本为正, 经理没有关闭工厂的期权(也许是由于管制限制), V 可能会变为负值, 这将再次与对数正态分布的假定相矛盾。此外, 有人可能认为, 竞争性产品市场将防止价格过度地偏离产业范围的长期边际成本, 或者价格的那种随机变化可能不太频繁但非常大, 因此, V 将服从均值回归或跳跃过程。为了提供对基本观点和技术的最简单介绍, 我们暂时忽略这些可能性。在第 5.1 节, 我们考虑外生性特殊均值回归, 并在第 8 章和第 9 章中考虑产业均衡。

注意到企业的投资机会等同于永久性看涨期权——以预先指定的价格购买股票的权利而不是义务。这样, 投资决策等同于决定何时执行这一期权。因此, 投资决策可以看做是期权定价问题(正如我们在第 2 章中所见到的简单例子)。^[1] 另外, 它还可以被看做是动态规划问题。我们以这两种方式推导出最优投资规则, 首先利用动态规划, 然后利用期权定价(或有债权)方法。这允许我们比较这两种方法及每种方法所必须的假定。最后我们考察解的特征。

最后, 将以 $F(V)$ 表示投资机会的价值(即投资期权的价值)。我们想找到使这个值最大化的规则。由于在时刻 t 来自投资的回报为 $V_t - I$, 我们希望最大化其预期现值:

$$F(V) = \max E[(V_T - I)e^{-\rho T}] \quad (5-2)$$

式中, E 为预期; T 为作出投资的(未知的)未来时间; ρ 为贴现率; 最大化受到关于 V 的方程式 (5-1) 的约束。为使这一问题有意义, 我们也必须假定 $\alpha < \rho$; 否则, 选择一个较大的 T , 式 (5-1) 中的积分可能会无穷大。因此, 等待更长时间总是更好的政策, 而最优解则不存在。我们令 δ 表示 $\rho - \alpha$ 的差异, 这样我们假定 $\delta > 0$ 。

5.1.1 确定性下的情形

尽管我们更多地关注不确定性影响投资决策的方式, 但是首先考察不存

在不确定性的情形（即式（5-1）中的 σ 为 0）是有用的。正如我们将看到的，等待仍然是有价值的。

如果 $\sigma = 0$ ， $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$ ，这里 $V_0 = V(0)$ 。这样，给定当前价值 V ，假定我们在未来一定任意时间 T 投资，则投资机会的价值为

$$F(V) = (Ve^{\alpha T} - I)e^{-\rho T} \quad (5-3)$$

假定 $\alpha \leq 0$ ，那么 $V(t)$ 将保持为常数或随着时间下降，显然，如果 $V > I$ ，立即投资是最优的，否则永不投资。因此， $F(V) = \max[V - I, 0]$ 。

如果 $0 < \alpha < \rho$ 会怎样？即使现在 $V < I$ ，也会 $F(V) > 0$ ，因为最终 V 将超过 I 。而且，即使 V 现在超过了 I ，等待而不是现在投资也是更好的。为弄清这一点，最大化方程式（5-3）中关于 T 的 $F(V)$ ，一阶条件为

$$\frac{dF(V)}{dT} = -(\rho - \alpha)Ve^{-(\rho - \alpha)T} + \rho Ie^{-\rho T} = 0$$

它隐含着^[2]

$$T^* = \max \left\{ \frac{1}{\alpha} \log \left[\frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V} \right], 0 \right\} \quad (5-4)$$

注意，如果 V 大于 I 并不是太多，我们会有 $T^* > 0$ 。在这种情形下推迟投资的原因是，在现值方面，投资的成本通过因子 $e^{-\rho t}$ 而减少，而回报则以一个较小的因子 $e^{-(\rho - \alpha)t}$ 而减少。

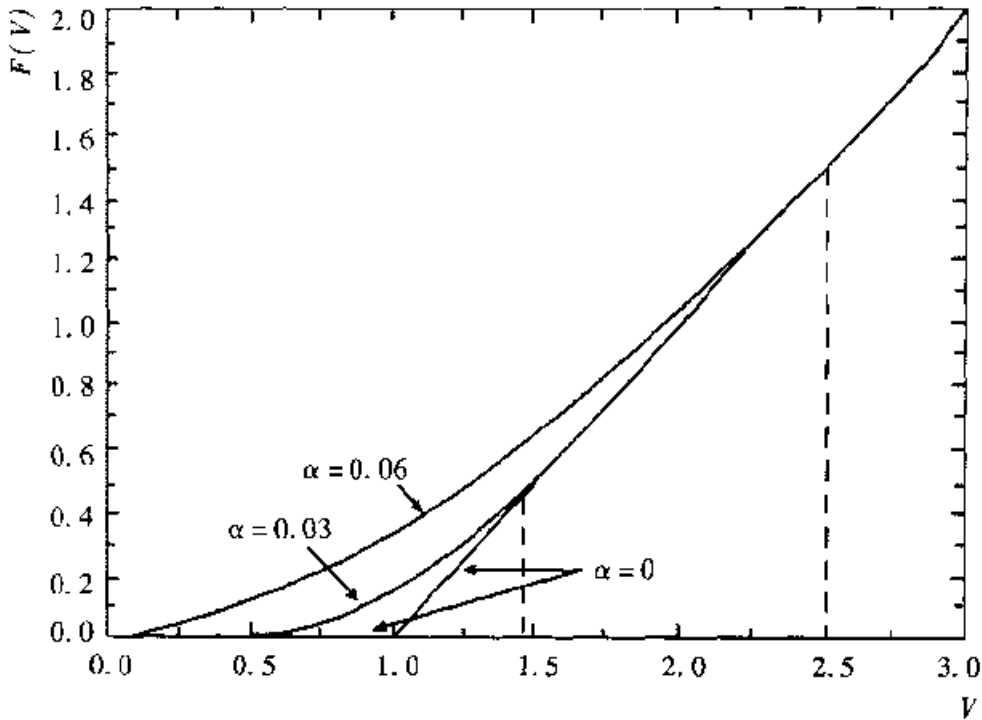
那么， V 等于什么值时立即投资是最优的？通过令 $T^* = 0$ ，我们发现，如果 $V \geq V^*$ ，人们应当立即投资，这里

$$V^* = \frac{\rho}{\rho - \alpha} I > I \quad (5-5)$$

139 最后，通过将表达式（5-4）代入式（5-3），我们获得 $F(V)$ 如下的解：

$$F(V) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha I}{\rho - \alpha} \right) \left[\frac{(\rho - \alpha)V}{\rho I} \right]^{\frac{\rho}{\alpha}}, & V \leq V^* \\ V - I, & V > V^* \end{cases} \quad (5-6)$$

图 5-1 显示了 $I = 1$ ， $\rho = 0.10$ ， $\alpha = 0, 0.03$ 和 0.06 时的 $F(V)$ 。在每种情形下， $F(V)$ 与直线 $V - I$ 的切点位于临界值 $V^* = \frac{\rho I}{\rho - \alpha}$ 。注意，若 α 增加， $F(V)$ 也增长，临界值 V^* 也增加。 V 的增长创造了等待的价值，并提高了投资机会的价值。

图 5--1 投资机会的价值, $F(V)$, $\sigma=0$, $\rho=0.1$

5.1.2 随机情形

我们现在转到 $\sigma > 0$ 的一般情形。这一问题是确定获得资产价值 V 作为回报而投资于 I 的最优点。由于 V 是随机变化的, 我们不能像前面那样确定时间 T 。实际上, 我们的投资规则将以临界值 V^* 的形式出现, 一旦 $V \geq 140$ V^* , 投资就是最优的。正如我们将要看到的, 一个较高的 σ 将导致一个较高的 V^* , 也就是说, 等待有更高的价值。然而, 记住这一点非常重要: 一般来说, 增长 ($\alpha > 0$) 和不确定性 ($\sigma > 0$) 都能创造等待的价值, 并因此影响投资时机。

在接下来的两节中, 我们将沿袭第 4 章所介绍的技巧用两种方式来解决这个投资问题。首先将利用动态规划, 然后将利用或有债权方法重新解同样的问题。这使我们能够仔细地比较这两种方法。

5.2 利用动态规划求解

在第 4 章中, 我们有一个连续时间中的最优停止问题。因为投资机会

$F(V)$ 直到投资被实施的时刻 T 之前不会产生现金流, 持有它的惟一回报是其资本增值。因此, 正如我们在第 4 章所见到的, 在连续时间段 (V 的价值对投资来讲并不是最优的) 的贝尔曼方程为:

$$\rho F dt = E(dF) \quad (5-7)$$

式 (5-7) 说明, 在时间段 dt , 投资机会的预期总回报 $\rho F dt$ 等于其资本的预期增值率。

我们利用伊藤引理来展开 dF , 我们用 “'” 表明导数, 例如, $F' = \frac{dF}{dV}$, $F'' = \frac{d^2 F}{dV^2}$ 等。则

$$dF = F'(V)dV + \frac{1}{2}F''(V)(dV)^2$$

将式 (5-1) 中的 dV 代入这一表达式, 并注意 $E(dx) = 0$ 时, 得到

$$E(dF) = \alpha VF'(V)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V)dt$$

那么贝尔曼方程 (在除以 dt 后) 变为

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V) + \alpha VF'(V) - \rho F = 0 \quad (5-8)$$

如果我们作出 $\alpha = \rho - \delta$ 这样的替换, 分析结果并将它与利用或有债权所分析出的结果进行比较都将更容易。为保证最优的存在 (由于早已在与确定性相关的情形下所解释过的理由), 我们假定 $\alpha < \rho$ 或 $\delta > 0$ 。在这种记号下, 贝尔曼方程变成下面的 $F(V)$ 必须满足的微分方程:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V) + (\rho - \delta) VF'(V) - \rho F = 0 \quad (5-9)$$

此外, $F(V)$ 必须满足下面的边界条件:

$$F(0) = 0 \quad (5-10)$$

$$F(V^*) = V^* - I \quad (5-11)$$

$$F'(V^*) = 1 \quad (5-12)$$

条件式 (5-10) 来自于当 $V=0$ 时, $F(V)$ 将保持为 0 的观察 (这是 V 的随机过程式 (5-1) 的隐含的意义)。因而当 $V=0$ 时, 投资期权将是无价值的。另两个条件来自于对最优投资的考虑, V^* 是投资为最优时的价格, 或者是第 4 章中所描述连续区域的自由边界, 则式 (5-11) 为价值匹配条件, 它仅仅说明现在投资企业可获得 $V^* - I$ 的净回报。最后, 条件式 (5-12) 为平滑粘贴条件, 在第 4 章及其附录 3 曾经讨论过。如果 $F(V)$ 不

是连续的, 而且在临界执行点 V^* 不是平滑的, 人们在不同点实施投资可能更好。

注意到式 (5-9) 是二阶微分方程, 但必须满足三个边界条件。原因在于尽管第一个边界 ($V=0$) 的位置是已知的, 而第二个边界的位置是未知的, 换言之, “自由边界 V^* ” 必须成为解的一部分, 那样则需要第三个条件。式 (5-11) 有另外一个有用的解释。将它写作 $V^* - F(V^*) = I$, 当企业投资时, 它获得价值为 V 的项目, 但是放弃了投资机会或投资期权, 其价值为 $F(V)$ 。这样获得价值减去机会成本的净收益为 $V - F(V)$ 。临界价值 V^* 位于净收益等于直接或有形投资成本 I 的那一点。同样地, 我们可以将方程写成 $V^* = I + F(V^*)$, 令项目的价值等于进行投资的所有成本 (直接成本加上机会成本)。关于这一点我们在后面还将更详细地讨论。

为找到 $F(V)$, 我们必须解式 (5-9), 约束条件为边界条件式 (5-10) ~ 式 (5-12)。在这种情形下很容易找到解。我们可以推测某一函数形式, 如果它是有效的就通过替代来确定真实解。我们首先描述并推导出这个解的一些特征, 然后更详细地讨论它。

为满足边界条件式 (5-10), 解必须采用下列形式:

$$F(V) = AV^{\beta_1} \quad (5-13)$$

式中, A 为待定常数; $\beta_1 > 1$ 为已知常数, 其数值取决于微分方程中的参数 σ , ρ 及 δ 。

其余的边界条件式 (5-11) 和式 (5-12) 可用于解出其他的两个未知数——常数 A 和在该点投资为最优的临界值 V^* 。将式 (5-13) 代入式 (5-11) 和式 (5-12), 并整理, 我们发现

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I \quad (5-14)$$

及

$$A = \frac{V^* - I}{(V^*)^{\beta_1}} = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}}{(\beta_1)^{\beta_1} I^{\beta_1 - 1}} \quad (5-15)$$

式 (5-13) ~ 式 (5-15) 给出了投资机会的价值及最优投资规则, 即临界值 V^* , 在该点投资是最优的。我们在后面还将更详细地考察这个解的特征。现在最重要的一点是, 由于 $\beta_1 > 1$, 我们有 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} > 1$ 且 $V^* > I$ 。因此, 简单的 NPV 规则是错误的。不确定性和不可逆性使得虚拟产品在临界

值 V^* 与投资 I 之间有一个楔子。该楔子的大小等于因子 $\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$ ，在考察潜在参数实际值的数量级以及这一楔子对这些参数的变化的反应时，该因子变得重要起来。为做到这一点，我们必须更详细地考察式 (5-13) 的解。

5.2.1 基本二次型

由于二阶的齐次微分方程式 (5-9) 对因变量 F 及其导数是线性的，其一般解可以看做是任意两个独立解的线性组合。如果我们采用函数 AV^β ，假定 β 为齐次方程的一个根，通过替代，我们发现它满足方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + (\rho - \delta)\beta - \rho = 0 \quad (5-16)$$

方程的两个根为

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} > 1$$

及

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} < 0$$

148

那么式 (5-9) 的一般解可以写为

$$F(V) = A_1 V^{\beta_1} + A_2 V^{\beta_2}$$

式中， A_1 与 A_2 为待定常数。在我们的问题中，边界条件式 (5-10) 隐含着 $A_2 = 0$ ，因而只剩下式 (5-13) 的解。

为回答关于乘数 $\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$ 的经济问题，我们必须更详细地考察齐次方程式 (5-16)。由于这一方程或与它非常接近的相似方程将几乎出现在每一章，在开始时建立标准的术语并获得一般性的结论是非常有帮助的。

一般地，我们将用 β 表示方程中的变量，而用 Q 表示整个二次表达式 (左边)。这样 Q 是变量 β 的函数，也就是参数 σ ， ρ 及 δ 的函数。我们将不说明这种明确的依赖性，除非这样做很重要。

尽管二次式的根是以清楚的代数形式出现的，如果能从几何上说明它是很有帮助的。图 5-2 显示了 Q 作为 β 的函数。 $Q(\beta)$ 中 β^2 的系数为正，因此，当 $\beta \rightarrow \pm \infty$ 时，图像是趋于 ∞ 的向上倾斜的抛物线。而且， $Q(1) = -\delta < 0$ (记住我们假定 $\delta > 0$) 且 $Q(0) = -\rho < 0$ ，因而图像与横轴相交于 1 右边的一个点及 0 左边的另一个点。也就是，一个根为 $\beta_1 > 1$ ；另一个根

为 $\beta_2 < 0$ 。

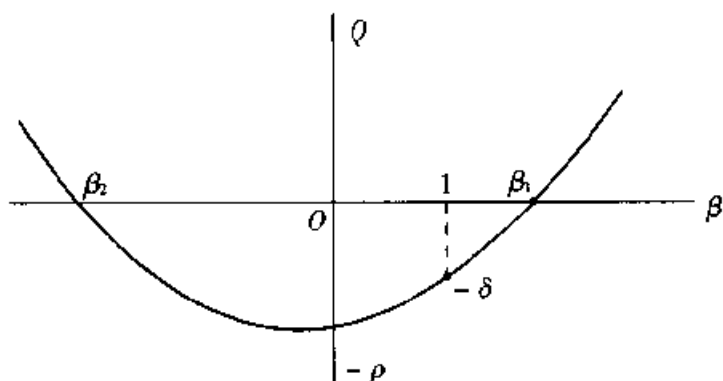


图 5—2 基本二次型

我们集中讨论正根 β_1 。如果参数（如 σ ）变化时，它将如何变化？这可以由标准的静态比较来回答。对二次式进行全微分：

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} \frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = 0$$

144

这里所有导数都是关于 β_1 的。图 5—2 表明，在点 β_1 ， $\frac{\partial Q}{\partial \beta} > 0$ 。当 $\beta_1 > 1$ 时，还有

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \sigma\beta(\beta - 1) > 0$$

因而 $\frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma} < 0$ 。换句话说，随着 σ 递增， β_1 递减，那么 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 递增。未来价值 V 的不确定性的数量越大，虚拟产品在 V^* 与 I 之间的楔子也越大，即在愿意作出不可逆的投资之前，企业所要求的超额回报也越高。

读者同样可以检验二次型的其他两个特征。(1) β_1 随 δ 的提高而提高，因此 δ 越高，意味着更小的楔子 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 。(2) β_1 随 ρ 的提高而降低，因此较高的 ρ 意味着更大的楔子。在第 5.4 节，我们还将更详细地讨论这些结论，并提供一些数值例子。

关于 β_1 的一些极限结果也能提供信息。我们简单地说明它们。利用代数公式，它们很容易得到证明。首先，当 $\sigma \rightarrow \infty$ ，我们有 $\beta_1 \rightarrow 1$ ，且 $V^* \rightarrow \infty$ ，即如果 σ 是无限的，企业永远不投资。下面考虑当 $\sigma \rightarrow 0$ 时会发生什么。我们有

$$\text{如果 } \sigma > 0, \text{ 则 } \beta_1 \rightarrow \frac{\rho}{\rho - \delta} \text{ 且 } V^* \rightarrow \left(\frac{\rho}{\delta} \right) I$$

如果 $\alpha \leq 0$, 则 $\beta_1 \rightarrow \infty$ 且 $V^* \rightarrow I$

这些结论与我们在前面考察过的确定情形下的结论是一致的。

5.2.2 与新古典投资理论的联系

为进一步推进这种分析, 假定项目本身是一家具有无限生存能力的工厂, 其生产出的利润流为 π_t , 且服从下面的过程:

$$d\pi = \alpha\pi dt + \sigma\pi dz$$

那么 V 由下面的式子给出:

$$145 \quad V_1 = E \int_t^{\infty} \pi_s e^{-\rho(s-t)} ds = \frac{\pi_t}{\rho - \alpha}$$

并且 dV 由式(5-1)给出。典型的马歇尔(Marshallian)规则是只要 $V_t \geq I$, 或者 $\pi_t \geq (\rho - \alpha)I$, 就投资。然而, 式(5-14)告诉我们, 实际上企业是在

$$\pi_t \geq \pi^* = \frac{\beta}{\beta - 1}(\rho - \alpha)I > (\rho - \alpha)I \quad (5-17)$$

时才投资。考察这一点的另一种途径是根据投资的乔根森(Jorgensonian)方法。^[3]由 β_1 满足二次方程式(5-16), 我们有

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}(\rho - \alpha) = \rho + \frac{1}{2}\sigma^2\beta_1$$

这样, 临界利润水平 π^* 可以写为

$$\pi^* = \left(\rho + \frac{1}{2}\sigma^2\beta_1 \right) I > \rho I \quad (5-18)$$

由于我们已假定零折旧, ρI 是乔氏资本使用成本。乔氏法则是, 当 $\pi_t = \rho I$ 时就投资。式(5-18)说明, 当未来利润不确定时, 临界的 π^* 必须超过这一资本的利用成本。

当不确定性不存在时, 乔氏投资法则要求企业在 $\pi_t = \rho I$ 时投资, 而不是 $\pi_t = (\rho - \alpha)I$ 时。如前所见, 这可以看做最优时机规则。企业又必须选择 T 并使下面的式子最大化:

$$\max_T \left(\frac{\pi_0 e^{\alpha T}}{\rho - \alpha} - I \right) e^{-\rho T} = \frac{\pi_0 e^{-(\rho - \alpha)T}}{\rho - \alpha} - I e^{-\rho T} \quad (5-19)$$

其解是在时机 T 投资, 若

$$\pi_T = \pi_0 e^{\alpha T} = \rho I \quad (5-20)$$

(读者可以证明, $\alpha > 0$ 是这个最大化问题的二阶条件。)因此, 即使没有不确定性, 企业也将等待投资, 因为等待允许延迟支付 I (及其贴现)。^[4]正如

式(5-18)所证明的,在不确定性条件下,多了 $\frac{1}{2}\sigma^2\beta_1$ 这一项,因而企业在投资之前必须等待更长时间。多出的这一项可以看做对新古典投资模型的修正。

5.2.3 与托宾 q 值的关系

托宾(Tobin, 1969)引入了 q 值,将其定义为“现有资本品或它们的权益的价值”与“它们当前重置成本”之比。这已经成为传统投资理论的核心概念。如果这一比率超过了效用,企业可以通过提高其资本存量而增加其市场价值。因此,当企业的 q 值大于1时,我们将会看到企业投资;当企业的 q 值小于1时,企业不投资。而且,我们可以通过计算基于某一种产业内(或整个经济内)企业的平均市场价值与相应的资本平均重置成本的 q 值来进行汇总。那么,我们将发现投资开支的总水平与 q 值正相关。

关于 q 的测度及解释产生了许多问题。其中,重要的一个是,与运用于某一企业或产业的全部价值及资本存量中的平均成本 q 相反,影响投资的是边际 q ,即运用于企业或产业的增加的投资计划中的 q 。我们在第11章和第12章将更详细地阐述边际 q 这一概念。这里我们想强调一个不同的问题。正如所说明的, q 的分子是现存资产的市场价值,与投资决策相关的是下一个项目对企业价值有一定的影响。我们已经发现,为达到这一点,进行投资的成本必须从项目价值中减掉。因此,如果假定某一项目的价值为 V ,期权价值为 $F(V)$,企业价值将提高 $V - F(V)$,而不是 V 。相应地, q 将被定义为 $\frac{V - F(V)}{I}$ 。因而调整投资的 q 值实际上将等于1,正如我们在式(5-11)中所看到的,它定义了临界值 V^* 。

然而,配置来自资本边际单位的企业市场价值的比例是困难的。部分原因在于, q 在某种程度上必须被不同地界定或至少是不同地测度,因为来自完全投资的收益的预期现值与其建造成本的比率有时有一定的差异。这对应于投资期权已经得到执行,而机会成本已消失的情形下利用已有资产的价值。在我们的讨论中,这表示将 q 定义为 $\frac{V}{I}$ 。我们可用 q 的这种概念来解释修正的投资标准:调整投资的临界值 q^* ,它由下面的式子给出:

$$q^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} > 1 \quad (5-21)$$

147 当 V 波动时，传统上测度的 q 大于 1 却没有引致投资的时间会有所延长。这给出了不可逆性对企业投资决策影响的另一种视角。

在第 11 章和第 12 章中，我们有机会讨论利用 q 的概念来研究投资的有关文献。有些文章采用了前面关于 q 的第一种定义，其他的则采用了第二种定义。因此，我们将不得不仔细地地区分它们。我们把第一种（期权价值，并将 1 作为其上界）称为“企业价值”概念；第二种（忽略期权价值，并将 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 作为临界水平）称为“适当的资产价值”。

5.3 或有债权分析的解

如果企业作出的投资是公共持有的，而且经理希望他们的决策反映股东的利益，他们应当努力最大化企业的市场价值。我们如何知道前面推导出的投资规则能否做到这一点？这种投资规则的一个问题是，它取决于一个任意的常数贴现率 ρ 。还不清楚这一贴现率从哪里来，即使对它是否一直为常数也不是很清楚。正如我们在第 4 章所看到的，我们可以利用或有债权（期权定价）方法推导出一个简单修正的投资规则，它确实将最大化企业的市场价值。在本节中，我们详细地完成必须的步骤。

5.3.1 重新解释模型

利用或有债权分析要求一个重要假定： V 随机变化的范围必须在经济中已有资产的范围内。特别地，资本市场必须是充分“完善的”，因此，至少在原则上，人们可以发现一种资产或构造资产的一种动态投资组合（即持有随着资产价值变动连续调整的一种投资组合），其价格与 V 完全相关。这等于说，市场充分完善，企业决策不影响投资者现有的机会集。^[5]

148 变化范围的假定对大多数商品是成立的，特别是在现货市场和期货市场都交易的商品，而对制造品，价格与股票或投资组合的价值在一定程度上是相关的。然而，确实存在这种假定不成立的情形，例如，开发一种与任何现有产品都不相关的虚拟产品的项目，或者研究与开发风险投资，其结果可能很难预测。

在这里我们将假定变化范围是成立的，即原则上 V 的未来值的不确定

性可以由现有的资产来生成。在这种假定下，我们可以在不作出关于风险偏好或贴现率的任何假定下来决定最大化企业市场价值的投资规则。而且，利用或有债权分析可以更容易地解释这个解的某些特征。当然，如果变化范围不成立，动态规划仍然可以用于某一贴现率条件下企业预期收益流的现值的最大化。两种方法的关系，参见第4.3节中对此问题的更详细讨论。

我们根据第4.2节中所概括的或有债权定价理论，为了进一步巩固和澄清该理论，我们又重述了一些细节。令 x 表示一项资产或与 V 完全相关的某一资产动态组合的价格，并用 ρ_{xm} 表示 x 与市场组合的相关性。由于 x 与 V 完全相关， $\rho_{xm} = \rho_{Vm}$ 。我们假定该资产或组合不支付股利，因此，其全部回报来自于资产收益。那么 x 根据式 (5-22) 演化：

$$dx = \mu x dt + \alpha x dz \quad (5-22)$$

式中，漂移率 μ 为持有该资产或资产组合的预期回报率。根据资本资产定价模型， μ 应反映出资产的系统（不可分散）风险。正如第4章所解释的， μ 将由下面的式子给出：

$$\mu = r + \phi \rho_{xm} \sigma$$

式中， r 为无风险利率； ϕ 为风险的市场价格。^[6] 这样， μ 为投资者准备拥有该项目时所必须的经风险调整的预期回报率。我们假定 V 变化的预期百分比 α 小于经风险调整的回报 μ 。（正如我们将要看到的，如果不是这样，企业将永不投资。无论当前 V 的水平怎样，企业等待并简单地保持其投资 149
期权都会有所改善。）我们将令 δ 表示 μ 与 α 之间的差异，即 $\delta = \mu - \alpha$ 。这样，我们假定 $\delta > 0$ ，这与第5.2节中动态规划模式下的相应假定起着相同的作用。

参数 δ 在模型中起着重要作用。我们在第4章讨论了其作为隐含或显现股息时的作用，这里我们详细说明有关的评论。利用金融看涨期权的类推是有帮助的。如果 V 为一股普通股的价值， δ 将是股票的股息率。股票的预期总回报为 $\mu = \delta + \alpha$ ，即股息率加上资本收益的预期率。如果股息率 δ 为零，该股票的看涨期权将会被持有至到期日，而永远不会在到期前执行。理由是股票的全部回报被反映在其价格波动中，从而也被反映在看涨期权的价格波动中，因此，保持期权有活力是没有成本的。然而，如果股息率为正，保持期权有活力而不是执行它会存在机会成本。这一机会成本就是人们持有期权而不是股票所放弃的股息流。由于 δ 为百分比的股息率，股票价

格越高，股息流量越大。在某一充分高的股票价格上，放弃股息的机会成本足以变大到使执行期权有价值。

对我们的投资问题， μ 为已完成项目的预期回报率。它是资本市场所建立的均衡比率，并且包括适当的风险溢价。如果 $\delta > 0$ ，项目的预期资本收益率小于 μ 。因此， δ 为推迟项目建设而保持投资期权有活力的机会成本。如果 $\delta = 0$ ，保持投资期权有活力不存在机会成本，人们将永远不投资，无论项目的 NPV 有多高。这就是我们为什么假定 $\delta > 0$ 。另外，如果 δ 非常大，期权价值将变得非常小，因为等待的机会成本高。当 $\delta \rightarrow \infty$ ，期权的价值将趋于零；实际上，唯一的选择是要么现在投资，要么永不投资，标准的 NPV 规则再次生效。

150 参数 δ 可以用其他方式来解释。例如，它可以反映竞争者进入及其扩张生产能力的过程，（然而，在第 8 章中，我们将讨论把竞争者进入过程内生化的更完整模型，并发现最终的均衡不能通过简单地提高每家企业的 δ 来很好地描述。）或者它可以简单反映项目的现金流。如果项目有无限的生命力，则式 (5-1) 可以代表项目经营期间 V 的演化，而 δV 为项目产生的现金流速率。由于我们假定 δ 为某一常数，这与未来现金流等于项目市场价值的某一固定比例是一致的。^[7]

当模型的一些其他参数（如 σ ）变化时，我们必须考察 δ 会发生什么变化。可以想像各种各样的可能性。通过更多地考虑整个资本市场，我们将始终假定无风险利率 r 是固定不变的，独立于任何一项资产（或一家企业甚至一种产业）的变化。风险 ϕ 的整体市场价格似乎将保持固定。现在假定 σ 提高，这提高了经风险调整的贴现率 μ 。为保持市场对 x 的均衡，或者 α 或者 δ 必须改变。两种极端的情形在逻辑上是有可能的。首先， α 可以是关于 x 的基本事实，因此， δ 必须对 μ 的变化作出反应（例如，股息率可能取决于持有的商品量）。其次， δ 可能是基本的行为参数， x 的价格过程必须变化，因而 α 必须调整。第三种可能性是 α 和 δ 都参与调整。在我们的数值或静态比较中，我们将经常把 δ 看做是独立于 σ 的基本参数，但是将提到其他的可能性，这将使结论有实质性差别。

5.3.2 求解

让我们现在回到投资机会评价及最优投资规则上来。再一次，我们令 $F(V)$ 表示企业投资期权的价值。我们将以与第 2 章的两阶段例子或第 4.2

节中的一般理论大致相同的方法来决定 $F(V)$ ，即通过构建一个无风险的投资组合，决定其预期回报率，并令预期回报率等于无风险利率。

考虑下面的投资组合：持有投资期权，其价值为 $F(V)$ ，获得项目的 $n = F'(V)$ 单位的空头（或者等价地，资产或组合 x 与 V 完全相关）。这一组合的价值为 $\Phi = F - F'(V)V$ 。注意组合是动态的，当 V 改变时， $F'(V)$ 可能会在某一很短时间区间到下一个时间区间之间变化，因而投资组合的成分会改变。然而，在每一很短的时间区间 dt ，我们保持 n 固定。

这一投资组合的空头要求在每一时间段获得 $\delta VF'(V)$ 美元的回报，否则不会有理性的投资者会持有交易的多头。我们在第 2.1.1 小节中讨论过这一点，并简单概括了其计算。在项目中持有多头的投资者所要求的经风险调整的回报为 μV ，它等于资本收益 αV 加上股息流 δV 。由于空头包含项目的 $F'(V)$ 单位，它需要支出 $\delta VF'(V)$ 。把这种支付考虑进来，在很短的时间区间 dt 内持有该投资组合的总回报为^[8]

$$dF - F'(V)dV - \delta VF'(V)dt$$

为求出 dF 的表达式，利用伊藤引理

$$dF = F'(V)dV + \frac{1}{2}F''(V)(dV)^2$$

因而投资组合的总回报为

$$\frac{1}{2}F''(V)(dV)^2 - \delta VF'(V)dt$$

由关于 dV 的式 (5-1)，我们知道 $(dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$ ，因此投资组合的回报变为

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V)dt - \delta VF'(V)dt$$

注意到该回报是无风险的。因此为避免套利，它必须等于 $r\Phi dt = r[F - F'(V)V]dt$ ：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V)dt - \delta VF'(V)dt = r[F - F'(V)V]dt$$

上式除以 dt ，重新整理得到 $F(V)$ 必须满足的微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V) + (r - \delta)VF'(V) - rF = 0 \quad (5-23)$$

我们发现，这个方程与利用动态规划所得的式 (5-9) 几乎一样。惟一

152 的差别在于无风险利率 r 代替了贴现率 ρ 。相同的边界条件式 (5-10) ~ 式 (5-12) 在这里仍然适用, 而且原理也与前面相同。这样 $F(V)$ 的解再次有这样的形式:

$$F(V) = AV^{\beta_1}$$

惟一的区别在于指数 β_1 , 二次方程中现在由 r 代替了 ρ , 因此

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (5-24)$$

临界值 V^* 及常数 A 再次由式 (5-14) 和式 (5-15) 给出。

因此, 在风险中性的假定下 (即贴现率 ρ 等于无风险利率), 我们的投资问题的或有债权解等同于动态规划解。^[9] 这样, 无论生成是否存在, 我们都可以求出投资问题的解; 如果生成不存在, 这个解受到一个假定的贴现率的约束。在任何一种情形下, 这个解都会有相同的形式, 而 σ 或 δ 的变化影响有可能是相同的。然而, 有一点是值得注意的。在没有生成的条件下, 没有理论能决定贴现率 ρ 的“正确”值 (除非我们对投资者或经理的效用函数作出严格假定)。例如, 资本资产定价模型可能不成立, 因而它不能以常规方式计算风险调整的贴现率。

5.4 最优投资规则的特征

153 让我们假定生成存在, 并考察最优投资规则的特征及投资机会的价值, 正如由式 (5-13)、式 (5-14)、式 (5-15) 及式 (5-24) 所给出的, 一些数值解有助于说明结论并显示它如何取决于各种参数的值。正如我们将要看到的, 这些结论在数量上与标准的期权定价模型的结论相同。

除非特别指出, 下面我们将设定投资成本 $I=1$, $r=0.04$, $\delta=0.04$, 且 $\sigma=0.2$ (年率)。(注意, 我们无须知道 μ 或 α , 而只须知道两者之间的差异 δ 。) 项目的回报率从一个项目到另一个项目之间差别很大, 因此, $\delta=4\%$ 应被看做是合理的, 但并不一定有代表性。至于 σ , 平均来说, 股票市场整体回报率的标准差一直为 20%。尽管这代表了一种已经多样化的资产组合, 它还包括权益回报的杠杆效应, 因而可能是平均资产的一种合理取值。

给定这些参数值, $\beta_1 = 2$, $V^* - 2I = 2$, $A = \frac{1}{4}$ 。这样, 认为只要 V 至少与 I 一样大时企业就应当投资的简单 NPV 规则在总体上是错误的。对于参数值的这种合理设定, 企业在投资之前, V 必须至少是 I 的 2 倍。对 $V \leq 2$, 企业投资机会的价值为 $F(V) = \frac{1}{4}V^2$; 对 $V > 2$, $F(V) = V - 1$ (因为当 $V > 2$ 时, 企业执行其投资期权并获得净回报 $V - 1$)。

图 5—3 显示了对上述参数来讲, 在 $\sigma = 0$, $\sigma = 0.3$ 时作为 V 的函数的 $F(V)$ 。在每种情形下, $F(V)$ 与直线 $V - I$ 的切点给出了临界值 V^* 。该图还显示出简单的 NPV 规则必须被修正为包括现在投资而不是等待的机会成本。这一机会成本实际上为 $F(V)$ 。当 $V < V^*$ 时, $F(V) > V - I$, 从而 $V < I + F(V)$: 项目的价值小于其全部成本——直接成本 I 加上机会成本 $F(V)$ 。(当 $\sigma = 0$ 时, $V^* = I$, 对于 $V \leq I$, $F(V) = 0$ 。)

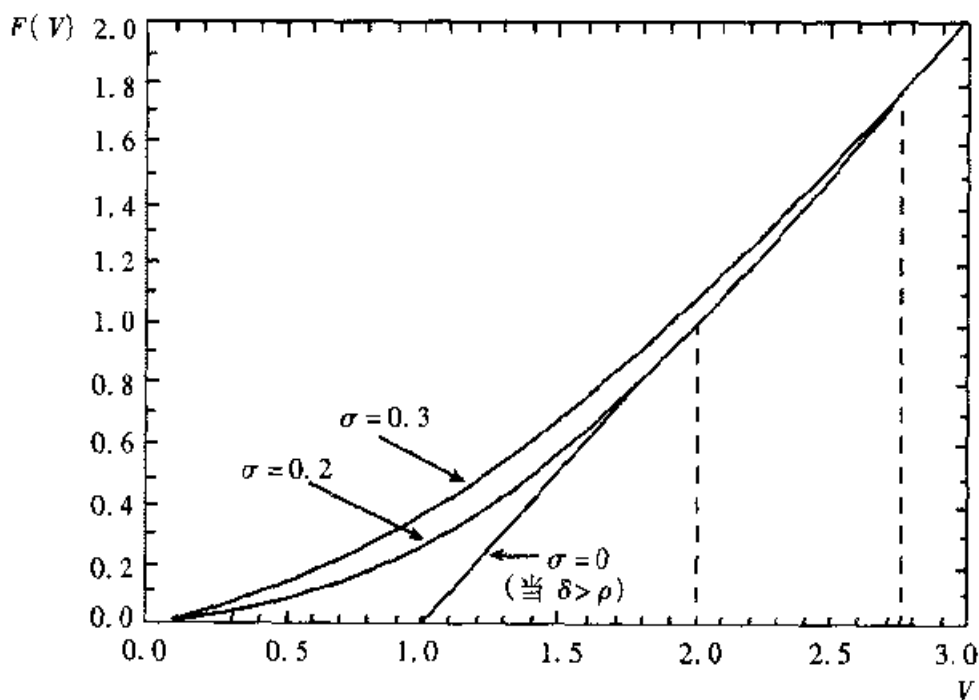


图 5—3 投资机会的价值, $F(V)$, $\sigma = 0, 0.2$ 和 0.3

注意到当 σ 提高时, $F(V)$ 增加, 临界值 V^* 也提高。这些更高的不确定性提高了企业投资机会的价值, 但是 (由于特定的原因) 降低了企业将进行的实际投资的数量。结果是, 当企业的市场或经济环境变得更不确定时, 企业的市场价值可能会上升, 即使企业确实减少了投资而且可能减少了产出也是如此。

154 V^* 对 σ 的依赖也可以在图 5—4 中更直接地显示出来。观察到 V^* 随着 σ 的增加而大幅提高。这样，投资对项目价值的变动高度敏感，而不考虑投资者或经理的风险偏好，也不考虑 V 的风险与市场相关的程度。企业可能是风险中性的， V 的随机变化可以是完全多样化的，而且 σ 的提高也将提高 V^* ，因而会降低投资。^[10]

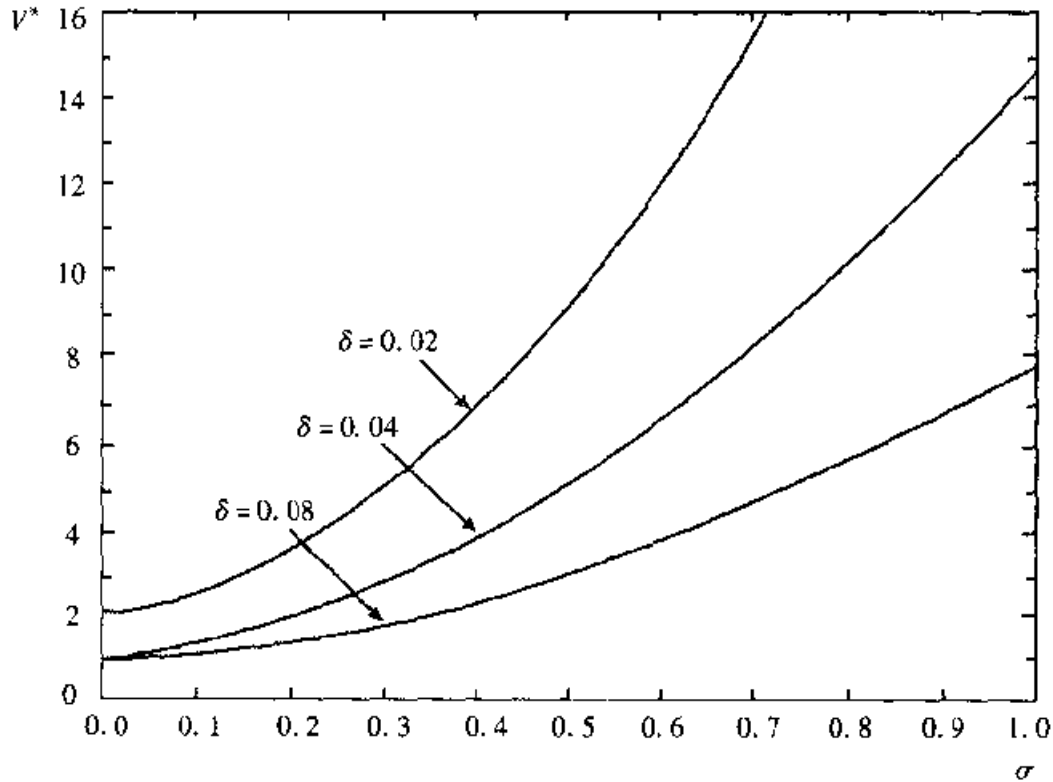
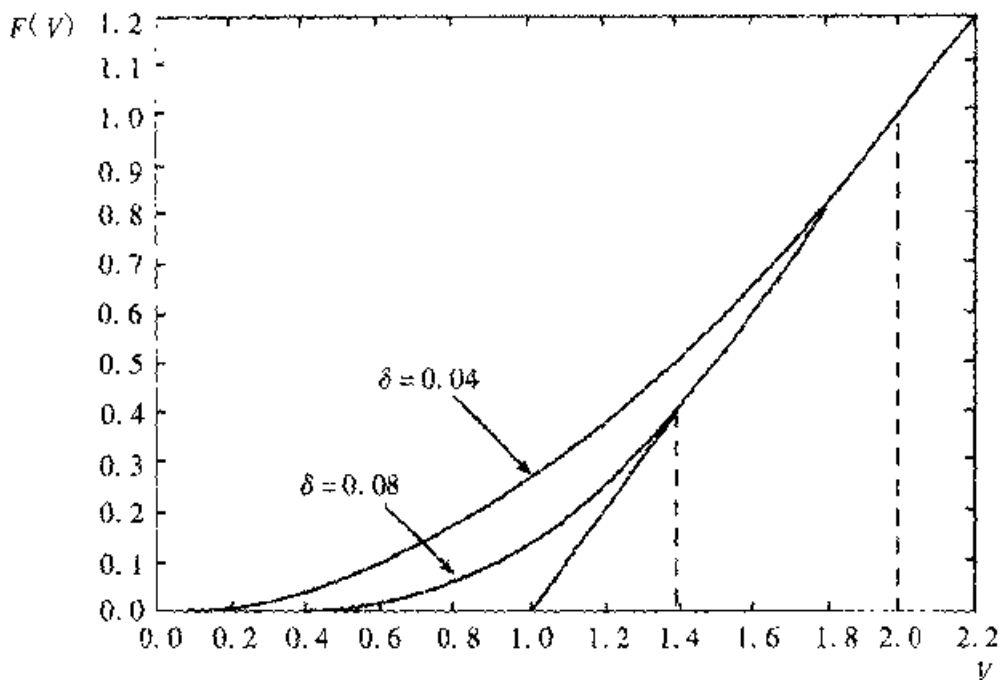
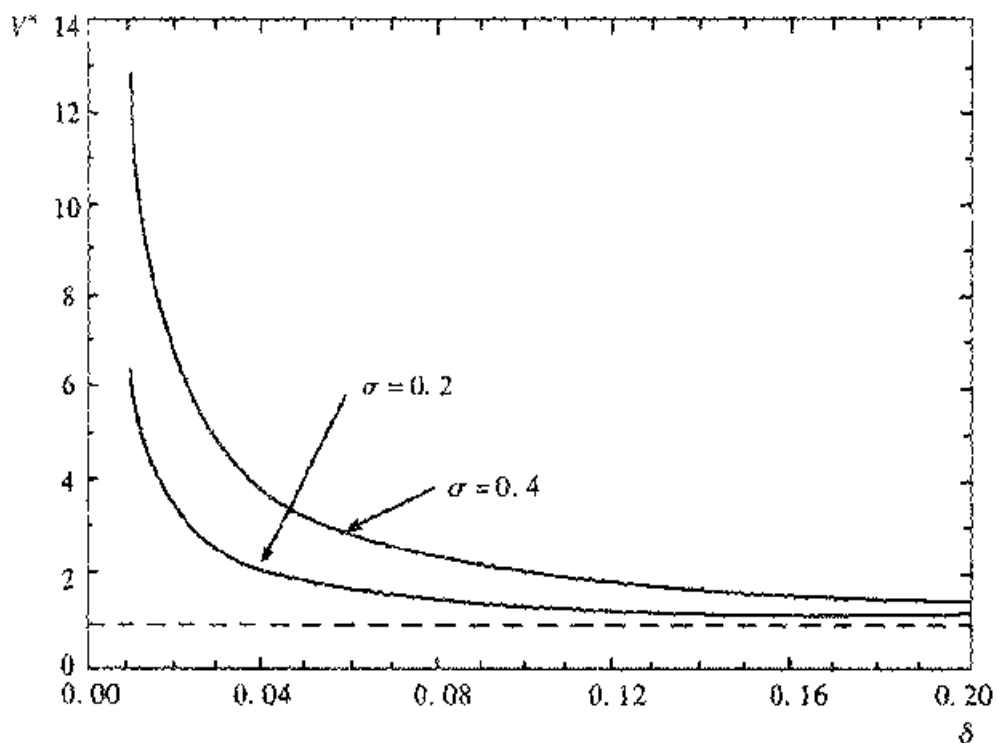


图 5—4 作为 σ 的函数的临界价值 V^*

155 图 5—5 和图 5—6 显示了 $F(V)$ 和 V^* 如何取决于 δ 。观察到 δ 由 0.04 增加到 0.08 导致 $F(V)$ 下降，从而临界值 V^* 下降。（如图 5—6 所示，在极限条件下，对 $V < I$ 且 $V^* \rightarrow I$ ，当 $\delta \rightarrow \infty$ 时， $F(V) \rightarrow 0$ 。）理由是 δ 变得更大（除 α 外其他一切不变）， V 的预期增长率下降，因此投资期权价值的预期折旧及获得的 V 下降。实际上，等待而不是现在投资变得更昂贵。为证明这一点，考虑对公寓建筑物的投资，这里 δV 为租金收入的净流量。该建筑物的总回报率，必须等于风险调整的市场利率，它包含两个成分——这种收入流和预期的资本收益率。因此，收入流相对于建筑物的总回报越大，人们通过持有该建筑物的投资期权而不是拥有该建筑物自身所要放弃的就越多。

图 5—5 投资机会的价值, $F(V)$, $\delta = 0.04$ 和 0.08 图 5—6 作为 δ 的函数的临界价值 V^*

我们已经把 σ 和 δ 看做独立参数。实际上如果允许 δ 随着 σ 的改变而调整, 则 σ 每单位的增长要求 δ 有 $\phi_{\sigma, \delta}$ 单位的增长, 因为

$$\delta = \mu - \alpha = r + \phi\sigma\rho_{xm} - \alpha$$

读者现在可以指定这些参数的值，并且可以将前面的两种计算结合起来以获得这种情形下 σ 的变化效应。

156 如果无风险利率 r 提高，则 $F(V)$ 提高，因而 V^* 提高。理由是未来时刻 T 所作出的投资开支 I 的现值为 Ie^{-rT} ，但是作为该开支的回报，人们获得的项目现值为 $Ve^{-\delta T}$ 。因此，若 δ 固定， r 的提高会降低投资成本的现值，但是不会降低其回报。然而，尽管 r 的上升提高了企业投资期权的价值，它还会使这些期权得到更少的执行。因此，较高的(实际)利率会减少投资，但其原因却与标准模型中的原因不同。在标准模型中，利率的提高通过提高资本成本而降低了投资；在这个模型中，它提高了投资期权的价值，因而提高了现在就投资的机会成本。(图 5—7 显示了 δ 等于 0.04 和 0.08 时 V^* 对 r 的依赖。)

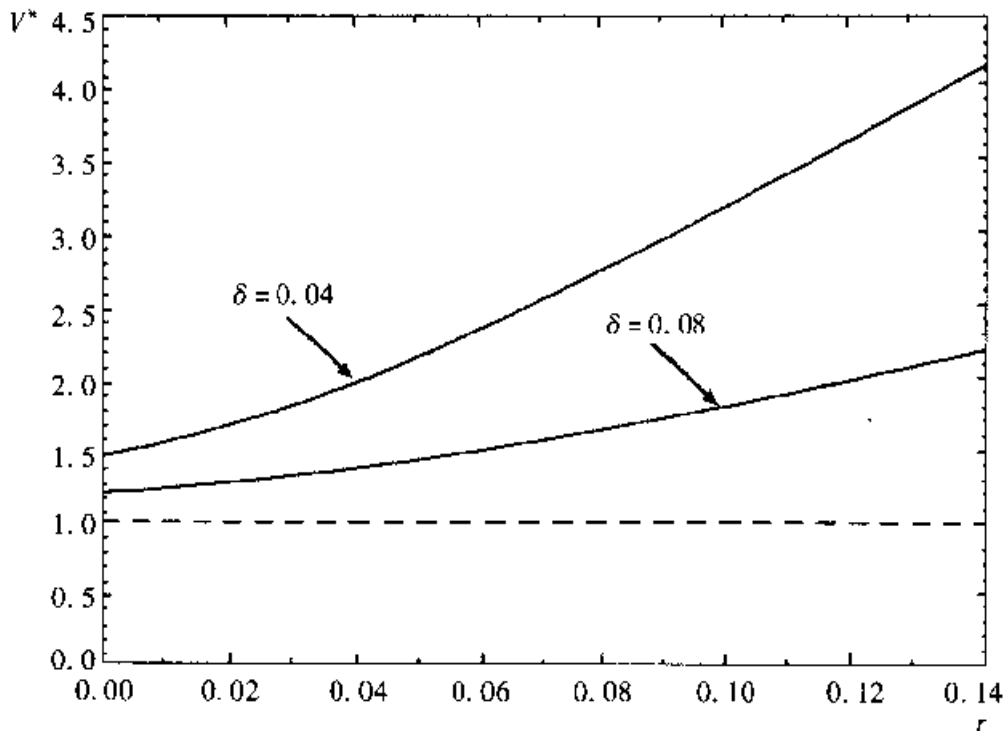


图 5—7 作为 r 的函数的临界价值 V^*

在这个计算中，我们再次保持 δ 固定，而 r 提高。实际上如果保持 α 固定，则 r 增加 1， δ 就增加 1。现在较低的 r 降低了 β_1 ，提高了临界水平 V^* 。在这种意义上，较低的利率阻碍了投资。这是期权理念的一种纯粹表现：低利率使未来相对更重要，因此，它提高了执行投资期权的机会成本。

图 5—8 提供了考察最优投资规则如何取决于参数值的另一条途径。它也让我们根据托宾 q 来计算我们的结果。这里我们使用忽略了执行期权的机

会成本的“现有资产价值”的定义，如前面第5.2.3中所解释的。那么， $q^* = \frac{V^*}{I} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 为 q 的临界值，即投资所要求的 I 的乘数。图5-8显示出根据参数结合 $\frac{2r}{\sigma^2}$ 和 $\frac{2\delta}{\sigma^2}$ 的不同值所画出的常数 q^* 的轮廓。我们已经将 r 和 δ 扩大了 $\frac{2}{\sigma^2}$ 157 倍，因为读者可以通过将 $\beta_1 = \frac{q^*}{q^* - 1}$ 代入式(5-16)来检验， q^* 必须满足

$$\frac{2r}{\sigma^2} = q^* \left(\frac{2\delta}{\sigma^2} \right) - \frac{q^*}{q^* - 1}$$

如图5-8所示，当 δ 变小或 r 变大时，该乘数变大。

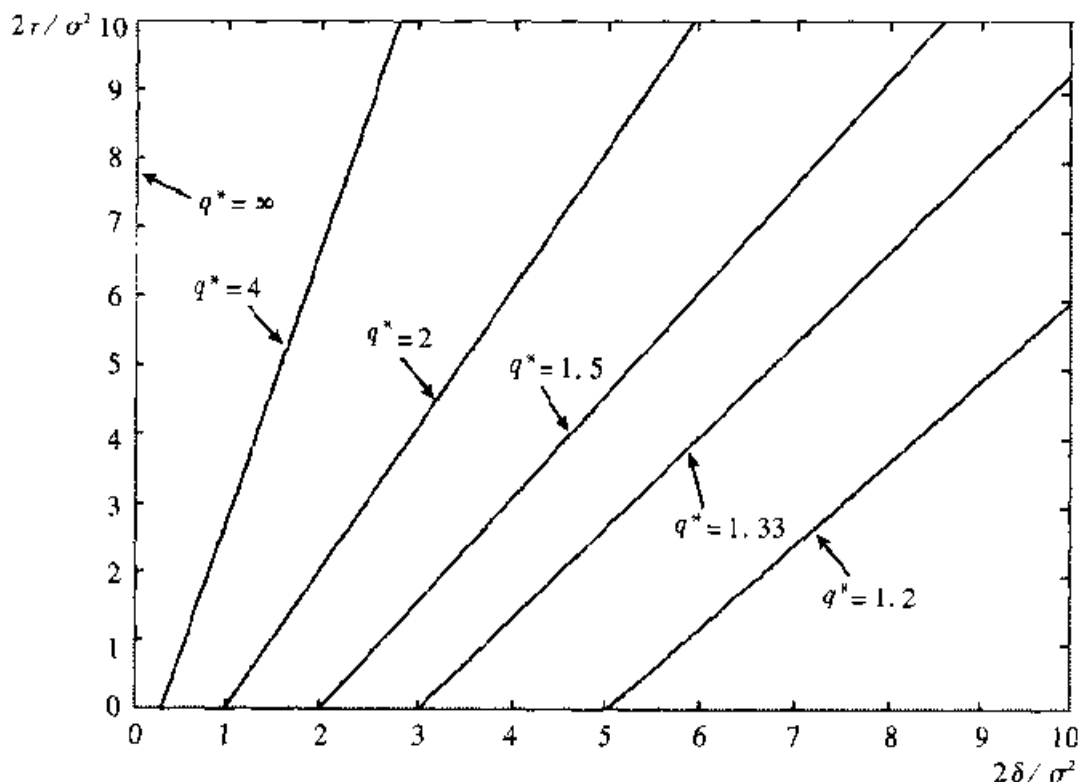


图5-8 常数 $q^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 的曲线

这些静态比较结论与应用于金融看涨期权的结论一样。我们的投资期权与支付股息股票的临时看涨期权相类似，这里， V 为股票价格， δ 为（百分比的）股息率，而 I 为期权执行价格。股票看涨期权的价值及最优执行规则将取决于参数 σ ， δ 和 r ，如图5-1~图5-7所示。^[11]

我们反复强调，当解释静态比较结论时，小心谨慎是非常重要的，因为不同的参数似乎并不是相互独立的。例如，无风险利率 r 的提高可能会导致

158 风险调整的预期回报 μ 的提高, 而当漂移率 α 为常数时, 这意味着 δ 的提高。同样地, σ 的提高似乎与 μ 的提高相伴, 这再一次意味着, 如果 α 为常数, 则 δ 会提高。当分析市场导向的参数 (如 r) 的变化影响投资机会的价值及最优投资规则时, 这种相互依赖必须牢记心中。

159 另一个必须注意的问题是, 在进行静态比较试验时, 我们的模型假定参数 α, σ 等为固定值。如果 α, σ 随时间或适应状态变量 V 的变化而变化 (确定地或随机地), 且企业知道这一点, 则在决定最优投资规则时应当考虑这一点。例如, 式 (5-1) 中的 α 和 σ 有可能会被替换为函数 $\alpha(V, t)$ 和 $\sigma(V, t)$ 。这将在很大程度上使该问题复杂化。如果时间影响参数, 投资机会的价值可能会是 V 和时间 t 的函数, 式 (5-23) 将变成偏微分方程。即使 α 和 σ 仅仅是 V 的函数, 正如 V 的均值回归过程, 关于 $F(V)$ 的普通微分方程也会变得更复杂, 而且一般需要数值解。我们将很快看到这样一个例子。^[12]

图 5-9 和图 5-10 显示了 $V-I$ 和 $F(V) = \left(\frac{1}{4}\right)V^2$ 的样本路径。在这两种情形下, 我们都假定 $\mu = 0.08$, 因此, $\delta = 0.04$, 漂移率 $\alpha = 0.04$ 。(与以前一样, $r = 0.04$ 且 $\sigma = 0.2$ 都为年率。) 我们使每组样本路径开始于 1980 年, 其中 $V_0 = I = 1$ 。考虑一个月的时间间隔, 然后利用下述方程计算 V_t :

$$V_t = 1.00327V_{t-1} + 0.0577V_{t-1}\epsilon_t \quad (5-25)$$

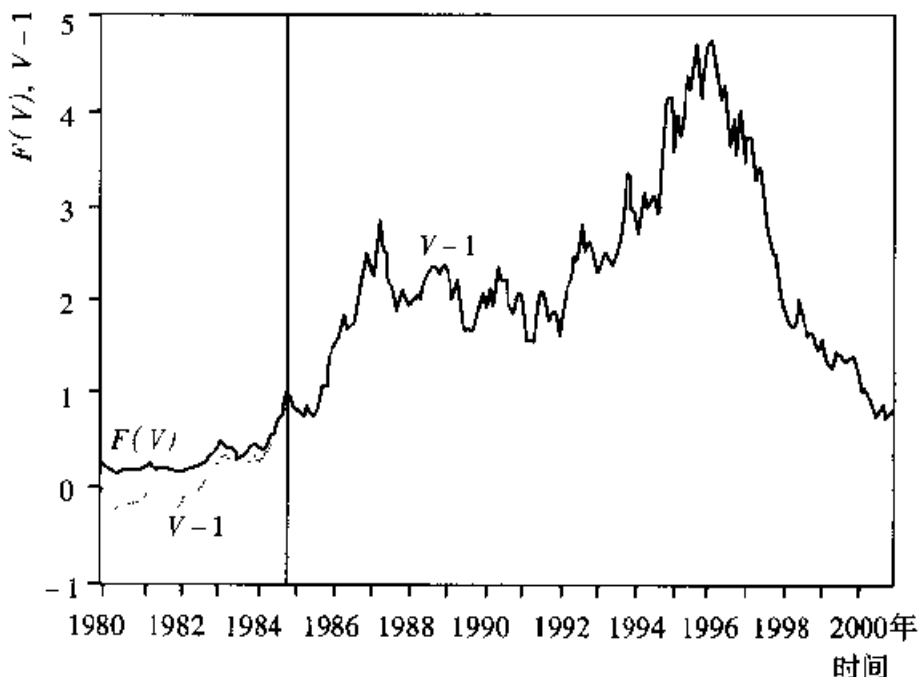


图 5-9 $F(V)$ 和 $V-I$ 的样本路径

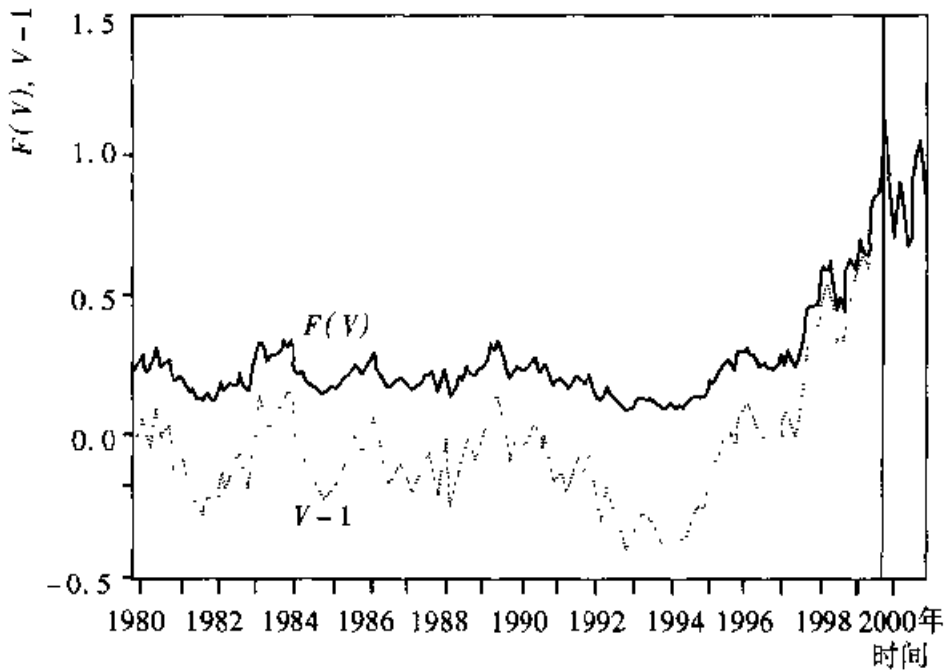


图 5—10 $F(V)$ 和 $V-I$ 的另一条样本路径

在每一时间 t , ϵ_t 服从均值为 0、方差为 1 的正态分布。(注意到相关系数 161
数 $0.0577 = \frac{0.20}{\sqrt{12}}$ 是每月的标准差。)

由于 $V_0 = I = 1$, 标准的 NPV 规则将要求立即投资。然而, $F(V_0) = 0.25$, 因此, $V_0 < I + F(V_0)$, 且企业应当等待而不是投资。图 5—9 中, 在 V 达到 $V^* = 2$ 时, 企业碰巧要等大约 5 年。这一等待时间在某一样本路径与下一样本路径之间能发生大幅度变化。例如, 图 5—10 中所示的样本路径中, 在 V 达到临界值 2 之前, 企业必须等待更长——大约 20 年。^[13]

5.5 其他的随机过程

利用几何布朗运动作为 V 的模型是非常方便的, 但是在一些情形下却是不现实的。在这里, 将考察当 V 遵循其他的随机过程时投资机会的价值及最优投资规则。我们首先要考虑均值回归过程, 然后再来考虑泊松跳跃过程。

5.5.1 均值回归过程

假定 V 服从均值回归过程

$$dV = \eta(\bar{V} - V)Vdt + \sigma Vdz \quad (5-26)$$

因此, 预期 V 变化的百分率为 $\left(\frac{1}{dt}\right)E\left(\frac{dV}{V}\right) = \eta(\bar{V} - V)$, 预期 V 的绝对变化为 $\left(\frac{1}{dt}\right)E(dV) = \eta(\bar{V}V - V^2)$, 为一在 $V=0$ 和 $V=\bar{V}$ 时等于零且最大值为 $V=\frac{\bar{V}}{2}$ 的抛物线。正如我们将要看到的, 这一特殊过程的优势在于能够获得投资问题的解析解。

为找到最优投资规则, 我们将利用或有债权分析。令 μ 为项目的风险调整的贴现率 (即 μ 反映了 V 随机波动中的系统性风险)。在这种情形下, V 的预期增长率不是常数, 而是 V 的函数。因此“差额” $\delta = \mu - \left(\frac{1}{dt}\right)\frac{E(dV)}{V}$ 好像是 V 的函数:^[14]

$$\delta(V) = \mu - \eta(\bar{V} - V) \quad (5-27)$$

我们再次应用微分方程式 (5-23), 但式 (5-27) 代替了其中的 δ 。因此, F 预期 (V) 必须满足下式:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V) + [r - \mu + \eta(\bar{V} - V)]VF'(V) - rF = 0 \quad (5-28)$$

而且与以前一样, 由于同样的原因, $F(V)$ 必须满足边界条件式 (5-10) ~ 式 (5-12)。(注意 $V=0$ 是式 (5-26) 的吸收壁, 因此, $F(0) = 0$ 。)

找到式 (5-28) 的解比找到式 (5-23) 的解要复杂一些。我们通过式 (5-29) 定义了一个新函数 $h(V)$:

$$F(V) = AV^\theta h(V) \quad (5-29)$$

式中, A 和 θ 为常数。通过令 $h(V)$ 满足已知解的微分方程的这样一种方式, 很快就可以选出这两个常数。将 $F(V)$ 的表达式代入式 (5-28) 并整理, 给出方程:

$$V^\theta h(V) \left[\frac{1}{2}\sigma^2 \theta(\theta - 1) + (r - \mu + \eta\bar{V})\theta - r \right] + V^{\theta+1} \left[\frac{1}{2}\sigma^2 V h''(V) + (\sigma^2 \theta + r - \mu + \eta\bar{V} - \eta V) h'(V) - \eta h(V) \right] = 0 \quad (5-30)$$

对任意的 V 值, 式 (5-30) 都必须成立, 因此, 方程第一行和第二行方括号中的项必须等于零。首先我们令方程第一行方括号中的项等于零来选择 θ :

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta(\theta-1) + (r - \mu + \eta\bar{V})\theta - r = 0$$

这个二次方程式关于 θ 有两个解, 一个为正, 另一个为负。为满足 $F(0) = 0$ 的边界条件, 我们使用正解:

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{\mu - r - \eta\bar{V}}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r - \mu + \eta\bar{V}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (5-31)$$

从式 (5-30) 的第二行, 我们有

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V h''(V) + (\sigma^2\theta + r - \mu + \eta\bar{V} - \eta V)h'(V) - \eta\theta h(V) = 0 \quad (5-32)$$

通过作出 $x = \frac{2\eta V}{\sigma^2}$ 的替换, 我们可以将式 (5-32) 变形为标准形式。令

$h(V) = g(x)$, 因此, $h'(V) = \left(\frac{2\eta}{\sigma^2}\right)g'(x)$ 且 $h''(V) = \left(\frac{2\eta}{\sigma^2}\right)^2 g''(x)$ 。那么式 (5-32) 变为

$$xg''(x) + (b - x)g'(x) - \theta g(x) = 0 \quad (5-33)$$

式中,

$$b = 2\theta + \frac{2(r - \mu + \eta\bar{V})}{\sigma^2}$$

式 (5-33) 被称为库默 (Kummer) 方程。其解是合流超几何函数 $H(x; \theta, b(\theta))$, 它下面的级数表达式:^[15]

$$H(x; \theta, b) = 1 + \frac{\theta}{b}x + \frac{\theta(\theta+1)x^2}{b(b+1)2!} + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)x^3}{b(b+1)(b+2)3!} + \dots \quad (5-34)$$

我们已经证明式 (5-28) 的解实际上是式 (5-29) 的形式。解为

$$F(V) = AV^\theta H\left(\frac{2\eta}{\sigma^2}V; \theta, b\right) \quad (5-35)$$

式中, A 为需要确定的常数。从剩余的两个边界条件中, 即 $F(V^*) = V^* - I$ 与 $F_V(V^*) = 1$, 我们可以发现 A , 以及在该点最优投资的临界值 V^* 。因为合流超几何函数为一无限级数, 必须寻找 A 和 V^* 的数值解。

通过考察几个数字例子, 我们可以获得有关均值回归效应的一些知识。除非特别声明, 我们将设定 $I = 1$, $r = 0.04$, $\mu = 0.08$, $\sigma = 0.2$ 。我们改变 η 与 \bar{V} , 然而, 注意到 $\left(\frac{1}{dt}\right)\frac{E(dV)}{V}$ 对 η 的依赖取决于 \bar{V} 的规模。我们将在

跨度 0.5~1.5 之间计算 \bar{V} 的值, 因此, η 值为 0.5 或隐含着一个非常高的均值回归率。

164 图 5—11 显示了 $\eta=0.05$ 时 (蕴含着相对低的均值回归率), $\bar{V}=0.5, 1.0$ 和 1.5 时投资机会 $F(V)$ 及临界值 V^* 的值。为了比较, 注意到如果 $\eta=0$, 模型符合前面的基本模型, 其中 $\alpha=0, \delta=\mu=0.08$; 在那种情形下, V^* 非常接近 1.39。正如我们所期望的, η 值越小, \bar{V} 越大, $F(V)$ 越大且 V^* 越高。其他不变, 较大的 \bar{V} 意味着 V 的较高预期增长率, 因此, 购买 V 的期权将越大。

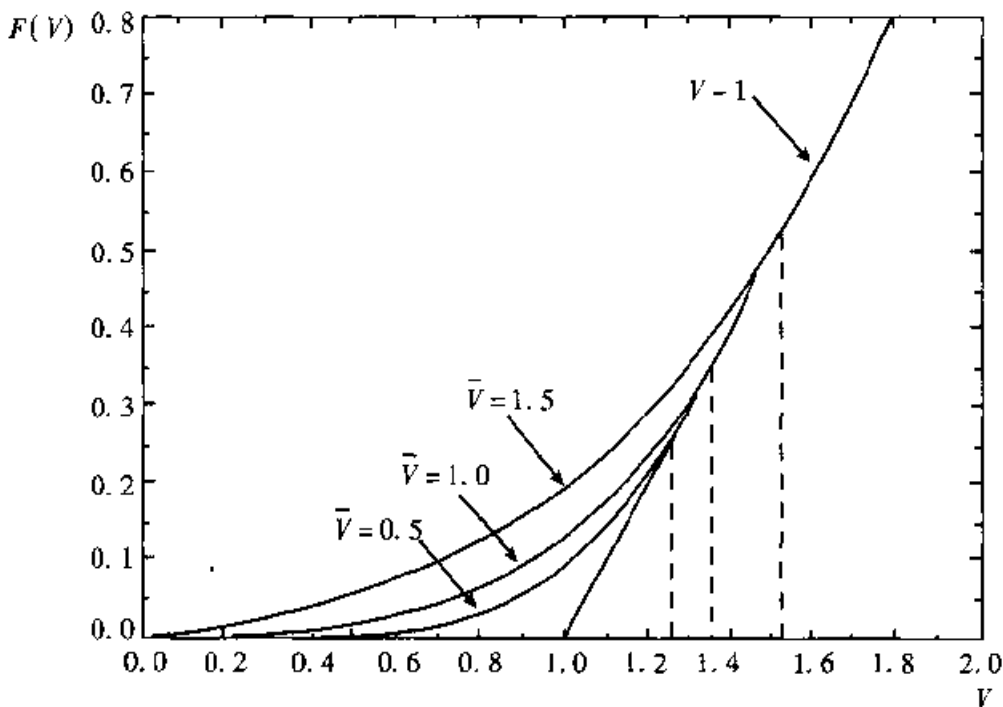


图 5—11 均值回归, $F(V)$, $\eta=0.05$, $\bar{V}=0.5, 1.0$ 和 1.5

图 5—12 和图 5—13 也显示了 $\bar{V}=0.5, 1.0$ 和 1.5 时投资机会 $F(V)$ 及临界值 V^* 的值, 但是在图 5—12 中, $\eta=0.1$, 而在图 5—13 中, $\eta=0.5$ 。正如这些图所显示的, 当 $\bar{V}=1.5$ 时 (大于 I), 较大的 η 值提高了 $F(V)$, 但是当 $\bar{V}=0.5$ 时 (小于 I), 较大的 η 降低了 $F(V)$ 。(如果 $\bar{V}<I$ 且 η 很大, V 在大多数时间内都超过 I 是不大可能的, 投资的期权也不会很大。另外, 如果 $\bar{V}>I$ 且 η 很大, 即使 V 开始时很小, 它也会很快上涨到超过 I 并且在大多数时间内保持高于 I , 因而 $F(V)$ 将会很大。)

165 图 5—12 和图 5—13 还显示出, 如果 \bar{V} 和 η 都很大, $F(V)$ 将不再是单凸的; 对小的 V 值它将变成凹的。这是我们用于描述 V 的演化的特殊随

机过程式 (5-26) 的结论。那一过程在 $V=0$ (因而 $F(V)=0$) 时有一个吸收壁,但是对于小且为正值的 V ,均值回归的吸收率很快上升,因此, $F(V)$

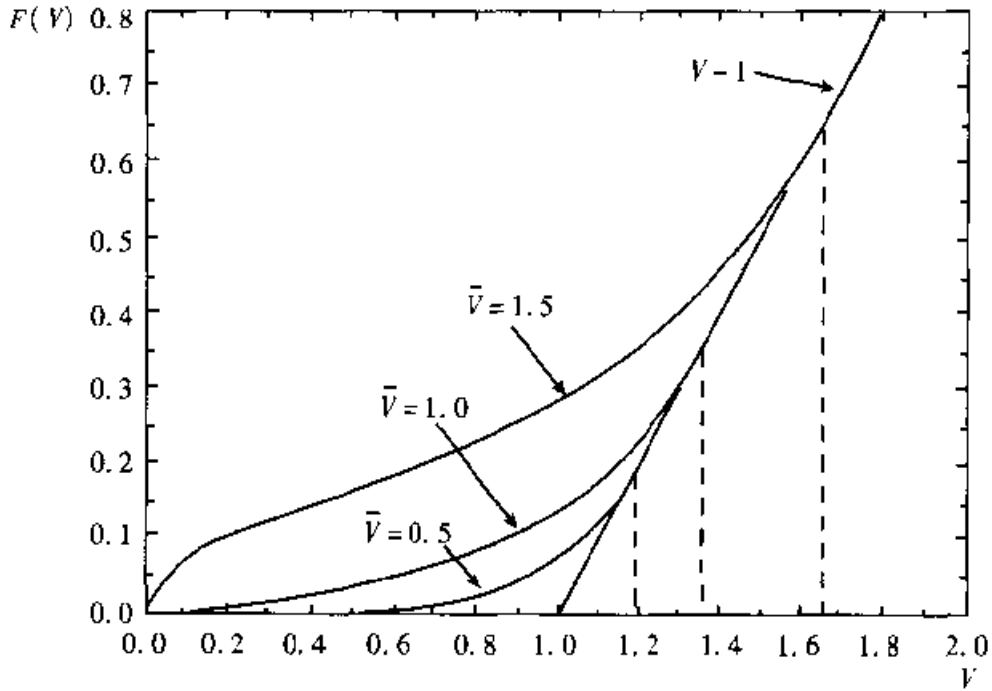


图 5-12 均值回归, $F(V)$, $\eta=0.1$, $\bar{V}=0.5, 1.0$ 和 1.5

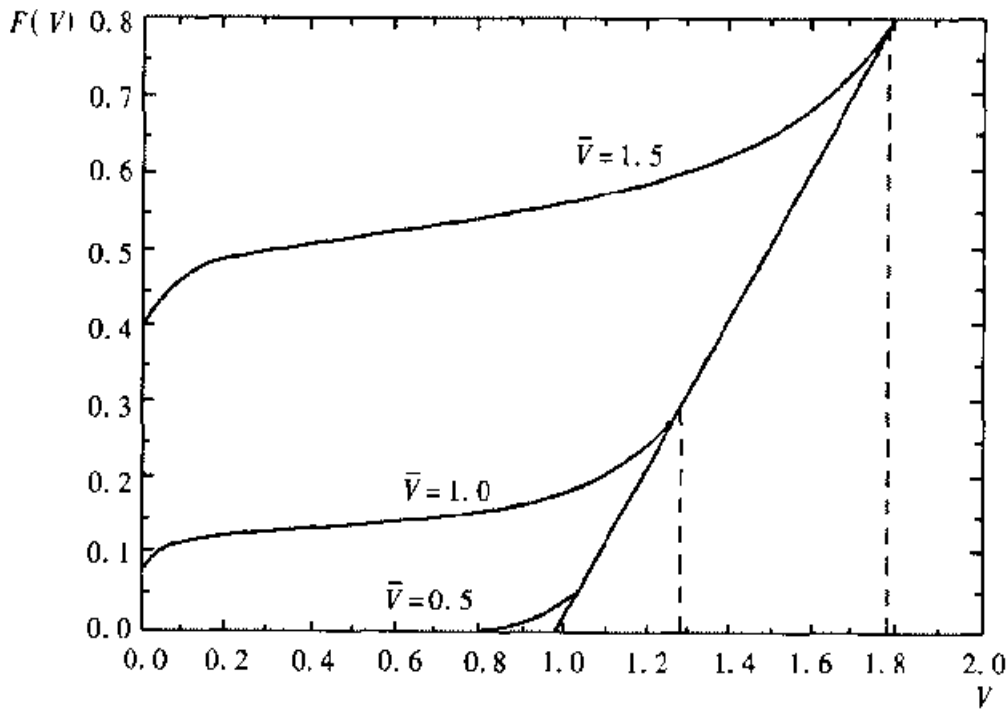


图 5-13 均值回归, $F(V)$, $\eta=0.5$, $\bar{V}=0.5, 1.0$ 和 1.5

似乎将快速上升。这一点在图 5—13 中 $\bar{V} = 0.5$ 的情形下更明显； $F(0) = 0$ ，但是一旦 V 略大于零时， V 的预期增长率就变得很大，因而， $F(V)$ 迅速上升。

图 5—14 显示了 $\bar{V} = 0.5, 1.0$ 和 1.5 时作为均值回归参数 η 的函数的临界值 V^* 。观察到 V 很大时， V^* 随 η 的增加而增长； V 很小时， V^* 随 η 的减少而减少。这正是我们在以前所看到。当 \bar{V} 很大时，较大的 η 提高了 $F(V)$ （从而提高了 V^* ），当 V 很小时，较大的 η 值降低了 $F(V)$ 。图 5—14 表明， $\bar{V} = I$ 是一条分割线，但事实上， V^* 随 η 是升还是降取决于风险调整的预期回报率 μ 。在图 5—14 中， $\mu = 0.08$ 。图 5—15 也显示出， V^* 为 η 的函数，但是仅对 $\mu = 0.04$ ，其他不变。较低的 μ 值意味着更低的预期资本收益“不足”率， $\delta = \mu - \left(\frac{1}{dt}\right)\frac{E(dV)}{V}$ ，以及更大的 $F(V)$ 值。当 η 很小时， $F(V)$ 的这种提高将是最显著的。（当 η 很大时，在任何预期的情形下， V 都将很快回归到 V 。）因此，如果 μ 很小， V^* 将随 η 递减，除非 \bar{V} 远远大于 I 。

166

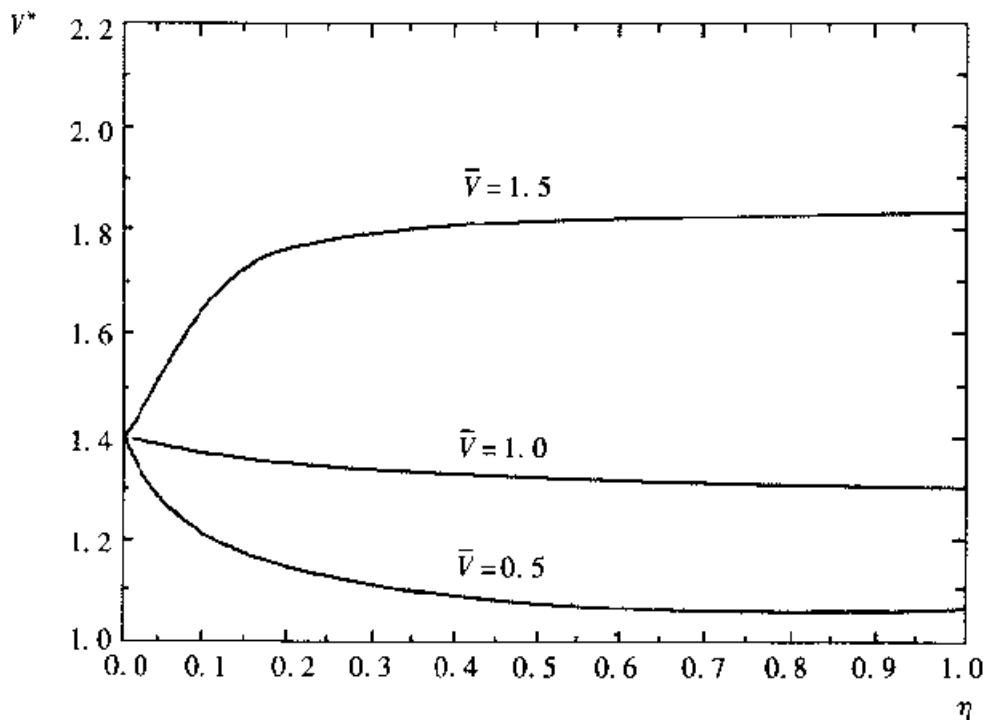


图 5—14 V 作为 η 的函数在 $\mu = 0.08$ ， $\bar{V} = 0.5, 1.0$ 和 1.5 时的临界值 V^*

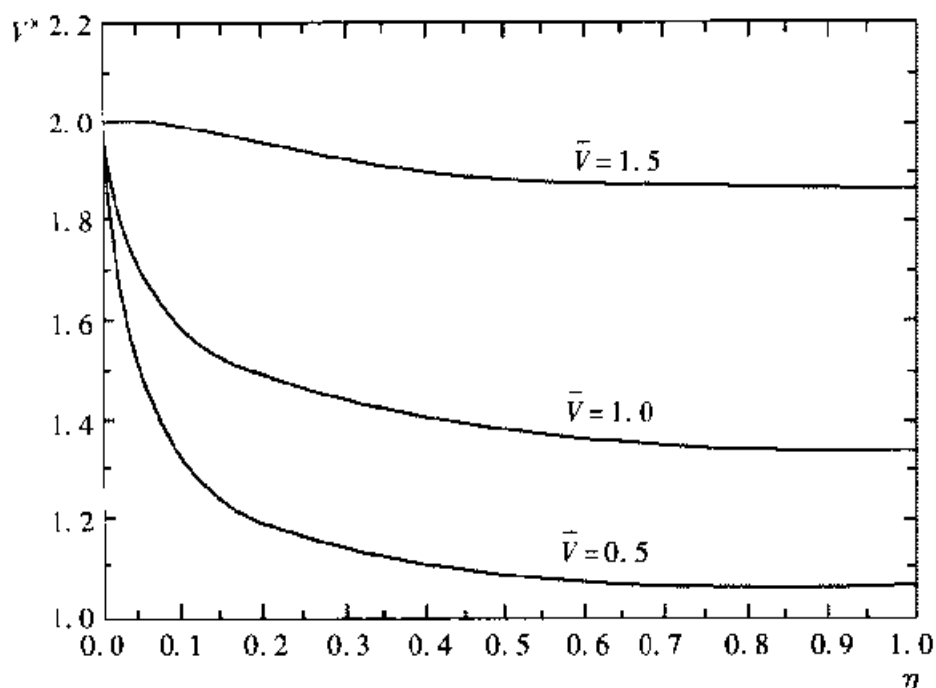


图 5—15 V 作为 η 的函数在 $\mu = 0.04$, $\bar{V} = 0.5, 1.0$ 和 1.5 时的临界值 V^*

最后，图 5—16 和图 5—17 说明了 V^* 对 μ 的依赖。图 5—16 显示了在 $\bar{V} = 1.0$, $\eta = 0.05, 0.1$ 和 0.5 时, V^* 作为 μ 的函数。图 5—17 显示了同样的内容, 但 $\bar{V} = 1.5$ 。注意到在所有情形下, V^* 随 μ 下降; 另外, 较高的 μ 意味着更高的资本收益“不足”率 $\delta(V)$, 因而有较低的 $F(V)$ 和较低的 V^* 。然而, 下降率取决于 \bar{V} 及 η 。 η 很小时, V^* 开始于较大值 (如果 $\eta = 0$, 模型将再次下降到前面所述的那种情形, 其中 $\alpha = 0$, $\delta = \mu$, 因此, $\lim_{\mu \rightarrow 0} V^* \rightarrow \infty$), 而且下降得快 (因为回归到 \bar{V} 的速度很快, 因此, 关于 V 的资本预期收益率很小)。正如我们预期的, 无论 η 与 μ 的值如何, \bar{V} 越大, V^* (及 $F(V)$) 也越大。

我们对 V 所选择的均值回归过程式 (5-26) 在导致投资机会的价值及最优投资规则的拟解析解方面是方便的。这不应被看做是特别的限定, 幸好我们已经对 V 指定了一些其他的均值回归过程 (例如, 均值回归的绝对速度而不是百分比对 V 是线性的)。取决于这一过程, $F(V)$ 最终的微分方程可能或不可能拥有已知的级数解。在任何情形下, 它可以通过数值来求解, 但通常存在一定的难度。

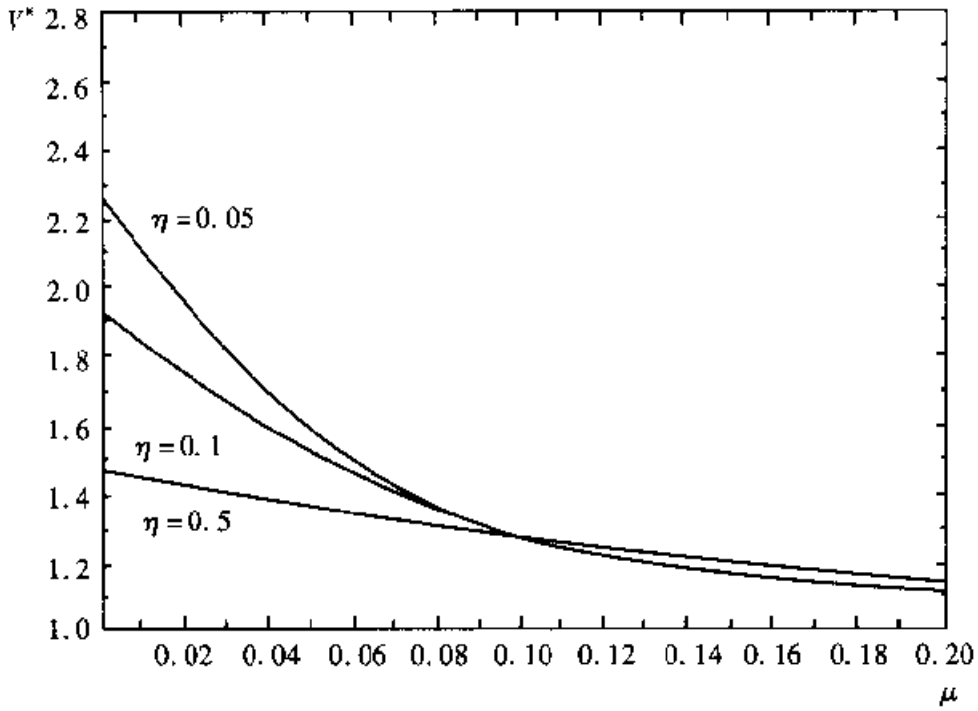


图 5—16 V 作为 μ 的函数在 $\bar{V} = 1.0$, $\eta = 0.05, 0.1$ 和 1.5 时的临界值 V^*

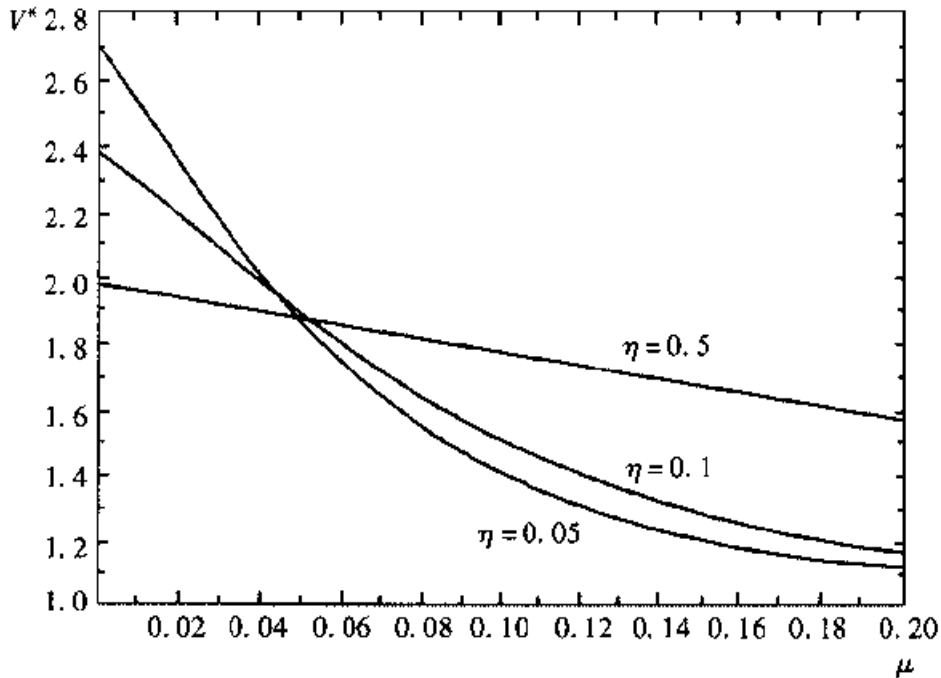


图 5—17 V 作为 μ 的函数在 $\bar{V} = 1.5$, $\eta = 0.05, 0.1$ 和 0.5 时的临界值 V^*

5.5.2 布朗运动与跳跃过程的结合

现在回到我们的基本模型，其中 V 服从几何布朗运动，并以不同的方式将其展开。这一次我们考虑时间上的一些随机点的可能性， V 将有向后的泊松跳跃。这种模型可能描述了这样一种情形：一家公司拥有一种专利，这种专利赋予该公司对一个价值为 V 的项目进行投资的期权，但是其他公司也做研究，如果成功，将允许它们投资类似的项目；如果那些其他公司中有一家成功，引起的竞争将减少利润，因而降低 V 。

为修正我们的基本模型，我们将假定 V 服从混合的布朗运动/跳跃过程：

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz - V dq \quad (5-36)$$

式中， dq 为平均到达率为 λ 的泊松过程中的增量； dq 和 dz 是独立的（因而 $E(dz dq) = 0$ ）。我们假定，如果某一“事件”发生， q 将以概率 1 下降固定的百分比 ϕ ($0 \leq \phi \leq 1$)。这样式 (5-36) 表明， V 将以几何布朗运动波动，但是在每一时间间隔 dt ，它都将以一小概率 λdt 下降到其初始价值的 $(1 - \phi)$ 倍，然后它继续波动，直到另一事件发生。（这类泊松跳跃过程在第 3 章中已描述过。）

弄清楚式 (5-36) 的意义是非常重要的。首先，注意到 V 的预期变化百分率不是 α ，而是 $\left(\frac{1}{dt}\right) E(dV) = \alpha - \lambda \phi$ ，因为在每一时间间隔 dt ， V 下降 100% 的概率为 λdt 。这样， λ 的提高通过增加 V 瞬时下跌的机会而降低了 V 的资本预期收益率。其次，因为泊松事件仅仅是不频繁地发生，在大部分时间里，在一很短时间区间 dt 内， $\frac{dV}{V}$ 的方差正好是布朗运动部分的方差 $\sigma^2 dt$ 。然而，如果泊松事件发生，它会导致非常大的偏差，因此，它在时刻 t 给定信息下计算出来的方差的贡献不能忽略。利用布朗运动的随机游动近似，为简化起见，我们设定 $\alpha = 0$ 并写成下式：

$$dV = \begin{cases} \sigma V \sqrt{dt}, & \text{概率为 } \frac{1}{2}(1 - \lambda dt) \\ -\sigma V \sqrt{dt}, & \text{概率为 } \frac{1}{2}(1 - \lambda dt) \\ -\phi V, & \text{概率为 } \lambda dt \end{cases}$$

那么

$$E[dV] = -\lambda dt \phi V$$

$$\begin{aligned}
 E[(dV)^2] &= (1 - \lambda dt)\sigma^2 V^2 dt + \lambda dt \phi^2 V^2 \\
 \text{Var}[dV] &= E[(dV)^2] - \{E[dV]\}^2 \\
 &= (1 - \lambda dt)\sigma^2 V^2 dt + \lambda dt \phi^2 V^2 - \lambda^2 \phi^2 V^2 (dt)^2 \\
 &= \sigma^2 V^2 dt + \lambda \phi^2 V^2 dt
 \end{aligned}$$

式中忽略含 $(dt)^2$ 的项，等等。

注意到这一方差有两个部分。第一个部分 $\sigma^2 V^2 dt$ 为 dV 的瞬时（或“局部”）方差，它来自过程的布朗运动部分，而且以没有跳跃发生为条件。第二个部分 $\lambda \phi^2 V^2 dt$ ，说明跳跃的可能性。不久我们将利用伊藤引理来找到函数 V 的微分。正如我们在第 3 章所看到的，当伊藤引理应用于混合布朗运动/跳跃过程中时，这一方差中只有第一个部分贡献了包含二阶导数的项；跳跃部分贡献了包含在不同离散点上的价值差异的项。

最后，为了测量 λ 变化的影响，我们想知道 T 的期望值，它是指 V 在下降前连续波动的时间。为决定 $E(T)$ ，我们利用这样的事实，即在时间间隔 $(0, T)$ 内事件不发生的概率为 $e^{-\lambda T}$ 。因此，在小的间隔 $(T, T + dT)$ 内第一个事件发生的概率为 $e^{-\lambda T} \lambda dT$ 。因此，直到 V 发生泊松跳跃之前的期望时间为

$$E[T] = \int_0^{\infty} \lambda T e^{-\lambda T} dT = \frac{1}{\lambda} \quad (5-37)$$

现在我们要利用动态规划来解决最优投资规则。我们假定，企业为风险中性的，因此，其贴现率为 $\rho = r$ 。那么投资机会价值 $F(V)$ 的贝尔曼方程为

$$rFdt = E(dF)$$

我们现在利用混合布朗运动与泊松过程的伊藤引理来展开 dF （参见第 3.5 节）：

$$rFdt = \alpha VF'(V)dt + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F''(V)dt - \lambda \{F(V) - F[(1 - \phi)V]\} dt \quad (5-38)$$

用 $r - \delta$ 代替 α ，上式可重写为

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F''(V) + (r - \delta) VF'(V) - (r + \lambda) F(V) + \lambda F[(1 - \phi)V] = 0 \quad (5-39)$$

同样的边界条件式 (5-10) ~ 式 (5-12)，像以前那样应用。

式 (5-39) 的解再次为 $F(V) = AV^{\beta_1}$ 的形式，但是现在 β_1 为更复杂一点的非线性方程的正解：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - (r+\lambda) + \lambda(1-\phi)^\beta = 0 \quad (5-40)$$

可以在数量上找到既满足式(5-40),同时也满足条件 $F(0)=0$ 的 β 值。那么给定 β_1 ,也可以从式(5-14)和式(5-15)中找到 V^* 和 A ,它们依次分别服从边界条件式(5-11)和式(5-12)。^[16]

图5-18显示了 $\phi=0, 0.4, 1$ 时作为 σ 函数的临界值 V^* 。(在每种情形下, $\lambda=0.1, r=\delta=0.04$ 且 $I=1$ 。)注意 ϕ 越大, V^* 越小。原因是 ϕ 较大的值意味着投资机会的价值较小(当事件发生时, V 将下降较大的比例),这意味着现在就投资而不是等待的机会成本较小。

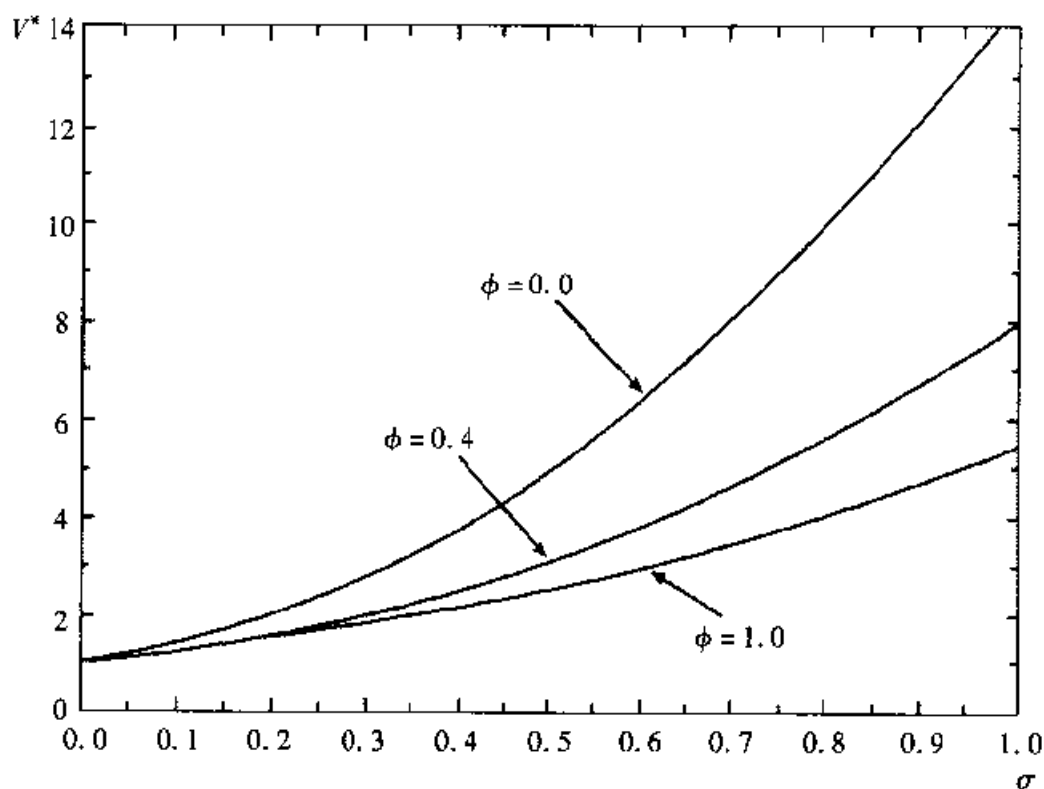


图5-18 $\lambda=0.1$ 时作为混合泊松过程和布朗运动的 σ 的函数的临界值 V^*

表5-1显示了 $\phi=1$ 时(因此,当事件发生时, V 下降为0)不同 λ 值下的 β_1, V^* 及 A 。(在本表中, $r=\delta=0.04, \sigma=0.2$ 且 $I=1$ 。) λ 的正值以两种方式影响投资机会的价值。首先,它减少了 V 的预期资本收益率(从 α 下降到 $\alpha-\lambda$),这降低了 $F(V)$ 。其次,它提高了 V 在有限时间间隔内变化百分率的方差,而这似乎会提高 $F(V)$ 。正如表5-1所示,其净效应是减少 $F(V)$,因此,降低临界值 V^* 。此外,这种净效应非常强大; λ

的微小增加导致 V^* 的大幅下降。例如，利用式 (5-37)，我们知道，如果 $\lambda = 0.2$ ， V 保持为正的预期时间 $E(T)$ 为 5 年，但是与 $\lambda = 0$ 时进行比较， A 下降了一半多，而 V^* 从 2 下降到 1.33。

表 5-1 β_1 ， V^* 和 A 对 λ 的依赖
($I=1$ ， $\phi=1$ ， $r=\delta=0.04$ 及 $\sigma=0.2$)

λ	β_1	V^*	A
0	2.00	2.00	0.250
0.05	2.70	1.59	0.169
0.1	3.19	1.46	0.138
0.2	4.00	1.33	0.105
0.3	4.65	1.27	0.009
0.5	5.72	1.21	0.007
1.0	7.73	1.15	0.005

正如我们在前面所说的，当解释静态比较结论时小心谨慎是非常重要的。在这种情形下，我们在保持 α 固定的条件下增加 λ 。有人会争论说，由市场决定的 V 的预期回报率（在这种情形下为无风险利率 r ）将保持为常数，因此 λ 的增加伴随着 α 的相应增加（否则没有投资者会选择持有该项目）。假定 $\phi = 1$ ，那么，如果 α 与 λ 提高一样多，那么 $\alpha - \lambda$ 仍为常数，我们可以用 $(r + \lambda - \delta)$ 来替换式 (5-40) 中的 $(r - \delta)$ 。在这种情形下， λ 的增加将与无风险利率 r 的提高相同，而且将导致 $F(V)$ 和 V^* 的提高。^[17]

由式 (5-36) 给出的特定的跳跃过程使得关于 $F(V)$ 的微分方程很容易解。当然，人们可以为 V 指定其他过程。例如，一家持有专利的企业可能面临许多潜在的竞争者，每一个竞争者试图开发自己的专利。一个竞争者的胜利会引起 V 的随机数量的下降，而不是固定数量的下降。随着时间的推移，其他竞争者可能在进入市场时获得成功，因此， V 持续下降。然而，此类模型的最优投资规则的计算将更困难，而且似乎必须采用数量解的方法。

5.6 文献导引

麦克唐纳-西格尔 (McDonald-Siegel, 1986) 模型的前身包括：迈尔斯 (Myers, 1977) 的工作，他证明企业的投资期权是其市场价值的成分；图林

霍 (Tourinho, 1979) 的工作, 他证明自然资源储备可以看做是生产该种资源的期权并根据它来定价; 以及丘吉尔曼 (Cukierman, 1980) 和伯奈克 (Bernanke, 1983) 的工作。后两位作者还发展了企业拥有推迟不可逆投资决策从而可以等待新信息的到来的激励的模型。然而, 在他们的模型中, 这种信息使项目的未来价值比较确定; 我们在本章关注的是随时间推移有信息到来的情形, 但是未来总是不确定的。布洛克、罗思柴尔德和斯蒂格利茨 (Brock, Rothschild and Stiglitz, 1988) 考察了不确定性对资本理论的含义, 德默斯 (Demers, 1991) 是研究随着时间推移有信息到来的投资的最新贡献者。

为利用或有债权分析导出最优投资规则, 我们不得不假定来自投资回报的不确定性是建立在现有资产基础上的。达菲和黄 (Duffie and Huang, 1985) 列举了动态生成必须的条件完全集合; 黄和莱茨伯格 (Huang and Litzenberger, 1990)、达菲 (Duffie, 1992) 及多珊 (Dothan, 1990) 提供了研究生教科书水平上的详细讨论。我们也发现, 基本的投资期权与支付股息的股票的永久性看涨期权相似, 而且与此类金融期权有相同的特征。关于金融期权的定价与最优执行的详细处理, 参见考克斯和鲁宾斯坦 (Cox and Rubinstein, 1985)、霍尔 (Hull, 1989) 或加罗和拉德 (Jarrow and Rudd, 1983) 的论述, 对期权定价方法与结论的评述参见史密斯 (Smith, 1976) 的论述。

在 V 服从几何布朗运动的基本情形下, 我们的结论也在迪克西特 (Dixit, 1992) 和平迪克 (Pindyck, 1991b) 的综述性文章中得到描述和解释, 这正是建立本章的基础。而且, 默顿 (Merton, 1977) 及梅森和默顿 (Mason and Merton, 1985) 讨论了金融期权与投资决策之间的联系。除非有破产成本, 莫迪利安尼-米勒定理成立, 因此, 企业的实际投资决策独立于其金融结构。

关于新古典投资理论的一般性评论, 包括调整成本的意义, 参见尼克尔 (Nickell, 1978) 的论述。

【本章注释】

[1] 投资机会类似于支付红利股票的永久性看涨期权。(来自已经完成的项目的回报流等同于股票股利。) 这种期权定价和执行问题的解决方法由萨缪尔森 (Samuelson, 1965) 首先发现。

[2] 如果 $\alpha > 0$, 读者可以证明这一点也满足二阶条件, 在当前的情形下为真。

[3] 乔根森 (Jorgenson, 1963) 证明, 没有不确定性的条件下, 当来自额外单位资本的边际收益等于资本的使用成本时, 企业就应当投资。我们感谢朱瑟皮·伯特拉 (Giuseppe Bertola) 所建议的这种观点。

[4] 根据我们的了解, 该观点首先由马戈林 (Marglin, 1963, Chap.2) 提出。

[5] 关于生成及其含义的更严格、更详细的讨论参见黄和莱茨伯格 (Huang and Litzenberger, 1990) 及达菲 (Duffie, 1992) 的论述。达菲和黄 (Duffie and Huang, 1985) 陈述了生成所需要的全部条件集。

[6] 即 $\phi = \frac{r_m - r}{\sigma_m}$, 这里 r_m 为市场的预期回报, 而 σ_m 为该回报的标准差。如果我们采用纽约证券交易所的指数作为市场, $r_m - r \approx 0.08$, 而 $\sigma_m \approx 0.4$ 。关于资本资产定价模型的更详细的讨论参见布雷利和迈尔斯 (Brealey and Myers, 1991) 及达菲 (Duffie, 1992) 的论述。

[7] 某一常数支出率 δ 及某一必要的预期回报率 μ , 隐含着某一无限生命力的项目。令 π 表示来自项目的收益流:

$$V_0 = \int_0^T \pi_t e^{-\mu t} dt = \int_0^T \delta V_0 e^{(\mu - \delta)t} e^{-\mu t} dt$$

这里隐含着 $T \rightarrow \infty$ 。如果项目为有限寿命, 式 (5-1) 不能代表经营期间 V 的演化。然而, 它可以代表项目建造前期 V 的演化, 这正是投资决策的所有问题。关于这一点更详细的讨论参见马伊德和平迪克 (Majd and Pindyck, 1987, pp.11-13) 的论述。

[8] 由于 $n = F'(V)$ 在这一小段时间内保持固定, 我们没有任何包含 $dF'(V)$ 的项。

[9] 这个结论是由考克斯和罗斯 (Cox and Ross, 1976) 首先证明的。而且, 注意到式 (5-23) 是最大化我们所构建的无风险投资组合的净回报的贝尔曼方程。由于投资组合是无风险的, 该问题的贝尔曼方程为

$$r\Phi dt = -\delta VF'(V)dt + E(d\Phi) \quad (5-i)$$

即投资组合的回报等于它每期所支付的现金流 (这一数值为负, 因为为维持空头必须支付 $\delta VF'(V)$), 加上预期资本收益率。通过替换 $\Phi = F - F'(V)$, 并像以前一样展开 dF , 人们可以看到式 (5-23) 遵循式 (5-i)。而且, 注意到在式 (5-i) 中, $\delta = \mu - \alpha$ 而不是 $r - \alpha$, 因此, 人们仍然必须有一个适用于 V 的经风险调整的预期回报的估计。这正是我们在第

4.3.1 讨论的“等价于风险中性的估价”过程的一个例子。

[10] 注意对 $\sigma=0$, 如果 $\delta \geq 0.04$, 我们有 $V^* = 1$ 。这证实了我们先前对乔氏标准的讨论。

[11] 有关金融看涨期权和它们的静态比较的更详细讨论, 参见考克斯和鲁宾斯坦 (Cox and Rubinstein, 1985) 及霍尔 (Hull, 1989) 的论述。

[12] 或者, 有人可能认为 σ 随时间随机波动, 例如, 根据均值回归过程:

$$d\sigma = \eta(\bar{\sigma} - \sigma)dt + \xi\sigma dw$$

式中, dw 为维纳过程的增加, 它与 dz 不相关。那么投资机会的价值将为两个状态变量 V 和 σ 的函数, 而且将满足一偏微分方程。此类问题已经被霍尔和怀特 (Hull and White, 1987)、斯科特 (Scott, 1987) 及韦金斯 (Wiggins, 1987) 研究过了。

[13] 这一“等待时间”的期望值与方差可以得到系统性计算。我们不需要这些表达式, 但是有兴趣的读者可参阅迪克西特 (Dixit, 1993a, pp. 54 - 57) 的简单情形, 更严格的理论参见卡林和泰勒 (Karlin and Laylor, 1981, pp. 242 - 244) 或哈里森 (Harrison, 1985, pp. 11 - 14) 的论述。

[14] 而且除非存在均值回归的回报流, 我们没有发展解释为什么 V 是均值回归的模型, V 将有一个低于均衡率 μ 的回报率。关于这一点的讨论参见麦克唐纳和西格尔 (McDonald and Siegel, 1984) 的论述。

[15] 关于合流超几何函数及其特征的讨论, 参见阿布拉莫维茨和斯蒂冈 (Abramowitz and Stegun, 1964)、皮尔逊 (Pearson, 1990, Section 7.9), 或者斯莱特 (Slater, 1960) 的论述。

[16] 如果 $\phi = 1$ (因此, 事件是 V 下降到零, 并且永远保持), 式 (5-40) 简化成二次方程, 它就像我们前面的方程, 除了在常数项将泊松过程的参数加到利率中外, 其正解为

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2(r + \lambda)}{\sigma^2}}$$

[17] 默顿 (Merton, 1976) 推导出不支付股息的股票的看涨期权的价格公式, 这种股票的价格遵守混合的布朗运动/泊松跳跃过程, 并且证明, 如果“事件”是股票价格确实下降为零, 初始的布莱克-斯科尔斯 (Black-Scholes, 1973) 的公式适用, 但是由 $r' \equiv r + \lambda$ 替代了无风险利率 r 。他保持股票的预期资本收益率为一常数, 即用 $\alpha + \lambda$ 代替了漂移率 α , 则 λ 的增加将提高期权的价值。

第6章 项目价值与投资决策

175

第5章中不可逆投资的基本模型论证了企业的投资期权与金融看涨期权非常类似。在看涨期权的情形下，作为期权标的的股票价格被假定为服从指定的外生性随机过程，经常是一种几何布朗运动。在我们关于实际投资的模型中，相应的状态变量是项目的价值 V ，我们为它规定了一种外生性的随机过程。

然而，正如我们在第5章开始时所解释的，令 V 服从某种外生的随机过程，特别是几何布朗运动，这是对现实的一种抽象。(1) 如果项目是一家工厂，而且存在可变经营成本， V 将不服从几何布朗运动。(2) 更重要的是，项目价值取决于投入与产出的未来价格及利率等。这些因素依次可以根据各种市场中的潜在需求和技术条

件得到解释。因此， V 的波动可追溯到这些更基本的变量的不确定性上。 V 到底能到什么深度取决于分析的目的。为了理解企业的行为，使用投入与产出的外生性随机过程应该能满足我们的需要。在产业水平上，我们必须使产出价格内生。在更一般的均衡水平上，投入品价格也必须通过同时考虑所有产业内的要素需求来决定。在本章中，我们沿这条思路进行初步的尝试。

在本章，我们考虑一家对能产生给定产出流的单个离散项目拥有优先机会或垄断权力的企业。基本的不确定性是该产出的需求，但是我们给出了固定的规模，这样，在需求与价格之间就有了直接联系。因此，我们令产出价格 P 为外生的，根据指定的 P 的随机过程来决定项目的价值 V 及投资期权的价值 F 。我们的分析方法与第 5 章所采用的一样，即或有债权分析或动态规划。我们将再一次看到，投资期权的价值包括持有的贴息，它意味着对投资的检验比传统的马歇尔标准更困难。

在第 6.1 节，我们从最简单的情形开始，其中生产没有经营成本，则一项已完成项目的价值正好是其收益流的贴现现值，第 5 章关于 V 的公式立即转换成关于 P 的相应公式。

在第 6.2 节，我们引入经营成本 C 。因此，项目在每期将产生等于 $(P - C)$ 的经营利润流。这就提出了一个新问题——产出价格可以经常低于 C ，这可能使经营利润为负值。我们必须详细说明随后会发生什么，我们考虑两种有些极端的可能性。第一种可能性，即本章的主题，如果 P 下降到低于 C ，项目可以被无成本地关闭；如果 P 上升到高于 C ，项目可在以后无成本地重新开始。实际上，这使得项目成为一个包括立即经营期权的无限序列。第二种极端的可能性，假定如果经营曾经重新开始，必然重新招致全部投资成本 I ，从而禁止此类临时性的推迟，我们将在第 7 章考虑这种极端的可能性。因此，为保持未来经营的期权的活力，一些损失必将存在。但是，如果损失大幅上升，项目将被放弃。当然，现实情况是介于这两种极端情形之间。如果经营延缓，一般来说，正在进行的项目所提高的特定资产（如工人的技能、客户的忠诚等）将逐渐消失或“冻结”。这样，重新开始包括了一定的成本，但是这个成本低于重建一个新项目的成本，而差异取决于产品的特征及延缓的期限。我们对两种极端情形的分析所产生的结论可以适当地结合并适应存在于两者之间的特定应用。

在第 6.3 节，我们考虑一些诸如劳动力及原材料之类的投入品的瞬时变动，从而改变来自项目的产出流以适应瞬时的价格波动。现在利润流变成价

格的非线性函数，它改变了不确定性对投资的影响。

在这之前，所有的分析都假定项目一旦启动，将永远持续地制造产出流。作出这种不现实的假定仅仅是为了以简单的方式来阐述期权价值的基本观点。在第 6.4 节，通过引入折旧放松了这种假定。我们表明，对期权价值的影响不是取决于一个项目的死亡速度，而是如何详细地说明企业在其初始项目已经面临结束时可获得的机会。我们还说明，即使以相当快的速度贬值，期权价值仍然具有相当可观的显著性。

在本章的小结部分，我们考虑了这样一种情形，影响企业投资决策的两个变量（产出价格和投资成本）都是随机的。这里投资期权的价值为这两个独立变量的函数，因此，它满足某一偏微分方程。一般地，这些方程非常复杂，需要通过数值来求解。特殊的齐次方程有助于我们将问题简化为常微分方程并解析性地对它求解。现在只有当产出价格与投资成本的比率超过了由等待的期权价值所影响的临界值时，投资才是最优的。

纵观本章，当我们在模型中引入新特征时，我们从第 5 章的分析中所获得的有关期权价值的知识仍然有效且有价值，那里详细说明了数学知识仍然是有用的。在后面的章节，我们将继续推广这个模型，并提出新问题。在第 7 章，我们将考虑如果项目现金流变成负值时，临时性封存或永久性放弃这一项目。在第 8 章和第 9 章，我们将转移到产业均衡的水平上来，其中每家企业拥有投资单个项目的机会。在第 10 章，我们将回到单个企业的视角，但是一般化项目的特征使项目由许多投资步骤组成，在利润流开始产生之前所有步骤都必须完成。最后，在第 11 章，我们考虑增量投资，一旦项目启动，增加投资的每一单位生产能力就开始产出其边际收益。

6.1 最简单的情形：没有经营成本

在本节中，企业的投资项目一旦完成，将永远产出固定的产出流。为方便起见，我们选择来自项目产出的数量为每年 1 单位。假定根据数量 Q 给出的价格的反需求函数为 $P = YD(Q)$ ，这里 Y 为随机移动变量。在本节，假定生产的可变成本为零，企业的利润流正好是 $P = YD(1)$ 。为不失一般性，我们可以将 P 自身看做随机变量。

在本章，我们将假定 P 为最简单的随机过程，和一个非常接近第 5 章

的分析框架，即几何布朗运动：

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (6-1)$$

式中，利润流永远为 P ，其预期值以速率 α 增长。如果未来收益以利率 μ 贴现，当前价格为 P 时，项目的预期现值 V 由 $V = \frac{P}{\mu - \alpha}$ 给出。在这种情形下， V 作为 P 的常数乘数也服从参数为 α 与 σ 的相同几何布朗运动。因此，投资问题退化为在第5章研究过的模型，但是我们将直接根据 P 来重新讨论，以便为即将进行的推广设定一个平台。

6.1.1 经风险调整的回报率

资本资产定价模型允许我们决定经风险调整的贴现率 μ 。为做到这一点，需要将 P 的随机波动“扩展”到金融市场，即存在某种可交易的资产，或者人们可以构建资产的一种动态组合，它恰好与 P 完全相关。为简化说明，我们假定项目产出可直接交易。在这种情形下，贴现率 μ 是 P 的经风险调整的预期市场回报率。如第5章所述，我们有 CAPM 公式：

$$\mu = r + \phi \sigma \rho_{pm} \quad (6-2)$$

式中， r 为适用于无风险现金流的贴现率； ρ_{pm} 为跟踪 P 的资产与整个市场组合间的相关系数； ϕ 为市场价格或风险。由于项目价值 V 所受的限制，必须有 $\mu > \alpha$ 。与第5章一样，将用 δ 来定义差异 $\mu - \alpha$ 。

只有从投资中获得的预期总回报率为 μ 时，投资者才会保持产出或资产与 P 完全相关。这样， α 以预期资本收益的形式出现。剩余的 δ 必须与诸如股息之类的东西一样增长。如果项目的产出为可储存的商品（例如，石油或铜）， δ 将代表来自存储的边际便利收益，即边际存储单位所提供的收益流（减去存储成本）。^[1]一般地，我们令 δ 为指定的外生参数。然而，在实践中，便利收益可以变化（在时间上是随机的，且/或适应诸如总存储量之类的市场范围的变量），而且我们的模型可以用来说明这一点。^[2]

当一些基本参数变化时，必须保持均衡关系 $\mu - \alpha = \delta$ 成立，但是重新恢复均衡时这三个参数值的调整取决于潜在的技术与行为。假定无风险利率 r 及风险的市场价格 ϕ （作为全部市场的特征）对我们的分析来讲都完全是外生性的。现在，当资产 P 增加时， μ 必须提高。若 δ 为一基本的市场常数，则 α 必须变化，以便与 μ 一一对应。然而，如果 α 为基本市场常数，则必须调整 δ ，因为存货的总量可能会变化。当研究 σ 的变化对企业投资决

策的影响时，我们的答案将取决于采纳这些观点中的哪一种。一般地，我们将把 δ 看做基本参数，并调整 α 。当其他规则导致不同的重要结论时，我们会把它指出来。

6.1.2 项目评价

我们的项目是一种或有资产或衍生资产，其回报取决于更基本的资产 P 的价值。我们可以推导出项目的价值为基本资产价格的函数 $V(P)$ 。我们沿袭在第 4 章及第 5 章不同背景下所讨论过的或有债权的定价过程。我们将需要定价的资产(项目)与基本资产(P)的适当组合，构建成为一种无风险的投资组合。由于这一投资组合是无风险的，它必须获得无风险的回报率，这一条件导出了项目的未知价值的微分方程。然后，该方程可以在给定的适当边界条件下求解。

180 假定在时刻 t 构造了一种投资组合，该组合包括 1 单位的项目及 n 单位的产出空头，这里选择 n 使得投资组合为无风险的。考虑在很短的时间区间 $(t, t + dt)$ 内持有这一投资组合。

项目的持有者将在时间区间 dt 内获得收益或利润流 Pdt 。另外，单位空头的持有者必须向相应的多头持有者支付，数额相当于后者可能获得的股息或便利收益，即 δPdt 。这样持有该组合产生的净股息为 $(P - nP) dt$ 。它也产生一定的(随机的)资本收益，这一资本收益等于：

$$dV - n dP = \{ \alpha(P) P [V'(P) - n] + \frac{1}{2} \sigma(P)^2 P^2 V''(P) \} dt + P [V'(P) - n] \sigma(P) dz$$

(注意我们已经利用伊藤引理在定价过程意义上解释 dV 。)现在挑选以便消去含有 dz 的项，从而该组合变成无风险的情形。^[3]因此，投资组合的总回报为

$$\left[P - \delta P V'(P) + \frac{1}{2} \alpha^2 P^2 V''(P) \right] dt$$

令上式等于无风险回报 $r [V(P) - nP] dt$ ，合并同类项，有微分方程

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta) P V'(P) - r V(P) + P = 0 \quad (6-3)$$

简单变换表明，方程的齐次部分为 $V(P) = AP^\beta$ 的解，假定 β 为下面的基本二次方程的根：

$$Q \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0 \quad (6-4)$$

这在第5章是非常熟悉的。在那里,我们给出了方程的根及这些根对三个参数 r , δ 与 σ 的依赖性的详细说明。对我们当前的目的来讲,最重要的是给出了经济条件 $r > 0$ 且 $\delta > 0$, 两个根满足 $\beta_1 > 1$, $\beta_2 < 0$ 。

方程的齐次部分的一般解为两个独立解 $B_1 P^{\beta_1}$ 和 $B_2 P^{\beta_2}$ 的组合。我们将方程的任一特解加到前面去,最容易找到的解为 $\frac{P}{\delta}$ 。因此,有

$$V(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta}$$

式中, B_1 , B_2 为待定常数。

6.1.3 基本泡沫与投机性泡沫

解中 $\frac{P}{\delta}$ 项可直接解释如下:它正好是初始水平为 P 时,收益流 P_t 的预期现值。这是因为 $E[P_t] = P e^{\alpha t}$, 用适当的经风险调整的利率 μ 来贴现,给出下式:^[4]

$$\int_0^{\infty} P e^{\alpha t} e^{-\mu t} dt = \frac{P}{\mu - \alpha} = \frac{P}{\delta}$$

这可以称为项目价值的基本成分,在某种意义上,它是由预期利润流来调整的。另两项必然是价值的投机性成分。出于排除投机的经济考虑,可以忽略它们。

首先,要使项目价格的基本成分有意义,必须使 $V(0) = 0$ 。如果价格在几何布朗运动式(6-1)中曾经为零,它将永远保持为零;用技术术语来讲,零为该过程的吸收壁。在没有期望利润流的条件下,资产会有零价值。然而,由于 $\beta_2 < 0$, 当 $P \rightarrow 0$ 时, P 的幂趋于无穷。为防止分叉值,必须将相应的相关系数设定为 $B_2 = 0$ 。

另一项 $B_1 P^{\beta_1}$ 不容易处理。当 $P \rightarrow \infty$ 时,它代表了对投机性泡沫有吸引力的 V 的成分,如果人们预期以后能以有效资产回报再次出售它,则他们可能估计资产价值超过其基本价值,这正是第一项可以确保的。

为说明这一点,我们证明始终定价于 P^{β_1} 的一项资产单从其预期资本收益中就产生了适当的经风险调整的回报。利用伊藤引理,我们有

$$\begin{aligned} \frac{d(P^{\beta_1})}{P^{\beta_1}} &= \frac{\beta_1 P^{\beta_1-1} dP + \frac{1}{2} \beta_1 (\beta_1 - 1) P^{\beta_1-2} \sigma^2 P^2 dt}{P^{\beta_1}} \\ &= [\beta_1 \alpha + \frac{1}{2} \beta_1 (\beta_1 - 1) \sigma^2] dt + \beta_1 \sigma dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [r + (\mu - r)\beta_1]dt + \beta_1\sigma dz \\ &= [r + \phi\beta_1\rho_{pm}\sigma]dt + \beta_1\sigma dz \end{aligned}$$

式中第三行来自如下事实，即 β_1 满足齐次方程 $Q = 0$ ；最后一行利用了 CAPM 公式 (6-2)。这样 P^{β_1} 回报的标准差刚好为 P 的标准差的 β_1 倍。 P^{β_1} 与市场组合的协方差也变成 P 与市场组合的协方差的 β_1 倍。由于协方差与方差都乘以相同的因子， P^{β_1} 与市场组合的相关系数和 P 与市场组合的相关系数（即 ρ_{pm} ）相同。因此， P^{β_1} 经风险调整的回报率为 $(r + \phi\rho_{pm}\beta_1\sigma)$ ，这实际上是上面最后一行中的预期回报率。^[5]

在本章的其余部分，我们将排除此类投机性泡沫，只剩下由上面的直接积分所发现的价值的成分，即

$$V(P) = \frac{P}{\delta} \tag{6-5}$$

6.1.4 投资期权定价

一旦我们知道作为当前价格 P 的函数的一个已启动的项目的价值 V ，我们就可以利用伊藤引理从 P 的扩散过程得到 V 的扩散过程。原则上，第 5 章的方法使我们可以找到项目中作为 V 的函数的投资期权价值 F 。然而， V 的过程的漂移及扩散参数一般非常难以解释，使得解出联系 F 与 V 的微分方程很困难。另一种一般且更简单的方法是利用前面边界条件为最优执行时在临界值成立的 $V(P)$ 的解，找到作为价格的函数的投资期权 $F(P)$ 的值。

现在我们对简单项目采用这种方法。再次沿袭或有债权的定价步骤，现在投资组合由投资期权和 $n = F'(P)$ 单位的产出空头组成。沿着与以往相同的步骤，读者可以检验我们所得到的微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + (r - \delta)PF'(P) - rF(P) = 0 \tag{6-6}$$

这正像是项目的价值方程式 (6-3)，当然，期权没有股息或利润流。这是一个二阶齐次线性方程式，因此，其解为任意两个相互独立的解的线性组合，即

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$$

式中， A_1 和 A_2 为待定常数。这个解在持有期权是最优的价格范围内是有效的。由于较高的价格使投资更具有吸引力，正在被讨论的范围在 0 到投资的临界值 P^* 之间，当然 P^* 本身作为解的一部分是一个需要确定的未知数。

这样,我们有两个未知数, A_1, A_2 及 P^* , 因此求出这个解需要三个条件。

$F(P)$ 在 0 点附近的极限行为给我们提供了一个条件。 P 很小时, 它上升至执行临界值 P^* 的前景非常遥远。因此, 期权在这种极端情形下几乎没有价值了。为确保 $P \rightarrow 0$ 时 $F(P) \rightarrow 0$, 我们将设定 P 的负幂的系数等于零, 这样有 $A_2 = 0$ 。

关于其他两个条件, 我们考虑 $F(P)$ 在点 P^* 的行为。在这一临界值, 执行期权是最优的, 因此, 通过生成投资 I 的执行价格 (沉没成本) 可以获得价值为 $V(P)$ 的资产 (该项目)。正如在第 5 章中, 两个条件主导了这一点。(1) 期权的价值必须等于通过执行期权获得的净值, 这就是价值匹配原则:

$$F(P^*) = V(P^*) - I \quad (6-7)$$

(2) $F(P)$ 与 $V(P) - I$ 的图像相切于 P^* , 这就是平滑粘贴条件:

$$F'(P^*) = V'(P^*) \quad (6-8)$$

利用 $F(P)$ 与 $V(P)$ 的特定函数形式, 我们能将价值匹配条件和平滑粘贴条件写为

$$A_1(P^*)^{\beta_1} = \frac{P^*}{\delta} - I$$

$$\beta_1 A_1(P^*)^{\beta_1 - 1} = \frac{1}{\delta}$$

这可以得到

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta I \quad (6-9)$$

为方便参考, 我们也说明 A_1 的解, 即

$$A_1 = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1} I^{-(\beta_1 - 1)}}{(\delta \beta_1)^{\beta_1}} \quad (6-10)$$

利用关系式 (6-5), 我们可以根据价格的临界值等价地表示出价值的临界值:

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$$

这实际上就是第 5 章中的式 (5-4)。这样我们根据基本价格得出的标的资产的项目价值及期权价值与我们直接从项目价值出发所获得的结论相同。在现在的情形下, V 是 P 的一个常数乘数, 直接说明这两种方法的等价性很容易。然而, 结论是非常一般化的。一般地, 我们发现从 P 的角度开展工

作在某种程度上更方便，因为它是经济学中更基本的变量。

第 5 章中所强调的重要观点是 $V^* > I$ 。等待投资的期权价值隐含着行动的临界值，其中投资的预期价值超过了成本。这里相应的观点是 $\frac{P^*}{\delta} > I$ 或 $P^* > \delta I$ 。我们可以将 δI 称为投资的流动—等价成本（单位时间），即如果随后的预期价值可以抵消投资成本时，初始利润流必须保持的水平。^[6]

在第 5 章中，我们详细讨论了这样一个因子，即“期权价值乘数” $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ ，它可以使 V^* 超过 I 。我们在参数 r 、 σ 及 δ 的变化范围内计算了 V^* 的数量。没有必要在这里重复那些观点，但将在本章后面所讨论的更一般的新模型中进行相应的计算。

同样地，在第 5 章我们将托宾 q 值定义为资产价值与重置成本的比率，即 $\frac{V}{I}$ 。这使我们可以将等待的影响解释为下述情形的可能性：只要 q 仍低于 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ ，即使 q 超过 1 也不发生投资。现在可以同样地定义 $q = \frac{P}{\delta I}$ 并得到相同的解释。

185

6.1.5 动态规划

如果 P 的风险不能由现有资产来生成，就不能构造无风险的投资组合并利用它来得到关于 $V(P)$ 的微分方程。正如我们在第 4 章及第 5 章已经解释过的，实际上可以利用具有外生指定的贴现率 ρ 的一个动态规划，尽管我们不能利用 CAPM 使这一贴现率与无风险利率及市场价格联系起来。下面是这些步骤的一个概括。

项目在时刻 t 的价值可以被解释为在时间区间 $(t, t + dt)$ 内经营利润的数量及 $t + dt$ 后的持续价值。这样

$$V(P) = Pdt + E[V(P + dP)e^{-\rho dt}]$$

利用伊藤引理扩展等式左边，我们有

$$V(P) = Pdt + \left[\alpha PV'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) \right] dt + (1 - \rho dt)V(P) + o(dt)$$

式中， $o(dt)$ 包括了比 dt 更快地趋于零的项。简单地，对上式除以 dt ，并

对 $dt \rightarrow 0$ 时求极限, 得到微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + \alpha P V'(P) - \rho V(P) + P = 0$$

除了 r 由 (任意的) 贴现率 ρ 替代, $(r - \delta)$ 由 α 替代外, 这与我们在前面所得到的式 (6-3) 非常相像。可以用同样的方法来求解方程, 并排除泡沫解, 我们得到 $V(P) = \frac{P}{\rho - \alpha}$ 。为了保证这两个解在经济上有意义, 我们要求 $\rho > \alpha$ 。

那么, 投资期权也可以进行类似分析。从 P 在范围 $(0, P^*)$ 内开始, 期权一直被持有。将未来划分为瞬时时间区间 $(t, t + dt)$ 和超过该区间的延续部分, 像上面一样展开并化简, 得到微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + \alpha P F'(P) - \rho F(P) = 0$$

现在考虑二次方程

$$Q \equiv \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + \alpha\beta - \rho = 0$$

由于 $\rho > \alpha$, 这一方程较大的根 β_1 超过了 1。由于 $\rho > 0$, 另一根 β_2 为负, 则期权价值的解有 $F(P) = A_1 P^{\beta_1}$ 这样的形式, 其中 A_1 为待定常数。

最后, 在点 P^* 利用价值匹配和平滑粘贴条件来完成对 $F(P)$ 和 $V(P)$ 的求解。结果为

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} (\rho - \alpha) I$$

这是前面式 (6-9) 的自然模拟。

在本章其他部分, 我们假定资产复制存在并采用或有债权方法, 而将使用动态规划时所应用的明显的修正留给读者。有时候, 为了变通和简化说明, 我们也会采取相反的办法。

6.2 经营成本与临时推迟

再次假定产出价格服从式 (6-1) 中的几何布朗运动。则 α , σ , μ 及 $\delta \equiv \mu - \alpha$ 均为常数。如果投资于项目的期权曾经将要执行, 我们需要有 $\mu > \alpha$, 或者 $\delta > 0$, 假定这正是实际的情形。我们还将假定项目的经营所需成本流为 C , 但是当 P 下降到低于 C 时, 经营可以被临时地或无成本地推迟,

而且如果以后 P 上升到高于 C 时, 经营可以被无成本地恢复。因此, 在任意时刻来自该项目的利润流由式 (6-11) 给出:

$$\pi(P) = \max[P - C, 0] \quad (6-11)$$

麦克唐纳和西格尔 (McDonald and Siegel, 1985) 指出了考察这种项目的另一条有用途径, 它给予项目所有者一个无限期权的集合。在时刻 t 的期权如果被执行, 则意味着支付 C 以获得在当时盛行的 P_t 。由于每种期权仅能在特定的时刻被执行, 这些期权被称为欧式看涨期权。^[7]他们还表明, 通过 (利用标准的布莱克-斯科尔斯公式) 评价这些期权中的每一个, 然后利用在 t 的积分把这些价值加总, 项目就可以被定价。我们发现, 把项目看做依赖于 P 的简单的或有债权比较容易评价项目。下面, 将完成求解 $V(P)$ 的步骤, 在后面, 将转到投资期权定价的问题上去。

187

6.2.1 项目价值

我们再来考虑由 1 单位项目及价格为 P 的资产的 $n = V_P(P)$ 单位空头所组成的投资组合。在很短时间区间 $(t, t + dt)$ 内持有该组合时, 该组合所有者可以执行当前的经营期权。如果 $P > C$, 这是有盈利的; 最终利润流的增长刚好为 $\pi(P) = \max(P - C, 0)$ 。这种投资组合的其他方面 (资本收益、空头的股息支付等) 与以前相同。因此, 该项目价值的微分方程为

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta) P V'(P) - r V(P) + \pi(P) = 0$$

这可以用类似的方法来求解。齐次部分有两个与前面完全相同的独立解 P^{β_1} 和 P^{β_2} 。惟一的新特征在于非齐次部分, 或强制函数 $\pi(P)$, 在 $P < C$ 和 $P > C$ 时有不同的定义。因此, 我们对 $P < C$ 和 $P > C$ 解方程, 并且在 $P = C$ 点将这两个解结合起来。

在 $P < C$ 区域内, 我们有 $\pi(P) = 0$, 所以只有方程的齐次部分存在。因此, 一般解为以两个根为幂的线性组合:

$$V(P) = K_1 P^{\beta_1} + K_2 P^{\beta_2}$$

式中, K_1 和 K_2 为待定常数。在区域 $P > C$, 我们采用齐次部分解的另一线性组合, 并且加上整个方程的任意一个特殊解。一个简单的替换, 表明

$\left(\frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}\right)$ 满足方程。因此, 对 $P > C$, 一般解为

$$V(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$$

式中, B_1, B_2 为待定常数。

这些解有简明的经济学解释。在区域 $P < C$, 经营被推迟, 项目不产生当前利润流。然而, 当经营恢复且产生利润时, 价格过程在未来某一时间移动到 $P > C$ 的区域内的概率大于零。当 $P < C$ 时, 价值 $V(P)$ 正好是这种未来利润流的预期现值。

接下来, 考虑 $P > C$ 的区域。假定在某一时刻, 企业被迫永远持续经营该项目, 即使风险性收益下降到低于 C 的时间区间也一样。这种项目的净价值是什么? 预期的收益流以 α 比率增加, 并且以适当的经风险调整的利率 μ 贴现, 因此, 预期现值为 $\frac{P}{\mu - \alpha} = \frac{P}{\delta}$, 确定的常数成本流 C 以无风险利率 r 进行贴现, 产生的现值为 $\frac{C}{r}$, 净值 $\left(\frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}\right)$ 构成了上述解的后两项。由于除了损失外该解对持续经营不产生任何要求, 因此另外两项必须是当 P 下降到低于 C 时未来推迟经营的期权的额外价值。

解中常数由在区域边界要考虑的事项来确定。从 $P < C$ 开始。当 P 非常小时, 除非在遥远的未来, P 提高到超过 C 变得不可能。这样未来利润的预期现值将趋于零, 因此项目的价值也趋于零。然而, 在 β_2 为负时, 当 $P \rightarrow 0$ 时, $P^{\beta_2} \rightarrow \infty$ 。因此, 常数(即 K_2)乘以这一项应当为零。现在转到 $P > C$ 。当 P 非常大时, 除非在遥远的未来, 推迟期权不可能实施, 因此, 其价值应为零。正因为如此, 我们通过令 $B_1 = 0$ 来排除 P 的正幂。^[8] 于是有

$$V(P) = \begin{cases} K_1 P^{\beta_1}, & P < C \\ B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}, & P > C \end{cases} \quad (6-12)$$

这样还剩下两个常数, 我们下面考虑 $P = C$ 上的点, 在这一点两个区域相交。由于 P 的布朗运动可以围绕这一边界自由分散, 价值函数不能在边界上突然改变。实际上, 解 $V(P)$ 关于 C 必须是连续可微的。一个有启发性的探讨参见迪克西特 (Dixit, 1993a, Section 3.8) 的论述; 在卡拉扎斯和施里夫 (Karatzas and Shreve, 1988, Theorem 4.4.9) 的论述中也有一个严格的证明。令两个组成部分在点 C 的解的值和导数相等, 我们有:

$$K_1 C^{\beta_1} = B_2 C^{\beta_2} + \frac{C}{\delta} - \frac{C}{r}$$

$$\beta_1 K_1 C^{\beta_1 - 1} - \beta_2 B_2 C^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta}$$

189 这是未知数 K_1 和 B_2 的两个线性方程。很容易求出两个解：

$$K_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta} \right) \quad (6-13)$$

$$B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta} \right) \quad (6-14)$$

由于关于 K_1 的项包括了来自未来恢复经营的期权的预期利润，而关于 B_2 的项是未来推迟期权的价值，因此这两个常数都为正。为此，我们需要有

$$r > \beta_1(r - \delta)$$

$$r > \beta_2(r - \delta)$$

为证明这两点，求二次式 $Q(\beta)$ 在 $\beta = \frac{r}{r - \delta}$ 的值。我们有

$$Q\left(\frac{r}{r - \delta}\right) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 r \delta}{(r - \delta)^2} > 0$$

因而 $\frac{r}{r - \delta}$ 或者位于较大的根 β_1 的右边或者较小的根 β_2 的左边。首先假定

$r > \delta$ ，因而 $\frac{r}{r - \delta} > 0$ ，则

$$\frac{r}{r - \delta} > \beta_1 > \beta_2$$

这是我们已经证明过的。下面，假定 $r < \delta$ ，因此 $\frac{r}{r - \delta} < 0$ ，则

$$\frac{r}{r - \delta} < \beta_2 < \beta_1$$

上式乘以负数 $(r - \delta)$ ，改变了不等式的方向，我们再次得到期望的结果。

数值例子有助于说明该解。除非特别声明，我们令 $r = \delta = 0.04$ 及 $C = 0$ 。图 6—1 显示了 $V(P)$ 作为 P 的函数在 $\delta = 0, 0.2$ 及 0.4 时的图像。当 $\sigma = 0$ 时，不存在 P 在未来上升的可能性，因此，对 $P < 10$ ，项目将永不生产（且没有价值）。如果 $P > 10$ ， $V(P) = \frac{P - 10}{0.04} = 25P - 250$ 。然而，如果 $\sigma > 0$ ，只要 $P > 0$ ，项目始终有一定价值；尽管企业现在可能不生产，它在将来某一点也会生产。另外，由于未来利润向上的潜力是无限的，而利润向下的潜力的极限为零，因而 σ 越大，未来预期利润流也越大， $V(P)$ 也越大。

图 6—2 显示了在 $\sigma = 0.02$ 及 $\delta = 0.02, 0.04$ 及 0.08 时的 $V(P)$ 。对任何固定的经风险调整的贴现率，更高的 δ 值意味着更低的预期价格增长率以

及更低的项目价值。

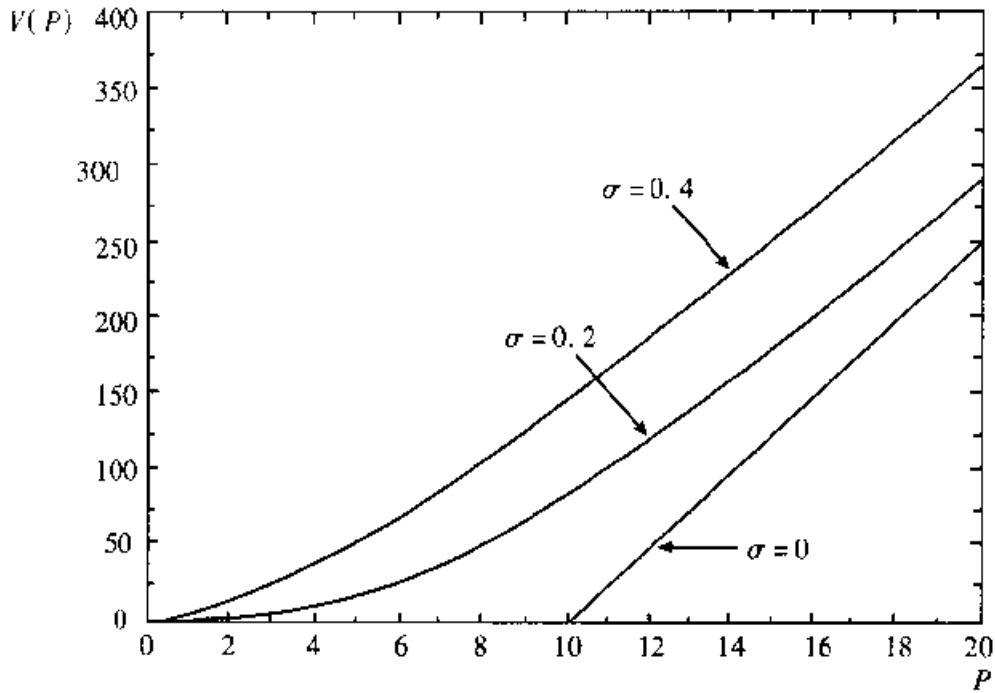


图6—1 项目价值 $V(P)$, $\sigma = 0, 0.2$ 和 0.4
($r = \delta = 0.04$, $\delta = 0.2$ 且 $C = 10$)

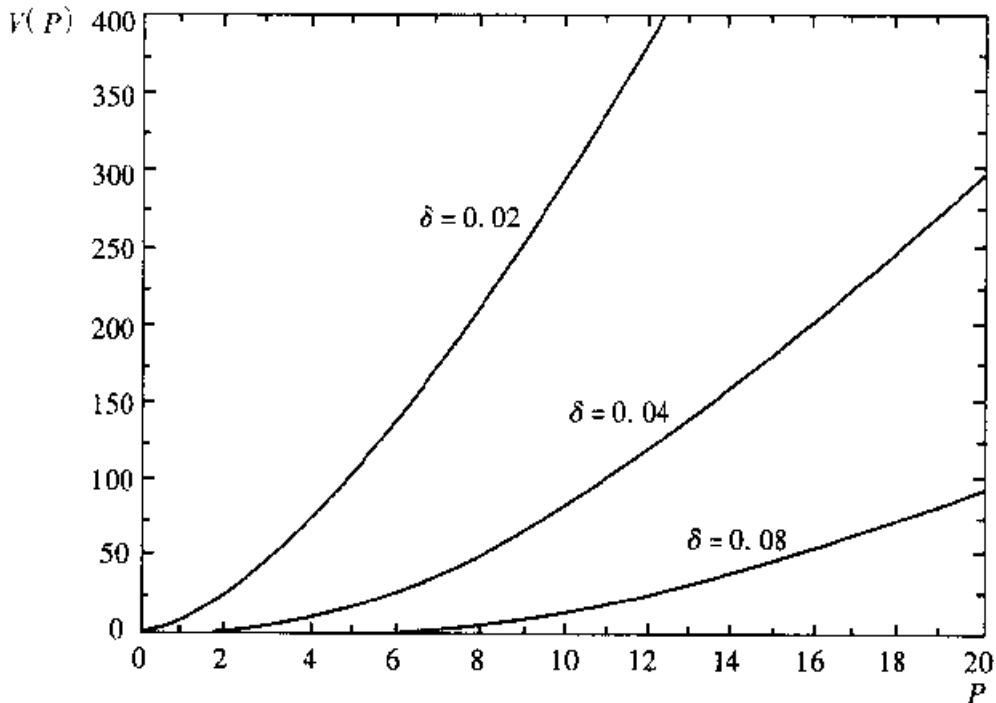


图6—2 项目价值 $V(P)$, $\sigma = 0.02, 0.04$ 和 0.08
($r = 0.04$, $\sigma = 0.2$ 且 $C = 10$)

6.2.2 投资期权的价值

现在知道了项目价值 $V(P)$ ，可以发现项目投资期权的价值 $F(P)$ ，以及最优投资规则。由于价格 P 服从几何布朗运动式 (6-1)，我们可以重复与前面相同的步骤来建立下述形式的投资期权价值：

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$$

由于 $P=0$ 为吸收壁，因而 $F(0)=0$ 。我们知道 $A_2=0$ ，在最优执行点 P^* ，有把 $F(P)$ 与式(6-12)中适当的 $V(P)$ 联系起来的价值匹配及平滑粘贴条件。当然，当 $P < C$ 时，投资期权不会被执行；若仅仅使项目在一段时间内空闲，没有理由会产生投资成本 I 。这可以正式地证明： $A_1 P^{\beta_1}$ 不满足 $K_1 P^{\beta_1} - I$ 的价值匹配和平滑粘贴条件。因此，在式(6-12)中，在经营阶段，即 $P > C$ 时，利用关于 V (P) 的解，则可以给出价值匹配与平滑粘贴条件：

$$A_1 (P^*)^{\beta_1} = B_2 (P^*)^{\beta_2} + \frac{P^*}{\delta} - \frac{C}{r} - I \quad (6-15)$$

$$\beta_1 A_1 (P^*)^{\beta_1 - 1} = \beta_2 B_2 (P^*)^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} \quad (6-16)$$

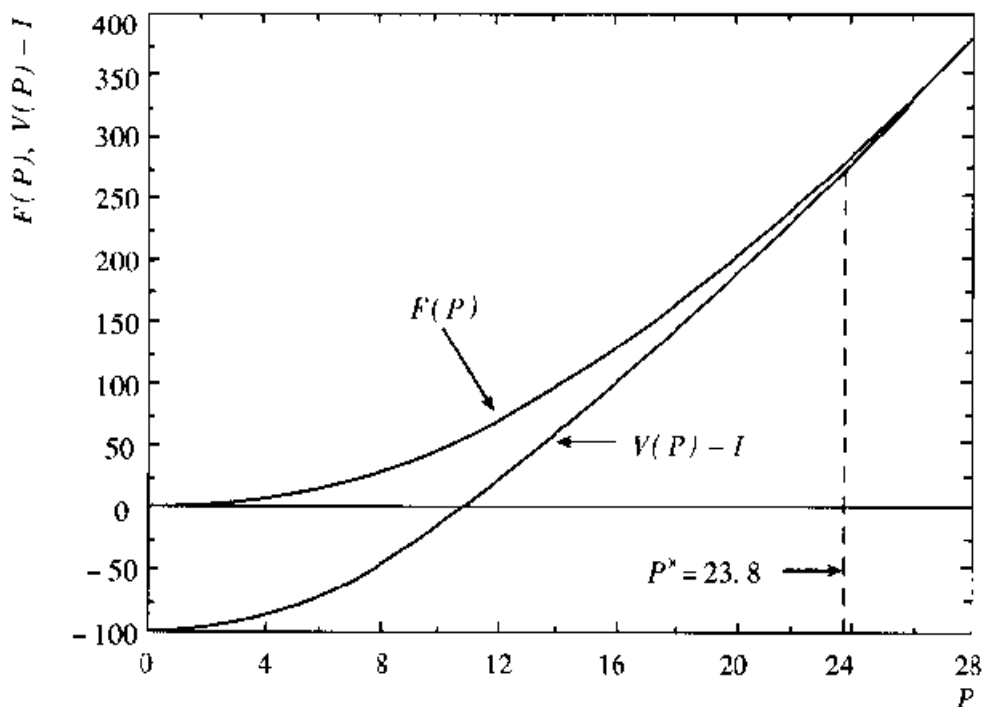
考虑到 B_2 在式 (6-14) 中为未知数，因而式 (6-15) 和式 (6-16) 可以对 A_1 和 P^* 求解。去掉 A_1 ，我们对投资临界值有一个方程：

$$(\beta_1 - \beta_2) B_2 (P^*)^{\beta_2} + \frac{(\beta_1 - 1) P^*}{\delta} - \beta_1 \left(\frac{C}{r} + I \right) = 0 \quad (6-17)$$

可以非常简单地求出式(6-17)的数值解，从而给出最优投资规则。首先，读者可以检验，式(6-17)对 P^* 有大于 $(C + rI)$ 的惟一解，这就是马歇尔完全成本(经营成本加上投资的资本成本的利息)；其次，可以检验 $V(P^*) > I$ ，因此，在投资是最优选择之前，项目必然有一个超过零的净现值。

回到数值的例子， $r = \delta = 0.04$ ， $\sigma = 0.2$ 及 $I = 100$ 时 $F(P)$ 和 P^* 的解的图像如图 6-3 所示。该图画出了 $F(P)$ 和 $V(P) - I$ 。考虑到价值匹配条件， P^* 满足 $F(P^*) = V(P^*) - I$ ；由平滑粘贴条件知， P^* 为两条曲线的切点。

考察 σ 与 δ 变化时这些曲线如何变化是非常有用的。正如我们在前面所看到的， σ 的上升导致对任意的 P 都有 $V(P)$ 的提高。(正如我们所解释过的，项目是未来生产的一组看涨期权，价格的波动性越高，这些期权的价值也越大。)然而，尽管 σ 的增加提高了项目的价值，它也提高了投资为最优选择时的临界价格，即 $\frac{\partial P^*}{\partial \sigma} > 0$ 。原因是对任意的 P ，投资期权的价值(从而投

图 6—3 投资机会的价值 $F(P)$ 与 $V(P) - I$

($r = \delta = 0.04$, $\sigma = 0.2$ 且 $I = 100$)

资的机会成本) $F(P)$ 比 $V(P)$ 提高得更多。因而正如第 5 章所发展的较简单模型, 提高的不确定性减少了投资。这可由图 6—4 说明, 它显示出 $\sigma = 0, 0.2$ 及 0.4 时的 $F(P)$ 及 $V(P) - I$ 。当 $\sigma = 0$ 时, 临界价格为 14, 它使项目的价值正好等于其成本 100; 随着 σ 上升, $V(P)$ 和 $F(P)$ 两者都提高。 $\sigma = 0.2$ 时, $P^* = 23.8$; $\sigma = 0.4$ 时, $P^* = 34.9$ 。

δ 的提高也会提高企业应当投资时的临界价格 P^* 。有两种相反的效应, 如果 δ 较大, 则 P 的预期增长率较小, 未来生产期权价值较小, 因此 $V(P)$ 较小。同时, 等待投资的机会成本上升 ($F(P)$ 的预期增长率较小), 因此对执行期权有更多的激励而不是保持期权存在。第一种效应占优势, 因此较高的 δ 导致较高的 P^* 。这在图 6—5 中得到说明, 该图显示了 $\delta = 0.04$ 和 0.08 时的 $F(P)$ 和 $V(P) - I$ 。(在这两种情形下, $r = 0.04$ 且 $\sigma = 0.2$ 。)注意, 当 δ 提高时, $V(P)$ 从而 $F(P)$ 迅速下降, 在 P^* 的切点向右移动。

初步看, 结论似乎与第 5 章的较简单模型的结论相互矛盾。我们可以回忆, 在那个模型中, δ 的上升降低了在该点企业应当投资的项目临界价值 V^* 。然而, 在这个模型中, 当 δ 更大时, P^* 更高, 相应的项目价值

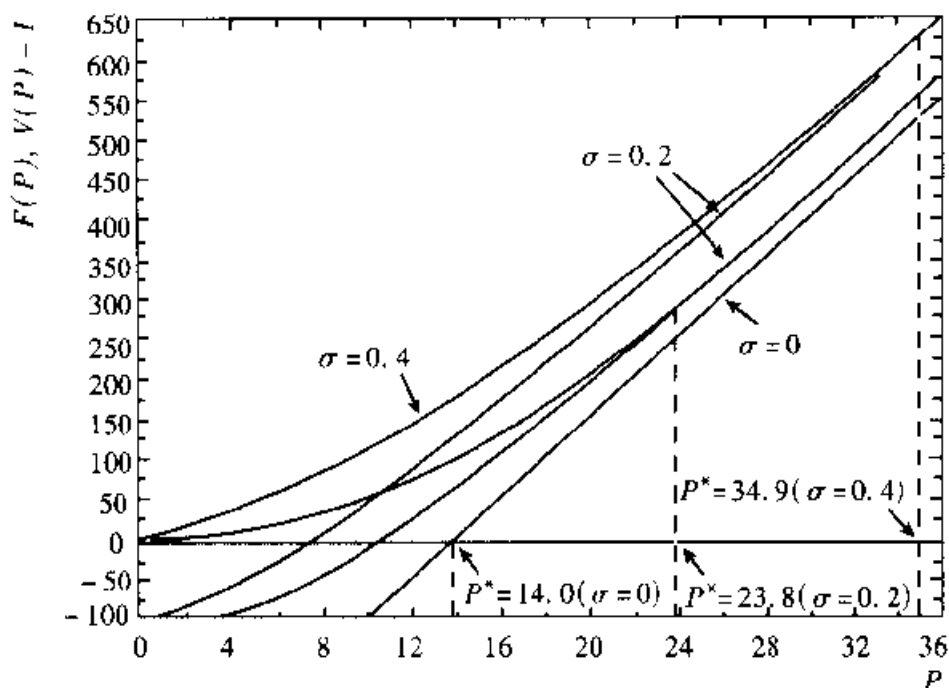


图 6—4 投资机会的价值 $F(P)$ 与 $V(P) - I$, $\sigma = 0, 0.2$ 和 0.4

194

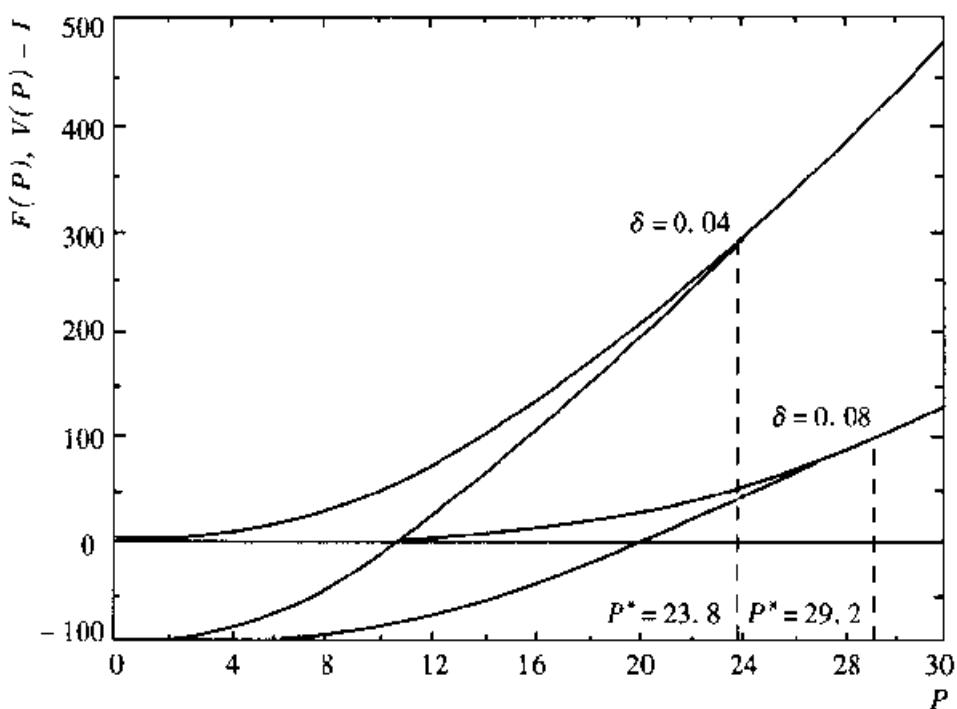


图 6—5 投资机会的价值 $F(P)$ 与 $V(P) - I$, $\delta = 0.04$ 和 0.08

$V(P^*)$ 却更低。这在图 6—6 中可以看出, 它显示了 $\delta = 0.04$ 及 0.08 时 P^* 作为 σ 的函数的图像, 而图 6—7 显示了 $V(P^*)$ 。如果假定 $\sigma = 0.2$ 且

δ 从 0.04 提高到 0.08, 则 P^* 将从 23.8 提高到 29.2, 但是, 即使在更高的 P^* , V 却更低。这样 $V^* = V(P^*)$ 也会随 δ 的提高而下降, 正如最简单的模型一样。

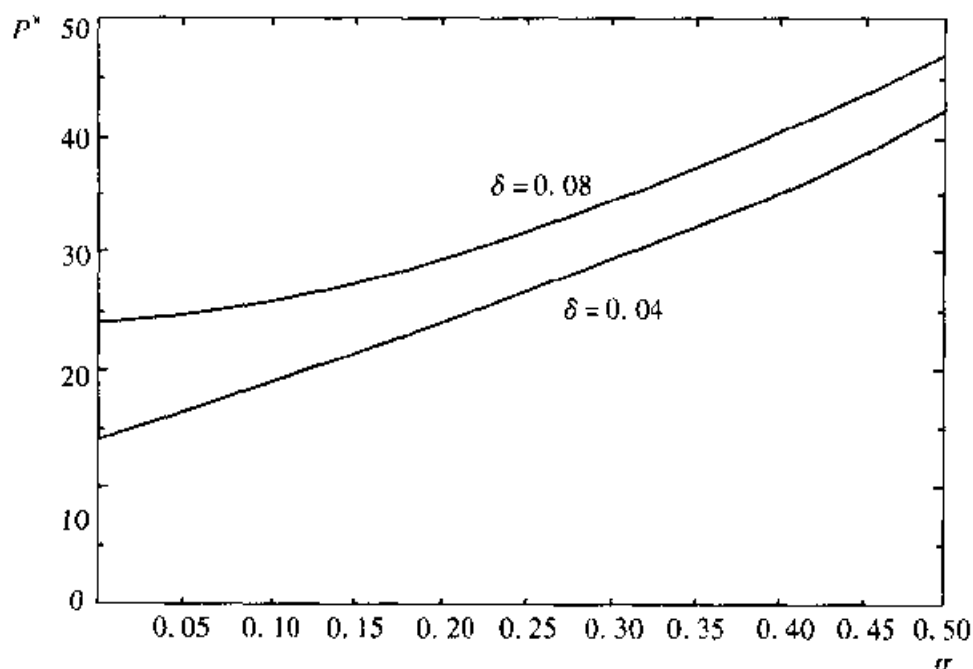


图 6—6 P 作为 σ 的函数在 $\delta = 0.04$ 和 0.08 时的临界值 P^*

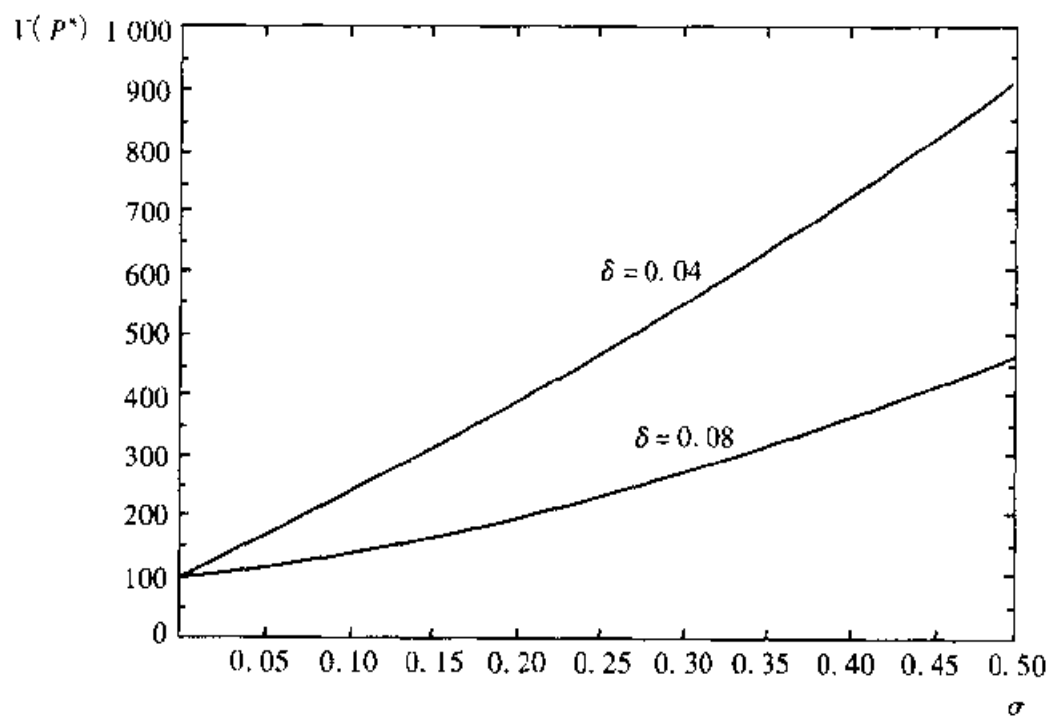


图 6—7 V 作为 σ 的函数在 $\delta = 0.04$ 和 0.08 时的临界值 $V(P^*)$

6.3 可变产出的项目

本章的基本模型可以在几种路径上扩展和推广。一种是考虑更一般的价格过程，例如，我们在第5章已经讨论过的均值回归过程，或者更一般的伊藤过程。这导致的惟一差别在于项目价值的微分方程与期权价值的微分方程之间的差别，系数变成 P 的更复杂的函数。在这样的情形下，必须依赖于数值解。由于从这种计算中不能得到新的一般性经济知识，我们在这里不说明这种模型。

扩展的不同方向值得引起一定的注意。假定单一的离散项目，一旦其启动，则允许在任意时刻，通过改变一些投入，如劳动力或原材料来改变项目的执行，其经营具有一定的灵活性，在全部时间内不需要任何不可逆的协议。这样在任意时刻这些最优数量取决于那一刻的产出价格，项目将有一向上倾斜的供给曲线。最终的利润流也将取决于产出价格。看得更远一点，企业的投资决策将受到影响。我们现在更详细地考察这一点。

在每一时刻，我们对经营中的一些变量有一定的选择，如劳动力或一些瞬时投入，把它记做向量 v 。这些总投入根据生产函数 $h(v)$ 生产出产品，并且有可变成本 $C(v)$ ， v 的最优选择可以使经营利润最大化。我们可以在瞬时利润函数的退化形式中获得结论：

$$\pi(P) \equiv \max_v [Ph(v) - C(v)] \quad (6-18)$$

在第6.2节我们研究过一个基本模型，其中在任一时刻，企业都有简单的二元选择：或者经营或者不经营。现在我们可以把它当做一种特殊情形的更一般形式。假定变量 v 恰好可以取两个值 0 或 1，前者对应于推迟；后者对应于经营。定义

$$h(v) = 1, C(v) = C, v = 1$$

$$h(v) = 0, C(v) = 0, v = 0$$

那么，我们得到在第6.2节所讨论的模型，其中 $\pi(P) = \max[P - C, 0]$ 。

另一个非常熟悉的例子是柯布-道格拉斯生产函数。假定 v 为变量，且有

$$h(v) = v^\theta, 0 < \theta < 1$$

通过设定投入价格为常数 c ，我们集中讨论产出价格的不确定性。（在本章的最后部分，我们将分析联合了价格及成本不确定性的一个例子。）那

么瞬时利润最大化给出了投入的需求函数为

$$v = \left(\frac{\theta P}{c} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

产出的瞬时供给函数为：

$$h(v) = \left(\frac{\theta P}{c} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$$

将其推广到几种可变投入的情形也很容易，并产生几乎相同的结果。

当可变投入被最优选择时，利润流为

$$\pi(P) = (1-\theta) \left(\frac{\theta}{c} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} P^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (6-19)$$

为简化记号，将上式写作 $\pi(P) = KP^\gamma$ ，其中 $\gamma = \frac{1}{1-\theta} > 1$ 。

对已最大化的利润 $\pi(P)$ ，表达式中 P 的幂大于 1；这样 $\pi(P)$ 为 P 的凸函数。这是标准的“二元”性质，参见迪克西特 (Dixit, 1990) 或瓦里安 (Varian, 1991) 的论述。对此的直觉是，在经营中没有任何瞬时变化时，产出为一常数，而收益与利润随 P 线性变化。在有可能出现瞬时变化的情况下，当 P 上升时的最优选择一定是使利润增加得更快，而当 P 下降时的最优选择必定是使利润下降更慢。这使得 $\pi(P)$ 为凸函数。考虑到不确定性对投资的影响，这会有重要的结果。

现在让我们寻找项目的价值，即全部经营期权序列的价值。当然，在这里每一时刻的期权都是被执行过的，但是当 P 变化时对 v 有不同的选择。如果我们考虑在每一时刻的某一固定的生产成本流，则将有一个更低的 P （熟悉的马歇尔最小平均成本）的边界，低于此边界，经营就会被推迟。

我们继续假定价格服从式 (6-1) 的几何布朗运动，则熟悉的步骤产生了项目价值的微分方程：

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta) P V'(P) - r V(P) + KP^\gamma = 0 \quad (6-20)$$

这一方程式的齐次部分与以前一样，但是非齐次项有差异。我们试验一种形式为 $K_1 P^\gamma$ 的一个特殊解，将其代入并对 K 求解，我们找到了解：

$$\frac{KP^\gamma}{r - (r - \delta) \gamma - \frac{1}{2} \sigma^2 \gamma (\gamma - 1)}$$

这看起来非常复杂，但它却有自然的经济学解释：它正好是利用适当的

风险调整利率计算出来的利润流为 KP^γ 的预期现值。这可以看做是第 4.3.1 中等价风险中性评价公式的另一种应用。它表明，我们可以利用无风险的贴现率，假如我们改变 P 的随机过程，并让它具有不同的增长率 ($r - \delta$)。那么对任何未来时刻 t ，利用 P_t 的对数正态分布结论，我们有

$$E'[K(P_t)^\gamma] = KP^\gamma \exp\left[\left(\gamma(r - \delta) + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1)\right)t\right]$$

式中， P 为初始价格； E' 为相对这一新过程所计算出的预期。上式乘以 e^{-rt} 并积分，我们得到前面方程的现值。

198 为更直接地考察结论，我们利用伊藤引理来描述预期增长率 P^γ ，这里定义为 α' ，即

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{E[dP^\gamma]}{P^\gamma} = \frac{\gamma P^{\gamma-1} E[dP] + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)P^{\gamma-2}\sigma^2 P^2 dt}{P^\gamma} \\ &= \left[\gamma\alpha + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma^2\right]dt \end{aligned}$$

在前面的第 6.1.3 中，我们计算了适用于 P 的任意幂的经风险调整的贴现率，利用那个公式，与 P^γ 成比例的利润率 μ' 为

$$\mu' = r + \gamma(\mu - r)$$

则 P^γ 的回报不足或便利收益必然是

$$\delta' = \mu' - \alpha' = r - (r - \delta)\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) \quad (6-21)$$

这样，我们的特殊解正好是 $\frac{KP^\gamma}{\delta'}$ ，这是利用经风险调整的适当的贴现率算出的利润流的预期现值。

我们再次排除泡沫解，并设定项目的价值等于基本价值：

$$V(P) = \frac{KP^\gamma}{\delta'} \quad (6-22)$$

对于所有这些都，为保证其经济意义，需要有 $\delta' > 0$ 。这也可以从另一个角度来考察，可以把关于 δ' 的表达式看做是在 γ 点所求出的基本二次式的负值。因此，通过要求 $\delta' > 0$ ，我们要求 $Q(\gamma) < 0$ ，则 γ 必然位于二次式的两个根之间，特别地， $\gamma < \beta_1$ 。结果，这与柯布-道格拉斯生产函数中把可容许的幂限定为 $\theta < \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}$ 是一样的。

期权价值的解采取了我們熟悉的形式：

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1}$$

最后,由价值匹配及平滑粘贴的一般条件:

$$F(P^*) = V(P^*) - I$$

$$F'(P^*) = V'(P^*)$$

可以求解方程并刻画出引起投资的临界价格 P^* 的特征:

$$\frac{K(P^*)^\gamma}{\delta'} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \gamma} I \quad (6-23)$$

上式左边为利润的预期现值;它必须超出投资成本的“期权价值乘数” 199

$\frac{\beta_1}{\beta_1 - \gamma}$ 。在我们已经构建的条件下, $\beta_1 > \gamma > 0$, 因此, 该乘数再次超过了 1。

现在我们考察不确定性对投资的影响。在前面的工作中, 我们把 δ 看做独立于 σ 的参数, 现在暂时还继续这样做。我们已经知道了 σ 上升的一种影响: 它降低了 β_1 从而提高了乘数 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - \gamma}$, 这对 P^* 的提高有贡献。更大的波动性提高了投资期权的价值, 因此, 在提出投资时要求有更高的当前临界盈利能力。当 σ 提高时, 保持 δ 固定, 我们从式 (6-21) 中发现 δ' 下降了。那么式 (6-23) 表明这加强了导致更低的 P^* 的影响, 因此, 它引起了更多的投资。

这种新观点来自于价格中利润的凸性。当我们预测更远的未来时, 价格分布的方差提高了。利用詹森不等式, 凸函数的期望值增加。伊藤引理使这一点更精确: 在利润流的预期增长率中有一额外的项 $\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)$ 。因为更大的 σ 意味着利润流更大的预期现值, 所以对投资有更多的激励。我们将在第 11 章再次遇到投资的“詹森不等式效应”。

6.4 折旧

我们一直假定, 一旦进行投资, 它将永远持续。在现实中, 物理性腐化或技术性退化限制了项目的寿命。换句话说, 年限、使用或竞争性技术的进步等会使资本折旧。在原则上把这一点考虑进来并修正我们的分析并不是一件难事, 尽管这样做确实一定程度上把算术问题复杂化了。在本节中, 我们将说明, 如何在经济学理论中经常用到的相对简单的衰退模式上作出这种修正。

折旧也与投资的“实物期权”方法有概念上的联系。人们可以预期, 一

200

个折旧项目的投资机会的价值要低一些，因此，对折旧的考虑将降低前面所强调过的问题的重要性。我们的分析将证明，要小心地解释这种直觉。采取行动的期权价值取决于行动的不可逆程度，这不仅取决于一个项目的预期寿命，而且也取决于第一个项目结束之后这种机会是否依然存在。

6.4.1 指数衰减

为了分析上的方便，我们先从最经常用于经济理论的折旧模式开始。这里项目期限是随机的，并服从泊松过程。在任何时刻 T ，如果项目已经存在了很长时间，那么在下一个短时间段 dT 内项目死亡的概率为 λdT 。现在，从初始观点来看，项目在时间 T 之前死亡的概率，或随机期限 T 的累积性概率密度函数为 $1 - e^{-\lambda T}$ ， T 的相应概率密度函数为 $\lambda e^{-\lambda T}$ 。

假定在其寿命周期内，项目将在没有可变成本的条件下生产出 1 单位的产出流。初始价格为 P ，其随后的路径 P_t 服从增长率为 α 的几何布朗运动，适用于 P 的经风险调整的贴现率为 μ 。

如果项目确实持续到了 T ，其利润流的预期现值为

$$E \int_0^T e^{-\mu t} P_t dt = \int_0^T P e^{\alpha t} e^{-\mu t} dt = \frac{P[1 - e^{-(\mu - \alpha)T}]}{\mu - \alpha} = \frac{P(1 - e^{-\delta T})}{\delta}$$

正如以前所述，我们已经简化了 $\mu - \alpha = \delta$ ， δ 为复制了 P 的风险的一项交易资产的回报不足或便利收益。现在我们可以利用寿命周期的概率密度为泊松过程来获得项目的预期值：

$$V(P) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda T} P \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} dT = \frac{\lambda P}{\delta} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \delta} \right) = \frac{P}{\lambda + \delta}$$

正式地，我们可以把项目看做是无限寿命的，但是通过加入泊松死亡参数来讨论未来利润的贴现率，因此，贴现率从 μ 增加至 $\mu + \lambda$ 。这与我们在第 3 章及第 4 章对泊松过程的一般分析相符合。

201

这一公式有不同的解释。(1) 项目可能会有无限寿命，但是随着其年限的增加，其功能可能越来越差，在启动之后的某时刻 t 生产出的产出流为 $e^{-\lambda t}$ ，这将产生与前面计算出的预期值相同的贴现现值。(2) 随着时间延长，设备可能需要不断增长的维护开支流。我们可以把 $P e^{-\lambda t}$ 看做项目在时刻 t 所产生的利润流的表示形式或退化形式的表达式。

接下来，我们评估此类项目的投资期权的价值。我们必须区分两种可能性：期权可能赋予企业对该项目只投资一次的权利，在项目结束后，企业不

可有更多的权利；或者企业可能永远持有投资的权利，在一个项目死亡后，它又获得了再次投资的原始机会。我们从第一种情形开始。

令 $F(P)$ 表示期权的价值。正如前述，我们构建了由一个单位的期权及生成 P 的风险的 $F'(P)$ 单位的资产空头所组成的一个投资组合。注意到，这种交易的资产对项目或企业是外生的，它不会随着项目的消亡而消亡。因此，其便利收益为 $\delta = \mu - \alpha$ 。进行与以前一样的计算，产生期权价值的函数形式：

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1}$$

式中， A_1 为待定常数； β_1 为熟悉的二次方程式 (6-4) 的负根。

通过求解价值匹配和平滑粘贴条件，可以同时确定投资的临界值 P^* 及常数 A_1 ：

$$F(P) = V(P) - I$$

$$F'(P) = V'(P)$$

式中， I 为投资的沉没成本。简单的计算给出：

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} (\delta + \lambda) I \quad (6-24)$$

这几乎跟我们前面的关于无限期限的项目的投资临界值的公式 (6-9) 是一样的，惟一的差别在于右边的 δ 被 $\delta + \lambda$ 替代。通过考虑风险中性及价格的零趋势可以理解这一点。那么， $\delta = r$ ，且 rI 正好是无限期限投资的成本的年金化或等价流量。在临界点，利润流应该是这一成本流的一个倍数，以反映出进行投资时所牺牲的期权的价值。当引入折旧时，与成本相等的流量通过泊松死亡参数递增，因为投资的沉没成本必须在更短的预期期限内得到补偿。然而，相同的期权价值乘数适用于这一新的成本流： β_1 的方程不受折 202
旧的影响，因此，折旧将降低期权价值的重要性的直觉在这种背景下是不成立的。

由于投资机会只有一次，即使项目只有有限的期限，投资期权的执行也是不可逆的。如果我们采用另外一种观点，其中物理寿命是无限的，但是产出流指数递减，则折旧与行动的不可逆没有关系。

如果投资期权永远存在则情况就不同了，因此，企业在第一个项目期满后重新获得了开始另一相同项目的权利。当然，在第一个项目死亡的那一时刻，随机演化的价格可能会太低以至于不能调整投资，但是企业再次获得了期权，当价格重新上升到临界值时，企业就可以开始第二个项目。我们现在

转到这种情形。

在这个分析中，我们必须考虑到 P 的各种非线性函数的收益与价值，以及适用每种情况下的经风险调整的贴现率是不同的。我们采用有外生指定的贴现率 ρ 的动态规划观点。然而，假定项目死亡的泊松风险完全能够被分散，我们也可以利用或有债权方法展开类似的分析；这一点在第 4 章泊松过程的背景下得到了讨论。

令 P^* 表示投资的临界值，令 $F(P)$ 表示投资期权的价值。在不执行的条件下，即 $0 < P < P^*$ 的范围内，这个期权只有一种预期资本收益：

$$E[dF(P)] = [\alpha PF'(P) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 F''(P)] dt$$

令它等于正常回报 $\rho F(P) dt$ ，我们得到关于 $F(P)$ 的熟悉的微分方程，及一个同样熟悉的解：

$$F(P) = A_1 P^{\beta_1}$$

式中， A_1 为待定常数； β_1 为下述二次式的负根：

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta - 1) + \alpha \beta - \rho = 0 \quad (6-25)$$

与往常一样，我们已经考虑了 $P \rightarrow 0$ 时的极限，从而排除了含有负根的项。

令 $J(P)$ 表示一个已实施项目的价值及所有未来重置期权的价值。首先考虑 $P < P^*$ 的范围。在下一很短的时间区间 dt ，利润流为 $P dt$ ，则当前项目死亡且企业重新持有价值为 $F(P)$ 的期权的概率为 λdt 。这样

$$J(P) = P dt + (1 - \lambda dt) e^{-\rho dt} E[J(P + dP)] \\ + \lambda dt e^{-\rho dt} E[F(P + dP)]$$

利用伊藤引理展开右边并简化，我们有

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 J''(P) + \alpha P J'(P) - (\rho + \lambda) J(P) + P + \lambda A_1 P^{\beta_1} = 0$$

上式的解如下：

$$J(P) = B_1 P^{\beta'_1} + \frac{P}{\rho + \lambda - \alpha} + A_1 P^{\beta_1}$$

式中， B_1 为需要确定的常数； β'_1 为下面的二次式的负根：

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta - 1) + \alpha \beta - (\rho + \lambda) = 0 \quad (6-26)$$

在范围 $P > P^*$ ，类似的分析仍然适用，但如果当前项目死亡，新项目将立即开始。因此

$$J(P) = Pdt + (1 - \lambda dt)e^{-\rho dt}E[J(P + dP)] \\ + \lambda dt e^{-\rho dt}E[J(P + dP) - I]$$

这可以变成

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 J''(P) + \alpha P J'(P) - \rho J(P) + P - \lambda I = 0$$

其解为

$$J(P) = B_2 I^{\beta_2} + \frac{P}{\rho - \alpha} - \frac{\lambda I}{\rho}$$

式中, B_2 为需要确定的常数; β_2 为二次式 (6-25) 的负根。

$J(P)$ 的两个分支在其有效范围的公共点 P^* 必须相切。而且由于 P^* 为投资的临界值, $F(P)$ 必须满足 $J(P) - I$ 在 P^* 的价值匹配和平滑粘贴条件。这样我们有四个方程用于确定常数 C_1 , B_1 , B_2 和临界值 P^* 。这就完成了求解过程。

似乎非常复杂的过程产生了非常简单答案。由于函数 $J(P)$ 在 P^* 左边和右边的两个分支在 P^* 点相切, 可以利用任意一个分支的价值匹配和平滑粘贴条件在 P^* 将 $F(P)$ 和 $J(P) - I$ 联系起来。左边的分支给出了更简单的解法。价值匹配条件为

$$A_1 P^{\beta_1} = B_1 P^{\beta_1} + \frac{P}{\rho + \lambda - \alpha} + A_1 P^{\beta_1} - I$$

或者

$$B_1 P^{\beta_1} + \frac{P}{\rho + \lambda - \alpha} = I$$

平滑粘贴条件为

$$\beta_1 B_1 P^{\beta_1 - 1} + \frac{1}{\rho + \lambda - \alpha} = 0$$

求解这两个方程, 并令 $\rho - \alpha = \delta$, 我们发现

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} (\delta + \lambda) I \quad (6-27)$$

将式 (6-27) 与期权仅赋予企业投资于该项目一次的权利的情形下的公式 (6-24) 进行比较。两式的等价成本流部分是相同的, 但是期权价值乘数却不同。来自于式 (6-26) 的根 β_1 与来自式 (6-25) 的根 β_1 不同, 后者有一个加到贴现率 ρ 上的折旧参数 λ 。因此, $\beta_1' > \beta_1$ 且 $\frac{\beta_1'}{\beta_1' - 1} < \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$, 在这种情形下, 折旧确实降低了期权价值乘数。如果投资期权永远可用, 当项

目折旧加速时，在任何情形下，投资期权的执行都是不可逆性较低的一种行动。

表 6—1 说明了这种影响的数值意义。正如在本章前面计算的情形一样，我们采用 $\rho = r = 0.04$ 及 $\alpha = 0$ 。然后显示了不同的 σ 和 λ 值条件下的期权价值乘数 $\frac{\beta' 1}{\beta' 1 - 1}$ 。折旧对期权价值乘数有明显的影响，但是乘数依然明显大于 1，特别是当 σ 不是太低时。

表 6—1 折旧条件下的期权价值乘数

λ	σ			
	0.1	0.2	0.3	0.4
0.00	1.421 5	2.000 0	2.763 1	3.732 1
0.01	1.370 6	1.863 2	2.500 0	3.296 6
0.05	1.265 1	1.595 4	2.000 0	2.486 8
0.10	1.207 7	1.456 1	1.750 0	2.093 8
0.15	1.175 9	1.381 3	1.619 3	1.892 7

205

6.4.2 突然死亡

下面转到指数衰减或泊松衰减，这是经济分析中最流行的折旧模式，其中项目保持完全健康的时间为一固定的有限寿命，接着是突然的瞬间死亡。^[9]

令 T 表示固定的有限寿命。项目在 T 内连续地生产出单位产出，因而连续地生产出利润流 $\{P_t\}$ ，然后在这一点项目突然停止了运行。令初始价格为 P 。在实施时，项目的瞬时价值为其寿命周期内预期利润的贴现值：

$$V(P) = E \int_0^T e^{-\mu t} P_t dt = \frac{P[1 - e^{-(\mu-\alpha)T}]}{\mu - \alpha} = \frac{P(1 - e^{-\delta T})}{\delta}$$

这里我们利用了风险调整的贴现率 μ ，并认识到价格的期望值及由此引起的利润流以 α 比率呈指数增长。

在式 (6-5) 中我们发现，对某一无限寿命项目来讲，其价值 $V(P) = \frac{P}{\delta}$ 。上面的公式现在被看成一种非常自然的一般化；由 $T \rightarrow \infty$ 时所得极限可得无限寿命的情形。

遵循与前面部分相同的步骤，并区分一次性或永久性期权的情形，现在

可以发现投资期权的价值。我们把这一点留做练习。

6.4.3 一般情形

我们可以把前面的折旧的普通形式包括在一个非常一般化的分析中。假定项目产出的利润流为 $\pi(P, t)$ 。泊松衰减情形下 π 呈指数下降,而在“单马拉的四轮车”情形下, π 先是在一段时间内保持为常数,然后会降到零。更一般地, π 可能会随着时间推移而逐渐下降,这或者是因为资本承受着逐步的物理衰减;或者是因为具有建造时的技术水平的项目必须与更晚的或更新的项目进行竞争。在后一种情形下,当 $\pi(P, t)$ 下降为零时,项目在内生性日期将推迟经营,这种现象有时被称为“经济性退化”。这在确定及单调的技术进步框架中被模型化,这一框架是由索洛、托宾、范·韦扎克和亚里(Solow, Tobin, Von Weizsacker and Yaari, 1967)及布里斯(Bliss, 1968)的文中详细说明的。我们建议,将它在不不确定情形下的推广作为有兴趣的读者的一项研究练习。

这种项目的价值可以解释为现值的积分,但是 π 的一般形式难以求值。我们描述了另一种方法,它对项目在其寿命周期内任意时刻的价值的一般形式的推导上具有额外的优势,而不是仅仅在构建的初始期日。

令 $V(P, t)$ 表示作为当前价格 P 和当前时间 t 的函数的项目价值。我们考虑通常的投资组合是,在一个短的时间段 dt 内持有项目及与 P 完全相关的 n 单位指定资产的空头。在这一时间内,投资组合所获得的股息为 $\pi(P, t)dt - n\delta Pdt$,这里与往常一样, $\delta = \mu - \alpha$ 为资产 P 的“回报不足”或者便利收益,关于股息的表达式中的第二项代表空头的持有者的支付必须与相应的多头持有者相匹配。这样,投资组合的资本收益由下式给出:

$$dV(P, t) - n dP = [V_P(P, t) - n]dP + \left[\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP}(P, t) + V_t(P, t) \right] dt$$

这里我们利用下标表示偏导。由于 V 现在有两个独立变量,通过选择 $n = V_P(P, t)$,我们可以使投资组合无风险。然后,我们可以令投资组合的预期总回报等于无风险回报:

$$\begin{aligned} & \pi(P, t) - \delta P V_P(P, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP}(P, t) + V_t(P, t) \\ & = r [V(P, t) - P V_P(P, t)] \end{aligned}$$

或者

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP}(P, t) + (r - \delta)PV_P(P, t) + V_t(P, t) - rV(P, t) + \pi(P, t) = 0$$

207 这是一个可以利用数值方法求出来的偏微分方程。如果存在一个已知的最大可能寿命周期 T ，在对所有的 P 都有 $V(P, T) = 0$ 的条件下，可以采用后溯法从 $T = 0$ 开始，求出方程的解。我们将在第 10 章从另一种背景下说明这样的解。

这里我们指出进入视野的新项 $V_t(P, t)$ 的经济意义。项目的价值现在由于两个原因可能变化：由于随机价格的不同初始值和由于利润流的未来状况发生改变而导致的纯时间阶段。后者的影响正好就是经济学家对折旧的解释。这样， $V_t(P, t)$ 给我们提供了有关经济折旧的数值测度。这一概念由萨缪尔森 (Samuelson, 1964) 在确定及完全预见的背景下得到了很好的说明，这里，我们自然地将其扩展到适应于不确定和理性预期的情形。

6.5 价格与成本不确定

在此之前，我们只考虑一个随机变量，即产出价格（或需求移动变量），而保持其他所有与投资决策有关的参数为已知常数。我们这样做是为了在相对简单的环境下说明分析方法。在两个或更多的随机变量影响企业决策的更一般情形下，同样的方法也适用。例如，如果投资成本 I 与产出价格 P 两者都不确定，那么我们不得不将项目的价值与投资期权的价值解释为这两个变量，即 $V(P, I)$ 和 $F(P, I)$ 的函数，则我们必须找到投资发生的 (P, I) 值的所有区域、投资不发生的 (P, I) 值的所有区域以及将这两个区域分隔开来的边界或临界曲线。毫无疑问，这在数学上更加困难。在两个独立变量的条件下，价值方程满足偏微分方程，它们的解可能需要有一定复杂性的数值方法。^[10] 然而，一些具有特殊特征的例子（特别是一些齐次形式）可以通过将问题简化为一个状态变量而得到解决。我们现在说明这一点。

考虑一个只有 1 单位规模的项目，其投资成本 I 和收入流 P 都是不确定的。甚至可以认为，由于一些共同的宏观经济的冲击，这两个变量之间的不确定是相关的。这样，我们假定 P 和 I 服从几何布朗运动：

$$\frac{dP}{P} = \alpha_P dt + \sigma_P dz_P$$

$$\frac{dI}{I} = a_I dt + \sigma_I dz_I$$

其中

$$E[dz_P^2] = dt$$

$$E[dz_I^2] = dt$$

$$E[dz_P dz_I] = \rho dt$$

一旦作出投资，投资成本中的更进一步的不确定是无关的。当当前价格为 P 时，一个有活力的项目的价值仅仅为 $V(P) = \frac{P}{\mu_P - \alpha_P} = \frac{P}{\delta_P}$ ，其中 $\mu_P = r + \phi \rho_{pm} \sigma_P$ 为适用于 P 的经风险调整的贴现率， $\delta_P = \mu_P - \alpha_P$ 为 P 的便利收益或回报不足。

然而，投资期权的价值取决于 P 和 I 。直观地，我们预期，当 P 低或 I 高时，期权将被持有；当 P 对于给定的 I 变得足够高，或 I 对于给定的 P 变得足够低时，期权将被执行。图 6—8 显示了对应于等待和投资的 (I, P) 空间中所表明区域，以及将两者分隔开来的边界。我们的目的是使这种直觉更精确，并发展出找到边界从而决定最优投资法则的一种分析方法。

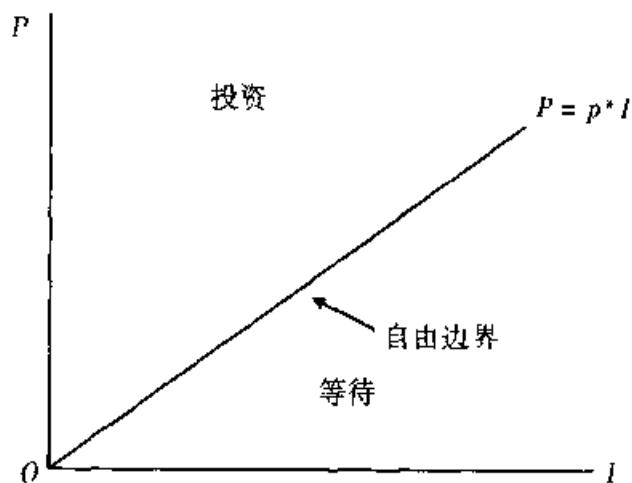


图 6—8 价格与成本都不确定下的投资

现在，对这些步骤应当非常熟悉。令 $F(P, I)$ 为期权的价值。我们发现了关于它的一个微分方程。我们假定，产出价格和投资成本两者都由已有资产来生成，而且分别在资产价格为 P 和 I 的条件下进行。^[11]为简化起见，我们将这些资产称为“产出”和“资本”。考虑一个由 1 单位期权、 m 单位产出的空头以及 n 单位的资本空头所组成的一个投资组合。由伊藤引理，我们有

$$d(F - mP - nI) = (F_P - m)dP + (F_I - n)dI + \frac{1}{2}(F_{PP}\sigma_P^2 P^2 + 2F_{PI}\rho\sigma_P\sigma_I PI + F_{II}\sigma_I^2 I^2)dt$$

注意右边的 dP 和 dI 为随机的。然而，我们可以选择 $m = F_P$ 和 $n = F_I$ 消去这些项，并使投资组合为无风险的。那么，在时间间隔 $(t, t + dt)$ 内的投资组合的持有者将有确定的资本收益：

$$\frac{1}{2}(F_{PP}\sigma_P^2 P^2 + 2F_{PI}\rho\sigma_P\sigma_I PI + F_{II}\sigma_I^2 I^2)dt$$

为持有空头，必须作出支出对应于产出和资本的便利收益的支付 $(m\delta_P P + n\delta_I I)dt$ 。令这两个成分的和等于无风险的回报 $r(F - mP - nI)dt$ ，整理后得到基本方程：

$$\frac{1}{2}(\sigma_P^2 P^2 F_{PP} + 2\rho\sigma_P\sigma_I PI F_{PI} + \sigma_I^2 I^2 F_{II}) + (r - \delta_P)PF_P + (r - \delta_I)IF_I - rF = 0 \quad (6-28)$$

由于有两个独立变量 (P, I) ，那么这是一个偏微分方程。它适用于空间 (P, I) 中最好持有期权而不执行的区域。在最优为立即执行的区域，我们有

$$F(P, I) = V(P) - I = \frac{P}{\delta_P} - I$$

在两个区域的边界，这是一个价值匹配条件，这两个函数必须在边界相切，这样就产生了两个平滑粘贴条件：

$$F_P(P, I) = V'(P) = \frac{1}{\delta_P}$$

$$F_I(P, I) = -1$$

微分方程与这些边界条件一起，将会固定边界条件本身的位置，而且生成在等待区域内的函数 F 的解。

边界本身是未知的这样一个事实使得求解这种类型的问题变得非常困难。事实上，偏微分方程的理论对此类“自由边界”问题一般没有什么说明。解析解几乎是不存在的，而数值解大多数都是特别的，每一个都是剪裁得适合特殊的情形。这在原则上与仅有价格是不确定时的问题没有什么差别；投资临界值 P^* 自身是未知的，而且变成了将投资发生的 P 的一维范围的价值与投资不发生时的范围分开的自由边界点。在一维空间找到方程的解要容易得多，无论是分析解还是数值解。幸运的是，在当前的情形下，问题的自然齐次式允许我们把它简化为一维空间的问题。

如果 P 和 I 的当前值都加倍, 它仅仅使项目价值及投资成本加倍。因此, 最优决策将仅仅取决于 $p = \frac{P}{I}$, 从而图 6—8 中的边界将是通过区域的一条射线。相应地, 期权价值在 (P, I) 内将为次数为 1 的齐次式, 这使得我们可以写成下式:

$$F(P, I) = If\left(\frac{P}{I}\right) = If(p)$$

式中, f 为待定函数。

连续微分给出:

$$F_P(P, I) = f'(p)$$

$$F_I(P, I) = f(p) - pf'(p)$$

及

$$F_{PP}(P, I) = \frac{f''(P)}{I}$$

$$F_{PI}(P, I) = -\frac{pf''(p)}{I}$$

$$F_{II}(P, I) = \frac{p^2 f''(p)}{I}$$

将上面的式子代入偏微分方程式 (6-28) 并整理, 我们发现:

$$\frac{1}{2}(\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_I + \sigma_I^2)p^2 f''(p) + (\delta_I - \delta_P)pf'(p) - \delta_I f(p) = 0$$

(6-29)

这是关于标量自变量 p 的未知函数 $f(p)$ 的普通微分方程。此外, 它与我们已熟悉的仅有价格为不确定情形下的式 (6-6) 有相同的形式, 其边界条件也是相似的。价值匹配条件变为

$$f(p) = \frac{p}{\delta_P} - 1$$

两个平滑粘贴条件变为

$$f'(p) = \frac{1}{\delta_P}$$

$$f(p) - pf'(p) = -1$$

这三个条件中, 任何一个都可以由另外两个导出。我们可以选择价值匹配条件及第一个平滑粘贴条件作为两个实际上与纯粹价格不确定的情形下的两个条件相似的条件, 并且像以前那样完成解。基本二次式为

$$Q - \frac{1}{2}(\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_I + \sigma_I^2)\beta(\beta - 1) + (\delta_I - \delta_P)\beta - \delta_I = 0$$

211 令 β_1 表示这一方程中较大的根；如果 δ_I 与 δ_P 都为正（我们假定的），则 $\beta_1 > 1$ 。那么，我们发现：

$$\frac{P^*}{I^*} = P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta_P \quad (6-30)$$

这条射线通过原点并将空间 (P, I) 中的等待区域与投资区域分开。其斜率有标准的期权价值乘数的含义。^[12] 这样，如果 σ_P 或者 σ_I 增加， β_1 将减少，乘数 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 将增加。然而，如果 ρ 增加，乘数将下降；保持它们的方差固定， P 与 I 变化之间较大的协方差隐含着它们比例上的较小的不确定性，从而是对等待的一种递减的激励。

6.6 文献导引

本章提供了关于投资的更完备的模型，并且扩展了这种重要的观点：企业的价值主要是一组期权的价值。在第 5 章我们看到，企业持有有价值的投资期权，其中的一些将被执行，而另一些则不会被执行，因此企业的价值将等于其现存项目的价值（即替代资本）加上对未来新项目投资的期权价值。在本章我们看到，一个适当项目也可以被看做是一组与运营成本相关的期权，生产并获得利润的期权的定价应足够高，而且可以据此来被估价。这一观点出现在马库斯和莫德斯特（Marcus and Modest, 1984）对农产品生产决策的背景下，但首先由麦克唐纳和西格尔（McDonald and Siegel, 1985）详细地阐述。他们证明，如果价格服从几何布朗运动，运营成本固定的单位产出项目可以作为欧式看涨期权的一个无限集合来定价。本章所采用的方法更一般、更容易处理——我们简单地把项目作为单个或有债权来定价，因此，用第 5 章推导投资期权的价值 $F(P)$ 的相同方法推导出关于 $V(P)$ 的偏微分方程。然后，利用 $V(P)$ 在边界条件的解来发现 $F(P)$ 的解及最优投资规则。这种方法是由平迪克（Pindyck, 1988b）在递增性投资的背景下发展出来的。

212 我们已经发现，项目评价与投资机会评价的一个重要出发点是产出价格 $P(t)$ 的潜在的随机过程。我们假定，如果价格服从几何布朗运动，其预期增长率小于经风险调整的预期回报 μ 。对一种可储存的商品，这一差别将不

得不反映出存货持有者所产生的便利收益。这一点是由麦克唐纳和西格尔 (McDonald and Siegel, 1984) 所提出来的, 便利收益自身的随机结构由吉布森和施瓦茨 (Gibson and Schwartz, 1990) 和布伦南 (Brennan, 1991) 进行了考察。

本章引入了大量的自由边界问题, 其中有一些可以通过分析方式来解决, 有一些则需要数值解法。对寻求这些问题及其解的更多数学背景的读者来讲, 我们向其推荐冈瑟和李 (Guenther and Lee, 1988) 及法桑奥和普赖米塞里奥 (Fasano and Primicerio, 1983) 的论述。

伯特拉 (Bertola, 1988, Chap.1) 有一个在产出价格、资本品价格及可变投入价格上同时存在不确定条件下的非常一般化的模型。

这些方法中的大多数依赖于状态变量的离散化, 我们已经采纳了第4章和第10章关于多变量问题的数值解的相同方法。数值方法的一些近期工作是基于一种可替代的, 称之为有限元的方法。这里, 独立变量空间的全部区域被分为小的单元, 我们试图获得的函数是通过每一单元的低阶多项式来近似地获得的, 不同的近似形式在单元的边缘粘贴在一起。这种方法看起来在许多经济学的应用中是先进的, 有兴趣的读者可参考约翰逊 (Johnson, 1990) 和朱迪 (Judd, 1992) 的著作。

【本章注释】

[1] 这些收益可以包括平滑生产能力的提高、避免库存及推动生产和销售的时序安排。首先, 便利收益是企业持有存货的原因, 即使当那些存货的预期资本收益低于风险调整的利率, 甚至为负。正如人们所期望的, 对大多数商品来讲, 边际便利收益与存储总量呈相反方向变化。关于便利收益的经验研究及其在商品价格信息中的作用, 参见平迪克 (Pindyck, 1993c, d) 的论述。

[2] 例如, 参见吉布森和施瓦茨 (Gibson and Schwartz, 1990, 1991) 的论述, 他们说明了当石油价格服从几何布朗运动, 且便利收益率也服从随机过程时, 石油生产项目如何能被定价。此外, 布伦南 (Brennan, 1991) 估计并检验了便利收益的其他函数及随机过程以及它对价格与时间的依赖。

[3] 投资组合的组成成分在很短的时间区间 ($t, t + dt$) 内保持为常数, 这样 n 仍然等于 $V'(P(t))$, 即使 $V'(P)$ 本身会随着 P 的变化而在这一时间区间内变化。在较小的时间区间内, “动态套利策略”将在连续的短

时间区间内调整投资组合。这样，在 $(t + dt, t + 2dt)$ ，我们将 n 设定为 $V'(P(t + dt))$ ，依此类推，就像一串价格指数。在连续时间的极限情形下，当 $dt \rightarrow 0$ 时，这种策略的严格的表达式需要非常小心；参见哈里森和克雷普斯 (Harrison and Kreps, 1979) 及达菲 (Duffie, 1988, pp.138 - 147) 的论述。

[4] 还可参见第 4.3.1 中以“等价风险中性估价”为基础的方法。

[5] 当 β 为基本齐次式的一个根时，利用第 4.3.1 中的等价风险中性评价方法，也能证明 P^{β} 的经风险调整的贴现率等于 P^{β} 预期增长率的事实。

[6] 如果我们不考虑价格的不确定性及趋势，我们获得 $\delta = r$ ，流动等价成本正好变成投资数量的利息成本或机会成本 rI 。

[7] 只有在到期日，欧式期权才可以执行，而美式期权可以在到期日前的任意时刻执行。

[8] 注意到这些讨论正如我们以前所做的一样，排除了投机性泡沫。

[9] 在经济理论中，这种突然死亡的折旧有时候被称为“单马拉的四轮车” (one-hoss shay)。这一术语来自奥利弗·温德尔·霍尔姆斯 (Oliver Wendell Holmes) 先生的诗歌《副主祭的杰作；或奇妙的单马拉的四轮车》：

你是否听说过奇妙的单马拉的四轮车

它是用如此合理的方法建造起来的

因此它一百年来如一日地奔跑着

然后，突然之间，它……立刻化为碎片

我们引用这段话是想表明经济学家并非完全缺乏文学修养。

[10] 为精确起见，我们必须解椭圆偏微分方程的自由边界问题。

[11] 另外，动态规划方法产生类似的微分方程。

[12] 无风险利率从二次方程中消失，从而在解中也消失了，这似乎令人感到疑惑。实际上， r 仍然保持在解中，只不过是隐藏在 μ_P ， δ_P ， δ_I 中而已。

第7章 进入、退出、储存 与废弃



在上一章，我们说明了人们如何可以先评价一个项目，然后再评价项目中的投资期权并决定最优投资规则。我们的出发点是项目产出价格变化的随机过程，从而经营利润的未来流量是不确定的。有时项目的利润流会变成负数，假定在这种情形下企业将暂停经营，将来利润流变为正数时再恢复经营，并且不需要支付储存或重新开始的任何一次性成本。

对许多项目而言，这种无成本的暂停和重新开始的假定是不现实的。在一些情形下，暂停并在将来重新开始一个项目的经营几乎是不可能的。一个例子是参与新药研究与开发的一间试验室。暂停试验室的运营可能意味着失去从事研究的科学家团队，因此也就失去了未来恢复产品开

发的能力。在其他情形下存在暂停并在将来重新开始项目的可能，但却是以高昂的成本为条件的。例如，如果一个地下矿井的经营被暂停，为防止矿井被水淹没以便将来可以重新开采，必然会引起沉没成本及不断提高的固定成本，确实要重新开采必然还会产生额外的沉没成本。

214 本章从一个新模型开始，该模型与上一章所讨论的模型完全相反。我们假定，如果经营曾经被暂停，企业在重新启动该项目时必须重新承担全部投资成本。（这就好像一旦资本不再被使用，资本将“锈蚀”并消失一样。）现在一家活跃的企业必须考虑彻底放弃，而不是暂停。当然，在企业的经营利润流变为负数时它不会进行这一步。由于重新开始代价高昂，保持经营有一定的期权价值，而只有在经营损失的临界水平充分高时，放弃才是最优的。我们假定，无论企业面对的市场势力如何，它必须开始；而且如果它放弃经营也不会损失其投资的权利。（在第8章，我们将考虑完全竞争行业的另一种极端情形，其中大量潜在企业中的任何一个都可以投资，任何活跃的企业可以在不保持任何重新进入的特权的条件下放弃。）

在大多数情形下，现实情况位于无成本的临时性暂停与瞬时全部锈蚀这两个极端之间。沉没于大多数项目中的资本在不使用时会锈蚀，但却是非常缓慢的。机械设备或轮船逐渐生锈；矿山经常会遭受塌方或被洪水淹没；其他无形的东西，诸如消费者忠诚度和商标品牌的认同感的减弱等。^[1]那么，重新开始是代价高昂的，但没有一个新项目那么高。在一些情形下，重新开始的成本随着暂停的持续时间而提高。为了把这一点模型化，我们必须考虑重新开始的期权（与从头开始的期权完全不同），并从最后一次暂停起引入实耗时间作为影响这个新期权价值的隐含状态变量。作为结果的偏微分方程可以通过数值方法求出，但我们在这里不处理这种情形。

在本章，我们将考虑另一种瞬时可能性。闲置资本的“不断锈蚀”可以通过“维护”得以避免——原意是指在机械设备、轮船或矿山等，这里引申到无形资产，如消费者忠诚度。不是放弃，企业可以选择维持资产而不是积极地生产产品来保持其项目存在。例如，轮船被“封存”（mothballing）或“储存”（lay-up），这产生了不断上升的维护成本，但是节约了未来重新投资的成本。在这些选择之间的权衡取决于两种成本的相对数量，以及适宜的经营条件迅速恢复的可能性。

在数学上，除了状态变量（如价格）是随机变化并影响经营的盈利性之外，放弃的可能性引入了一个二阶离散状态变量：若不运营项目，其值为

零；若运营项目，其值为1。企业的战略由一组在这两种状态之间转换的 215
决定所组成。在每种离散状态下，企业拥有另一种状态的看涨期权。一家
空闲企业可以执行投资期权，这给它带来经营利润流加上一个放弃期权
的价值流。我们必须在潜在的随机变量（价格）背景下找到同时执行这些
期权的最优执行点。同样地，当我们考虑“封存”或“储存”的第三种选
择时，将存在三种离散状态，要在这三种需要计算的状态之间进行最优转
换。

7.1 进入与退出的混合战略

我们把讨论限定在需求不确定的情形。假定有一个几何布朗运动的价格
过程，感兴趣的读者可以沿袭第5.5节的思路推广到其他过程，沿袭第6.5
节的思路推广其他变量为不确定的情形。我们尽可能地保持第6章中的体系
和记号。在价格为给定时，投资与放弃决策是由企业作出的，我们可以再次
假定价格服从几何布朗运动：

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (7-1)$$

如果企业投资（即进入市场），它得到每期生产出1单位产出的一个项目，
并永远延续，除非企业放弃它。经营中的可变成本 C 为已知常数。无风险
利率为外生的，固定为 r 。我们假定价格的随机波动可由经济中的其他资产
来复制（正如我们已看到的，尽管实际情形并非如此，利用动态规划也能得
到一个解），适用于企业收益的一个经风险调整的贴现率为

$$\mu = r + \phi \rho_{PM} \sigma \quad (7-2)$$

式中， ϕ 为风险的市场价格； ρ_{PM} 为价格 P 与整个市场组合间的相关系数。
与以往一样，我们令 $\delta = \mu - \alpha$ 表示对价格来讲回报率亏空，而且我们假
定 $\delta > 0$ 。

投资于该项目，企业必须承受的一次性成本为 I ；放弃该项目，企业必
须承担的一次性成本为 E 。后一种成本可能包括法律上要求的解雇工人的
支付，或者将矿山的场地恢复到其自然条件的成本。一种可能的情形是，投
资成本 I 中的一部分是不会沉没的，因此， E 为负数，这反映着在企业退
出时可以得到补偿的那一部分投资成本。当然，我们需要 $I + E > 0$ ，以排 216
除在投资与放弃之间快速循环的“货币机器”。

在第6章，我们由寻找活动项目的价值 V 开始，然后继续寻找投资期权的价值 F ，现在这一序列成为一个完整的周期。活动项目实际上是一种混合资产，其中一部分是放弃期权。如果该期权被执行，企业重新回到不活动的状态。换句话说，企业获得了其他的资产，即投资期权。当这种期权依次被执行时，它使企业重新回到活动的项目。这样，一个活动企业的价值与一个空闲企业的价值之间是有内在联系的，而且必须被同时确定。

直觉表明，当需求条件变得充分有利时，一家空闲企业将投资；而当需求条件变得充分不利时，一家活动企业将放弃。实际上，我们将看到，投资与放弃的最优策略，或对这两个期权的持有或执行，表现为两个临界价格，即 P_H 和 P_L ($P_H > P_L$)。一家空闲企业发现维持空闲是最优的，只要 P 依然低于 P_H ；只要 P 达到临界价格 P_H ，它就会投资。一家活动企业将保持活动，只要 P 保持为大于 P_L ；但是如果 P 下降到低于 P_L ，它将放弃。在临界价格 P_L 与 P_H 之间，最优政策是维持现状，不论企业是活动地经营还是等待。我们现在要检验这种直觉。当然，我们必须找到这些外生临界值。

7.1.1 两个期权的评价

现在企业的价值是外生状态变量 P 以及表明企业目前是空闲的 (0) 还是活动的 (1) 的离散状态变量的函数。为弄清这一点，我们稍微改变一下记号，令 $V_0(P)$ 表示投资期权的价值（即空闲企业的价值），令 $V_1(P)$ 表示活动企业的价值。注意， $V_1(P)$ 是两个成分的和，即来自经营的收益权及当价格大幅下降时的放弃期权。

在价格范围 $(0, P_H)$ 内，一家空闲企业将持有其投资期权。与第6章一样，套利观点告诉我们， $V_0(P)$ 在这一时间区间内满足微分方程。边界条件在 P_H 点将 $V_0(P)$ 的值和导数与 $V_1(P)$ 的值和导数联系起来。类似地，在价格范围 (P_L, ∞) 内，活动企业保持活动，持有其放弃期权。 $V_1(P)$ 满足相应的微分方程，边界条件在点 P_L 将 $V_1(P)$ 的值和导数与 $V_0(P)$ 的值和导数联系起来。这个方程与边界条件系统包含了完成方程的解的充足信息。

我们由空闲企业开始。为得到关于 $V_0(P)$ 的微分方程，构建一个由 1 单位投资期权和 $V'_0(P)$ 单位的产出空头组成的投资组合。这些步骤与第5章和第6章中的步骤完全相同，因此，我们忽略其推导过程并把它作为练习

留给读者。作为结论的方程为

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''_0(P) + (r - \delta)PV'_0(P) - rV_0(P) = 0 \quad (7-3)$$

它有一般解

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$$

式中, A_1 与 A_2 为待定常数; β_1 与 β_2 为类似于第5章和第6章的二次方程的根

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} > 1$$

及

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} < 0$$

由于投资期权远离其实值, 因此, 当 $P \rightarrow 0$ 时, 它变得几乎没有价值, 对应于负根 β_2 的系数 A_2 必须为零。这样

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1} \quad (7-4)$$

注意, 在价格区间 $(0, P_H)$ 内, 它是有效的。

下面考虑活动企业的价值。计算是类似的, 除了资产组合中活动项目部分支付 $(P - C)dt$ 的净现金流量。那么, 我们得到

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''_1(P) + (r - \delta)PV'_1(P) - rV_1(P) + P - C = 0 \quad (7-5)$$

该方程的一般解为

$$V_1(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$$

与第6章一样, 我们把最后两项解释为无论有任何损失企业都被迫维持其经营时活动项目的价值, 把前两项解释为放弃期权的价值。当 $P \rightarrow \infty$ 时, 在不远的将来放弃的可能性变得非常小; 因此, 当 P 变得非常大时, 放弃期权的价值应当趋于零。因此, 对应于正根 β_1 的系数 B_1 将为零。这样

$$V_1(P) = B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \quad (7-6)$$

在区间 (P_L, ∞) 内, 这对 P 是合理的。

在投资临界值 P_H 处, 为执行其投资期权企业将支付一次性成本 I , 为获得价值为 $V_1(P_H)$ 的活动项目而放弃价值为 $V_0(P_H)$ 的资产。因此, 我们得到价值匹配及平滑粘贴条件:

$$V_0(P_H) = V_1(P_H) - I, V'_0(P_H) = V'_1(P_H) \quad (7-7)$$

同样地，在放弃临界值 P_L 处，价值匹配与平滑粘贴条件为

$$V_1(P_L) = V_0(P_L) - E, V'_1(P_L) = V'_0(P_L) \quad (7-8)$$

利用关于 $V_0(P)$ 和 $V_1(P)$ 的式 (7-4) 和式 (7-6)，这些条件可以写成

$$-A_1 P_H^{\beta_1} + B_2 P_H^{\beta_2} + \frac{P_H}{\delta} - \frac{C}{r} = I \quad (7-9)$$

$$-\beta_1 A_1 P_H^{\beta_1-1} + \beta_2 B_2 P_H^{\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (7-10)$$

$$-A_1 P_L^{\beta_1} + B_2 P_L^{\beta_2} + \frac{P_L}{\delta} - \frac{C}{r} = -E \quad (7-11)$$

$$-\beta_1 A_1 P_L^{\beta_1-1} + \beta_2 B_2 P_L^{\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (7-12)$$

这四个方程确定了四个未知数——临界价格 P_H ， P_L 以及期权价值中的系数 A_1 和 B_2 。

在这些临界点，这些方程绝对不是线性的，因此，准确形式的解析解是不可能得到的，然而可以证明解的存在性和惟一性，而且这个解具有经济学直觉上的基本特征。临界值满足 $0 < P_L < P_H < \infty$ ，因此，期权价值项中的系数 A_1 和 B_2 为正。^[2] 其他一些重要的一般经济知识可以由分析方法得到，但是更进一步的结论需要数值解。下面我们依次进行。

7.1.2 与短视决策的比较

典型的中级微观经济学教材中所说明的投资与放弃的理论是以马歇尔长期平均成本和短期可变成本的概念为基础的。对我们的单位规模企业而言，长期平均成本为经营成本与投资的沉没成本 $(C + rI)$ 的利息之和。教科书中的理论告诉一家企业，如果价格超过这一点就应该投资。类似地，如果价格下降到低于可变成本 C ，活动企业应当放弃。当存在明确的一次性放弃成本 E 时，企业也应当考虑这一成本的利息，因此，临界值变为 $(C - rE)$ 。

换句话说，传统的马歇尔概念是将投资的回报率 $\frac{P-C}{I}$ 和不投资的回报率 $\frac{C-P}{E}$ 与名义回报率 r 进行比较。隐含在这一观念背后的是静态预期或短视的假定——即当前价格被假定为永远如此。在分析价格变化是突然发生的，而且企业确切地知道这种突然变化永远不会再发生的情形下，这种观点

是恰当的。然而，这样的价格变化非常少见。在现实世界的大多数情形下，企业所面临的需求（及成本）条件在全部时间内都是变化的，而且企业在作出投资和不投资决策时，必须考虑到未来是不确定的，并且经常是这样的。因此，一种更自然的理论方法是假定企业对不确定环境变化的概率规律有理性预期。我们前面的模型正是这样做的——在给定了价格的随机过程式(7-1)后，企业的投资决策是最优的。

现在我们有这样一个问题，即给定企业是理性预期的而非静态预期的，这会产生什么差别。最优投资临界值 P_H 如何与马歇尔的临界值 $(C + rI)$ 进行比较？最优放弃临界值 P_L 如何与马歇尔临界值 $(C - rE)$ 进行比较？为回答这些问题，我们从定义下述函数开始。

$$G(P) \equiv V_1(P) - V_0(P) = -A_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \quad (7-13)$$

这个函数可以对所有的 P 正式地加以定义。然而，注意到 $V_1(P)$ 仅仅在区间 (P_L, ∞) 内定义了活动企业的价值，而 $V_0(P)$ 仅仅在区间 $(0, P_L)$ 上定义了空闲企业的价值。因此，在区间 (P_L, P_H) 内，我们可以把 $G(P)$ 解释为企业变为活动状态时所说增加的价值，即企业在活动状态下的价值比不活动状态下的价值高多少。

对 P 的一个很小的值， $G(P)$ 中的主项是 P 的幂为 $\beta_2 < 0$ 的那一项，它是递减的并且为凸。对 P 的一个很大的值， $G(P)$ 中的主项是 P 的幂为 $\beta_1 > 0$ 的那一项；这一项为负值、递减并且为凹。对中间值而言，第三项对 $G(P)$ 的增加部分有贡献。这样， $G(P)$ 的一般形式如图 7—1 所示。

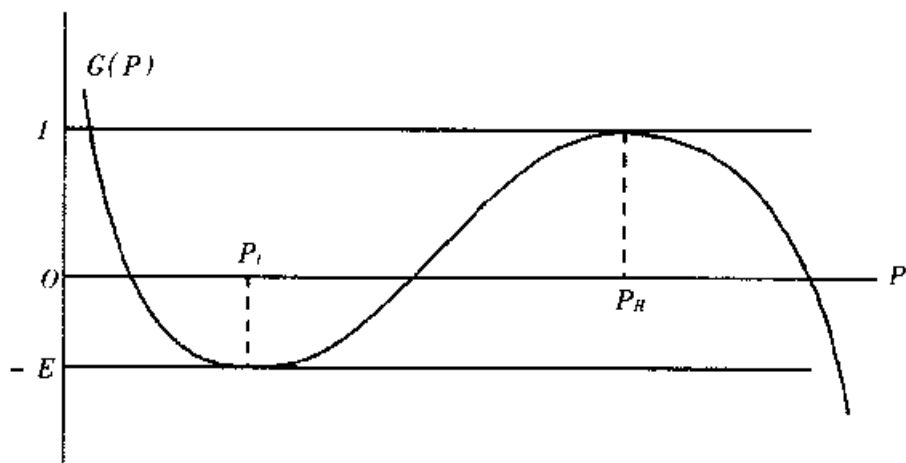


图 7—1 临界值 P_L 和 P_H 的确定

适用于这些临界点的边界条件可用 $G(P)$ 的形式写出来。价值匹配条件式 (7-9) 和式 (7-11) 变成

$$G(P_H) = I, G(P_L) = -E$$

而平滑粘贴条件式 (7-10) 和式 (7-12) 可以写作

$$G'(P_H) = 0, G'(P_L) = 0$$

参见图 7-1, 这些条件意味着 $G(P)$ 的图像在 P_L 和 P_H 范围内应当为 S 形, 而且在最高点与高度为 I 的水平线相切, 在最低点与高度为 $-E$ 的水平线相切。^[3] 注意到 $G(P)$ 在点 P_H 为凹而在点 P_L 为凸。

221 现在考虑较高的临界值。将关于 $V_0(P)$ 的微分方程式 (7-3) 及关于 $V_1(P)$ 的微分方程式 (7-5) 代入, 我们有

$$\frac{1}{2}\sigma^2 G''(P) + (r - \delta)G'(P) - rG(P) + P - C = 0$$

对 $P = P_H$ 进行评价, 并且利用在点 P_H 必须成立的边界条件, 我们发现

$$-rI + P_H - C - \frac{1}{2}\sigma^2 G''(P_H) > 0$$

或者 $P_H > C + rI$ 。类似地, 在另一种极端情形下, 我们有 $P_L < C - rE$ 。换句话说, 理性预期下的最优临界值比马歇尔静态预期下的最优临界值扩散得更远。当不活动的企业考虑未来政策的不确定性时, 它们更不愿意投资, 但如果它们已经是活动的时候, 它们也更不愿意放弃。这当然就是我们在第 5 章和第 6 章所讨论过的保持原状下的期权价值的分叉点。^[4] 在以数值模拟考察过其数量意义之后, 我们将在下面讨论其含义。

7.1.3 静态比较

尽管界定临界值的方程是高度非线性的, 而且确实没有确切形式的解, 但对应于外生参数较小变化的全微分跟以往一样是线性的, 这使得至少对一些参数来讲得到定性的静态比较结论相对更简单。另外, 一些利率参数, 如 r , $\delta = \mu - \alpha$ 和 σ , 进入了根为 β_1 和 β_2 的二次方程, 因此, 这些参数的变化对函数 G 有复杂的影响。这使得静态比较的解析表达式非常难以解释, 而且我们必须回到数值模拟。另外一些参数, 如 I , E 和 C , 有比较简单的影响, 而且有助于阐述一般方法。我们详细地考虑投资成本 I , 其他两个也类似。

利用函数 G 开展工作仍然是有用的, 它有助于说明 G 对期权价值系数

的依赖, 因此我们记作 $G(P, A_1, B_2)$ 。价值匹配与平滑粘贴条件为

$$G(P_H, A_1, B_2) = I, \quad G(P_L, A_1, B_2) = -E \quad (7-14)$$

$$G_P(P_H, A_1, B_2) = 0, \quad G_P(P_L, A_1, B_2) = 0 \quad (7-15)$$

现在假定 I 以 dI 变化, 考虑这四个内生性变量 A_1, B_2, P_L 和 P_H 做何反应。从价值匹配条件式 (7-14) 的全微分开始, 用跟以往一样的符号来表示 G 的偏微分, 为简化起见, 记 $G_A(P_H, A_1, B_2) = G_A(H)$ 等。我们有

$$G_A(H)dA_1 + G_B(H)dB_2 = dI$$

$$G_A(L)dA_1 + G_B(L)dB_2 = 0$$

注意到, 由于平滑粘贴条件式 (7-15), $G_P(H)dP_H$ 与 $G_P(L)dP_L$ 项消失了。因此, 关于四个内生性变化的 dA_1, dB_2, dP_L 和 dP_H 的一般静态比较系统实际上分成了更简单的系统。首先, 我们对期权价值系数中的变化 dA_1, dB_2 来求上述两个方程的解。其次, 我们可以对平滑粘贴条件进行全微分, 以掌握临界价格 dP_H, dP_L 的变化。

注意, $G_A(H) = -P_H^{\beta_1}$ 等, 其解为

$$dA_1 = -P_L^{\beta_2} \frac{dI}{\Delta}, \quad dB_2 = -P_L^{\beta_1} \frac{dI}{\Delta}$$

式中

$$\Delta = P_H^{\beta_1} P_L^{\beta_2} - P_H^{\beta_2} P_L^{\beta_1}$$

由于 $P_H > P_L$ 且 $\beta_1 > 0 > \beta_2$, 因此它为正。

在点 P_H 对式 (7-15) 进行微分, 并写作

$$G_{PP}(H)dP_H + G_{PA}(H)dA_1 + G_{PB}(H)dB_2 = 0$$

它导出

$$G_{PP}(H)dP_H = -(\beta_1 P_H^{\beta_1-1} P_L^{\beta_2} - \beta_2 P_H^{\beta_2-1} P_L^{\beta_1}) \frac{dI}{\Delta}$$

由于 $G(P)$ 在 P_H 是凹的, $G_{PP}(H)$ 为负, 且当 $dI > 0$ 时, $dP_H > 0$ 。投资临界值随着投资成本的提高而提高。正如我们所预期的, 当 E 上升时, P_L 下降。

同样地, 较低的光滑粘贴条件给出:

$$G_{PP}(L)dP_L = -(\beta_1 - \beta_2) P_L^{\beta_1 - \beta_2 - 1} \frac{dI}{\Delta}$$

由于 $G_{PP}(L) > 0$, 当 $dI > 0$ 时, 我们有 $dP_L < 0$: 当投资成本升高时, 放弃的临界值下降。这种成本与临界值之间重要的相互作用也应当反映在直觉

223 中。由于期权价值，企业会不情愿地放弃正在进行的项目。通过保持该项目的存在，它避免了必须再次承受全部的投资成本，价格过程在未来也变得充分有利。因此，投资成本越高，这一期权的价值也越高，那么不愿意放弃的意愿也越强。镜像结论，即投资的临界价格 P_H 随着放弃成本 E 的提高而升高，可能更加清楚了。如果在未来储存该项目时可能会承受较大的成本，企业更不愿意开发项目。

如果我们评价当 I 和 E 两者都趋于零时这些静态比较变量的导数，我们会发现， P_H ， P_L 两者都趋向于 C ，但是 $dP_H \rightarrow \infty$ 且 $\frac{dP_L}{dI} \rightarrow -\infty$ ，对 E 也有类似的结论。这样，进入与退出的临界值开始非常快地分化，即使是对很小的进入与退出的成本也是如此。将式 (7-14) 与式 (7-15) 中的四个方程以泰勒级数展开，并且进行一些冗长乏味的代数计算，迪克西特 (Dixit, 1991) 发现：

$$\log\left(\frac{P_H}{P_L}\right) = k(I + E)^{\frac{1}{3}} \quad (7-16)$$

式中， k 为一常数。换句话说，三阶小量的（当 ϵ 很小时，与 ϵ^3 成比例）进入和退出成本导致了二阶小量（与 ϵ 成比例）的进入与退出临界值之间的差距。这样，非常小的沉没成本对企业的决策有着不成比例的巨大影响。

另外，很小的成本对临界值的影响是完全对称的：进入临界值所受退出成本的影响正好与进入成本对它的影响一样强烈。对更大的数量级，每种成本将更强烈地影响到其“自身”的临界值。理由在直观上是很清楚的。考虑一家正在打算进入的企业，进入成本必须立即支付，而退出成本只是通过企业在未来某一时刻必须支付它的前提下才影响到企业的进入决策的。由于贴现，瞬时影响是较强的一种。然而，如果成本非常小，这些临界值相互之间非常接近，几乎可以确定，布朗运动可以非常迅速地到达另一个临界值。因此，由贴现所引起的差别很小，并且在极限状态会消失。

我们把 C 上升时， P_H ， P_L 都上升的证明作为练习留给读者。正如人们所期望的，具有较高经营成本的项目是在企业更不情愿的条件下进行的，而且会更快地被放弃。

7.1.4 一个例子：铜矿业的进入与退出

我们已经看到，未来需求条件的不确定性提高了企业不行动的区域，

它使得最优投资与放弃的临界值比传统的两个马歇尔临界值分离得更远。在实践中，这种不行动区域变得有多大？像我们已经所做的那样来解释不可逆性和不确定性真的有必要吗？或者简单的马歇尔规则提供了一种对大多数投资与放弃决策的足够好的近似吗？为回答这些问题，考察一个特殊的例子是非常有用的。

我们考察对某一新的铜加工设施进行投资的决策——采矿、冶炼及提纯的混合——以及永久性放弃一个正在经营的加工厂的决策。历史上，铜的价格波动很大。（在过去的20年里，铜价的年变化在20%~50%之间。）此外，开发或关闭一座矿山或冶炼炉包含着非常高的沉没成本，因此，铜生产者需要非常小心谨慎地作出进入和退出决策，并且将不确定性考虑进来。

在现实中，拥有正在运营的铜矿的生产者拥有永久放弃或连续经营这两种选择权。铜矿必须被暂时地“封存”，等以后价格上升时再重新启动。封存或重新启动都包含着沉没成本（在矿井不活动时，需要进行建设以防止洪水淹没或塌方；为重新启动矿井也需要额外的开支），以及不断产生的固定成本（将水排出，防止未经授权的进入等）。然而，如果在不远的将来重新启动的可能性很高，封存可能仍然比放弃并且在以后从零开始建设一座新矿山要便宜得多。在下一节，我们将推广进入与退出的基本模型，把封存和重新启动的可能性包括进来。然而，现在我们将忽略这种额外的选择，而仅仅考虑投资与放弃。^[5]同样地，生产者也可以开放或关闭一座矿山，而非一家冶炼厂。为简化起见，我们将把冶炼铜的生产看做一个一体化的操作。

我们考虑一家每年生产1000万磅纯铜的加工厂。为保持分析的简单，我们忽略这样一个事实，即矿藏储备是有限的，最终将会耗尽；代之以假定该矿山可以永久运营。（这并不是一个非常极端的假定，因为大部分铜矿至少可以运营20年~30年。）这样一家采矿、冶炼与提纯企业的建造成本的合理数量为 $I=2000$ 万美元，而其放弃成本（主要是清洁及环境恢复）为 $E=200$ 万美元。（这些数据及其他数据都以1992年的不变美元计。）在美国，企业间生产的平均可变成本是变化的，而国家之间企业的平均可变成本变化更大。我们将可变成本设定为 $C=0.80$ 美元/磅，大约为1992年美国生产者的平均值，但是我们将改变这一成本，以确定其对进入和退出临界值的影响。（为了进行比较，1992年铜的平均价格为1.00美元/磅，但1985—1992年，它曾经下降到0.60美元/磅，也曾经上升到1.50美元/磅。）

对铜矿或提纯企业的实际的经风险调整的年回报率合理值为 $\mu =$

0.06, 便利收益 (或回报不足) 的平均比率为 $\delta = \mu - \alpha = 0.04$, 而实际的经风险调整的利率为 $r = 0.04$ 。最后, 我们将把 0.2 看做波动参数 σ 的基本值。我们也将考虑这个参数在 0.1 - 0.4 的范围内的值, 这与对不同时间阶段变化的估计相一致。^[6]

给定这些参数的值, 式 (7-9) ~ 式 (7-12) 可以对常数 A_1, B_2 以及进入和退出的临界值 P_H, P_L 求出数值解。图 7-2 显示了进入与退出临界值 P_H, P_L 作为波动性参数 σ 的函数。注意到 $\sigma = 0.2$ 时, 这两个临界值大约分别为 1.35 美元和 0.55 美元。为了进行比较, 如果未来价格中没有不确定性 ($\sigma = 0$), 临界值为 0.88 美元和 0.79 美元。^[7] 因此, 一个非常适中的不确定性的数量级引起了不活动区域的大幅上升——从 $0.88 - 0.79 = 0.09$ 美元增加到 $1.35 - 0.55 = 0.80$ 美元。注意, 这一区域随着 σ 的增加而增加; 如果 $\sigma = 0.4$, 这一区域的范围大约为 1.30 美元。

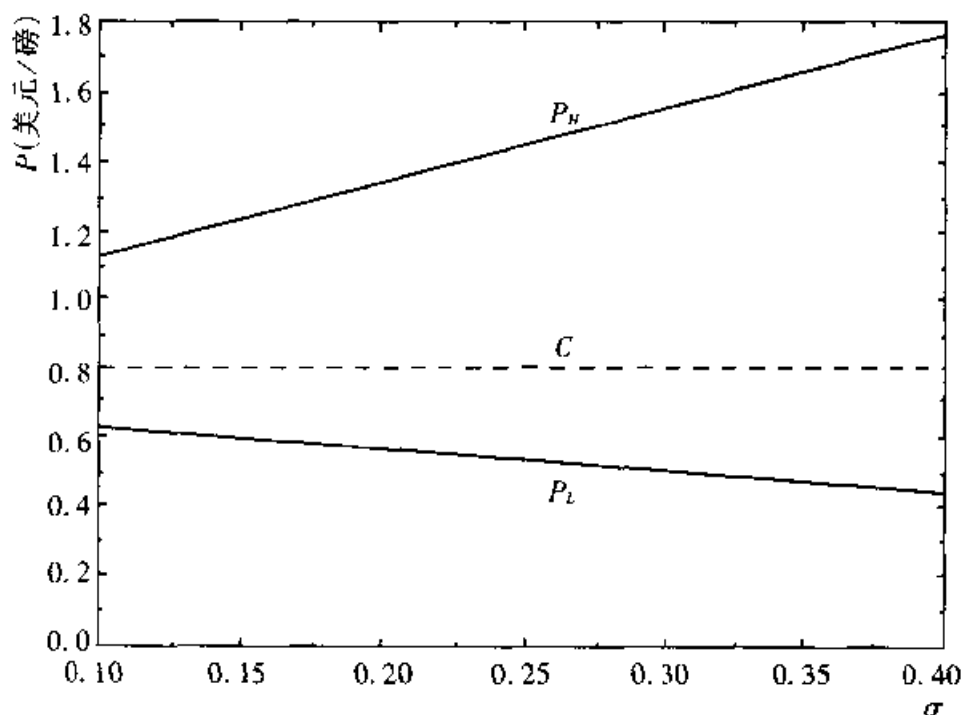


图 7-2 铜业: 作为 σ 的函数的进入与退出临界值

图 7-3 与图 7-4 显示了进入与退出临界值对营运成本 C , 以及退出沉没成本 E 的依赖。可以观察到, 当运营成本上升时, P_H 和 P_L 都将提高。较高的运营成本减少了来自项目的利润的预期流量, 从而降低了项目的价值, 因此, 在企业愿意投资之前较高的价格是必需的。此外, 在较高的临界价格上, 企业将放弃, 因为当 C 更高时, 它将失去更多的货币。

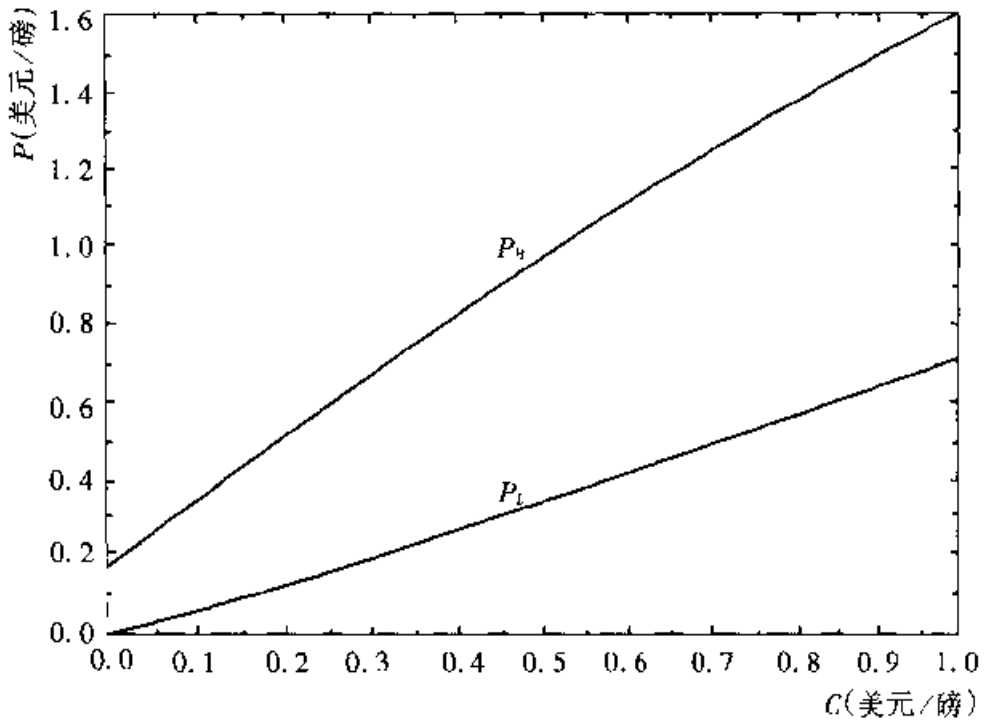


图7—3 作为经营成本 C 的函数的进入与退出临界值, $\sigma = 0.2$

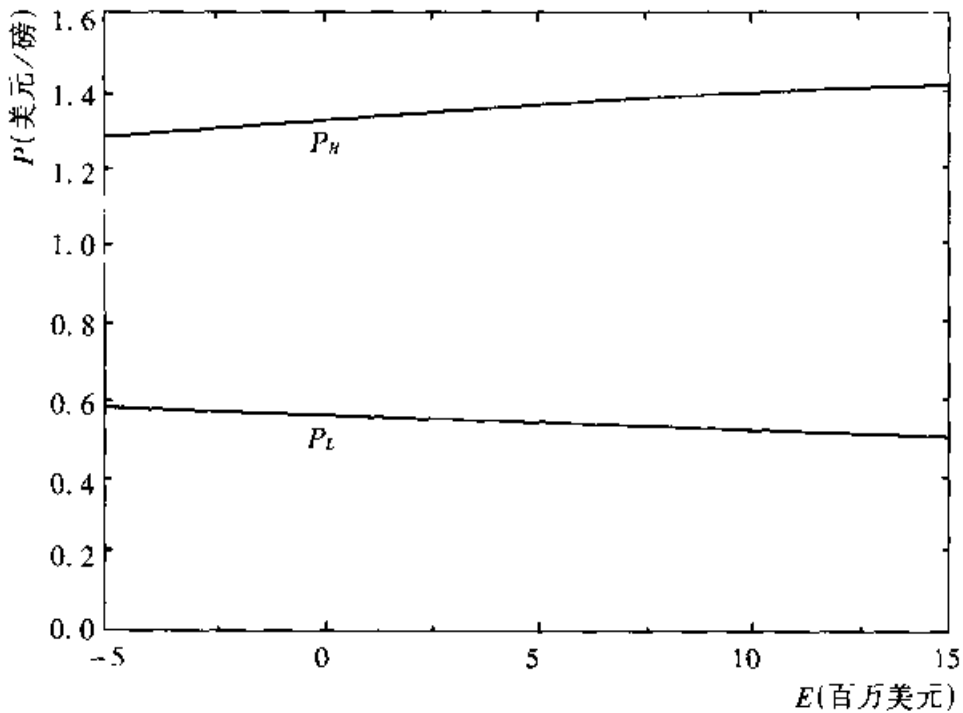
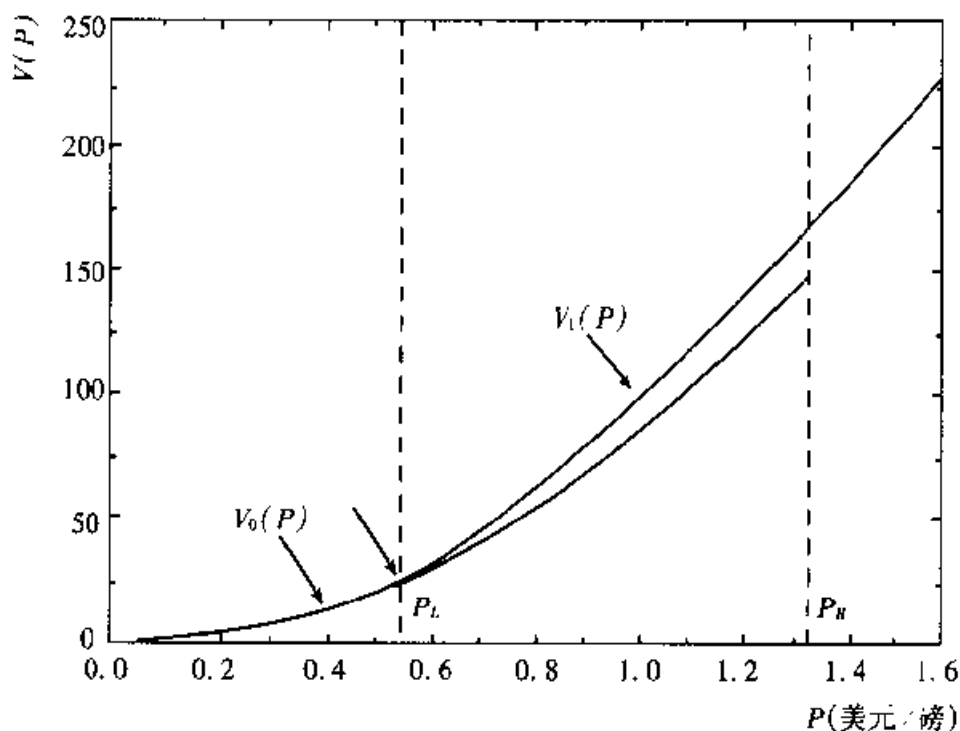


图7—4 作为放弃成本 E 的函数的进入与退出临界值, $\sigma = 0.2$

当放弃成本 E 增加时, 可以观察到进入临界值 P_u 也会提高。理由是, 对任何价格 P , 更高的 E 降低了放弃一个活动项目的期权价值, 从而降低。

了项目价值，这反过来意味着企业愿意在第一种情形下投资之前的价格必须更高。类似地， E 的增加降低了放弃临界值 P_L ；企业必须支付更多以执行其放弃期权，因此，在企业愿意放弃之前，价格必须下降得更多。然而，注意当 E 增加时， P_H 上升而 P_L 下降，但它们提高或下降得并不是太多，原因是放弃期权的价值主要是由 σ 及更高的进入成本 I 所决定的，而当 E 变化时却不会有很大的变化。

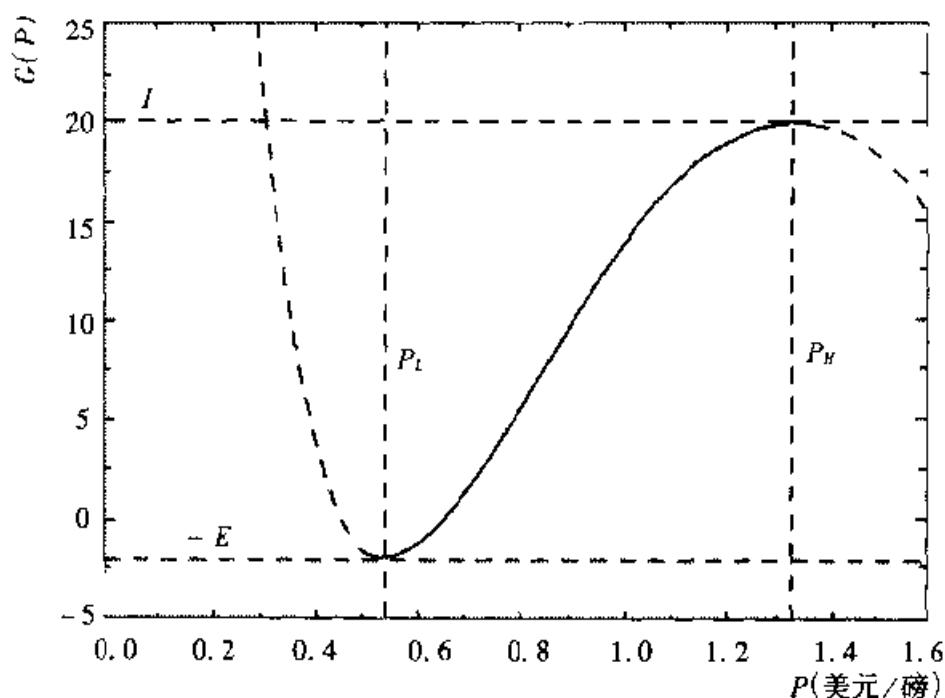
图 7—5 显示了空闲企业的价值 $V_0(P)$ 和活动企业的价值 $V_1(P)$ ，两者都是价格 P 的函数。（我们利用了基本情形下的参数值： $I = 2\,000$ 万美元， $E = 200$ 万美元， $C = 0.80$ 美元/磅， $r = \delta = 0.04$ 及 $\sigma = 0.2$ 。）图中还显示了临界值 P_H 和 P_L 。注意到，在 $P = P_L$ 时， $V_0(P)$ 通过放弃成本 $E = 2$ 超过了 $V_1(P)$ 。由于在这一价格水平上，执行放弃期权是最优的，即放弃 $E + V_1$ 而获得 V_0 。类似地，在 $P = P_H$ 时，投资是最优的，因此 $V_1 = V_0 + I$ 。



228

图 7—5 作为 P 的函数的 $V_0(P)$ 和 $V_1(P)$

最后，图 7—6 显示了函数 $G(P) = V_1(P) - V_0(P)$ 。注意，在 P_L 与 P_H 之间的不行动区域内，这条曲线呈 S 形，并且在 $P = P_H$ 时，与水平线相切于 I ；在 $P = P_L$ 时，与水平线相切于 $-E$ 。

图 7—6 $G(P) = V_1(P) - V_0(P)$

这个例子有助于我们理解在过去20年间美国及其他地方的铜生产者的行为。在价格非常低的阶段（例如，在20世纪80年代中期，当铜的价格下降到自大萧条以来最低的水平时），企业经常继续经营那些在价格很高时开张的现在却没有盈利的矿山及冶炼厂。在价格很高的另一段时间内，企业在投资于新的矿山或重新开放在价格非常低的时候所关闭的现在似乎有盈利的矿山方面失败了。生产者对不确定性的反应对价格水平自身有一种反馈效应。在20世纪80年代，当需求非常微弱时企业对关闭矿山的不情愿态度使得铜的价格比其他情形下下降得更多。

我们这里假定，铜的价格决定过程对企业来讲是外生的。在第8章，我们将说明，竞争性生产的商品价格如何能在产业行为的均衡模型中内生地被决定。在那里，我们将回到关于铜产业的进入与退出的例子，但是竞争性均衡的背景是价格为内生的。

7.2 储存、重新启动与废弃

正如前面所提到的，当铜的价格下降时，除了永久性放弃一个正在运营

的矿山外，铜生产者还有其他的选择。实际上，矿山可以被置于一种临时搁置的状态，并允许它在将来以大大低于从零开始新建一座矿山的成本的沉没成本重新启动。“封存”的工厂或“储存”的轮船就是这种暂时性搁置的例子。

与永久性放弃一样，封存也需要沉没成本，我们把它记做 E_M 。此外，一旦工厂被封存，维护该资本品需要一定的成本流 M 运营，以在将来以进一步的沉没成本 R 来重新启动。只有当维护费用 M 小于实际的运营成本 C ，以及重新启动的成本 R 小于新投资的成本 I 时，封存才是合理的。我们假定，这些条件实际上都满足。我们的目的是决定一个正在运营的项目的价值，投资于这样一个项目的机会的价值，以及投资、封存、重新启动和废弃该项目的决策规则如何受到各种成本 I ， E_M ， M 和 R 及产出价格波动的影响。

与以前一样，我们将假定价格服从几何布朗运动式 (7-1)。企业必须在考虑未来价格的不确定性的条件下决定是否以及何时封存一家工厂。直觉表明有下面的一般情形。我们从下面这样一种情形开始，即企业没有任何类型的启动资本。如果价格上升到临界值 P_H 时，企业作出投资。如果价格下降到另一个临界值 P_M ，则企业将暂停一个正在运营的项目。给定一个封存中的项目，如果价格上升到第三个临界值 P_R ，企业将重新启动它。由于重新启动的成本小于从零开始投资的成本，我们预期 $P_R < P_H$ 。如果实际上价格下降，假定重新启动是充分不可能的或者是非常遥远的一件事，则存在第四个临界值 P_S ，在这一点，已经封存的项目将会被完全废弃以节约维护费用。企业将重新回到初始的空闲状态。

当然，所有这些临界值 P_H ， P_M ， P_R 和 P_S 都是内生的，而且必须由基本的参数来决定。更基础地，我们必须考虑企业如何发现利用封存期权从整体上是最优的。如果维护费用 M 充分高，或者重新启动成本 R 没有充分小于全部的投资成本 I ，则企业可能会发现，如果价格到达一个更低的临界值 P_L 时，直接废弃一个正在运营的项目会更好。在这种情形下，我们回到了前面的模型。我们必须内生性地确定在企业的最优策略中是否有封存迹象。

7.2.1 最优转换的规则

在前面，我们用 E 来表示一项活动的项目的放弃成本。现在我们

令 E_M 表示一个正在运营的项目的废弃成本，而 E_S 表示早已在封存中的项目的废弃成本。（在采矿业中，前者可能是雇用矿工的成本，而后者为厂址恢复的成本。在轮船的情形下，后者可能为负，表示废弃价值。）为保持说明的简单，我们将假定 $E_M + E_S = E$ ，因此，直接放弃一个活动项目的成本正好是先封存该项目的成本与再废弃已封存项目的成本之和。在实践中，当项目要经历封存阶段时由运营到完全废弃它的代价可能更高或更低。修造轮船并将轮船从船坞移进或移出、维修的成本可能会发生两次，但如果一种更渐进的路线允许通过退休或辞退减少劳动力，这可能会节约一定的劳动力解雇成本。我们把由这种非附加的成本所提出的问题留给读者来考察。

类似的考虑适用于投资成本 I 。原则上，人们可以认为，以成本 J 来装备一个处在封存状态的项目，然后在以后以成本 R 来重新启动它。然而，我们没有发现为什么这种间接路线会比简单地投资于一个正在运营的项目更便宜的理由。因此，企业将永远不会发现采取这种路线是最优的，它将永远不会投资于一个封存的项目。通过将项目推迟到运转的那一刻，它可以推迟支出第一笔的资本成本 J 并节约流量为 M 的维修费用。^[8]

这使得我们在考虑三种状态下可以想到的六种可能的转换中去掉了一种转换。在剩下的五种转换中——空闲到活动、活动到封存、封存到废弃、封存到活动，以及活动到废弃——如果封存实际上是最优策略的一部分，前四种转换会被使用。否则，只有第一种和最后一种会被使用。我们在这种假定下进行分析，即当价格下降到一定水平，封存得到使用，然后决定其在分析的时间区间内波动的极限。

我们继续用 0 与 1 来表示空闲与运营状态，而且对封存状态引入了另外的符号 m 。我们找到了每种状态下作为预期利润或成本流及转换期权的混合的企业价值，方法实际上与本章前面及第 5 章和第 6 章所用的方法一样，因此，我们将概括地叙述分析并省略了许多细节。

在价格区间 $(0, P_H)$ 内，企业可能处于空闲状态，则其价值再次由前面的式 (7-4) 给出：

$$V_0(P) = A_1 I^{\beta_1}$$

式中， A_1 为需要确定的常数，这正好是投资期权的价值。我们与以往一样，利用当 $P \rightarrow 0$ 时， $V_0(P)$ 必须趋于零这样一个事实去掉了含有负幂 β_2 的项。

类似地，在区间 (P_M, ∞) 内，运营状态可能会盛行，企业的价值再

次由前面的式 (7-6) 给出:

$$V_1(P) = B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$$

式中, 常数 B_2 仍然需要确定。在前面的章节所讨论的模型中, $B_2 P^{\beta_2}$ 代表放弃期权的价值, 现在这一项为封存期权的价值。与前面一样, 另外两项给出了永远持续运营的预期现值。当然, 封存期权的价值是由重新启动或废弃的更进一步的可能性推导出来的。

封存状态在某一价格范围 (P_S, P_R) 内会持续。由于零或无穷都不包括在这个区间内, 我们不能消去解中期权价值部分的正幂或负幂。因此, 封存项目的价值由式 (7-17) 给出:

$$V_m(P) = D_1 P^{\beta_1} + D_2 P^{\beta_2} - \frac{M}{r} \quad (7-17)$$

式中, 常数 D_1 和 D_2 仍然需要确定。式 (7-17) 中的第一项为重新启动已封存项目的期权价值, 第二项为废弃该项目的期权价值, 第三项为简单资本化的维护成本, 假定项目将永远处于封存状态之中。

在每一个转换点, 我们有适当的价值匹配条件及平滑粘贴条件。对初始投资, 这些条件为

$$V_0(P_H) = V_1(P_H) - I, \quad V'_0(P_H) = V'_1(P_H)$$

对封存状态, 这些条件为

$$V_1(P_M) = V_m(P_M) - E_M, \quad V'_1(P_M) = V'_m(P_M)$$

对重新启动, 这些条件为

$$V_m(P_R) = V_1(P_R) - R, \quad V'_m(P_R) = V'_1(P_R)$$

最后, 对废弃, 这些条件为

$$V_m(P_S) = V_0(P_S) - E_S, \quad V'_m(P_S) = V'_0(P_S)$$

这八个方程决定了四个临界值 P_H, P_M, P_R, P_S 及四个期权价值相关系数 A_1, B_2, D_1, D_2 。我们可以正式地解出这些方程, 但必须考虑其解是否有经济意义, 因此, 要确定对封存期权被真正使用的参数范围的限制。

最有前途的出发点是封存与重新启动之间的相互作用。利用上面的函数形式, 在这两个临界点的四个方程变为

$$-D_1 P_R^{\beta_1} + (B_2 - D_2) P_R^{\beta_2} + \frac{P_R}{\delta} - \frac{C - M}{r} = R \quad (7-18)$$

$$-\beta_1 D_1 P_R^{\beta_1 - 1} + \beta_2 (B_2 - D_2) P_R^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (7-19)$$

$$-D_1 P_M^{\beta_1} + (B_2 - D_2) P_M^{\beta_2} + \frac{P_M}{\delta} - \frac{C - M}{r} = -E_M \quad (7-20)$$

$$-\beta_1 D_1 P_M^{\beta_1 - 1} + \beta_2 (B_2 - D_2) P_M^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (7-21)$$

我们可以把这看做关于四个未知数 $D_1, (B_2 - D_2), P_R$ 和 P_M 的四个方程组, 并对它自身求解。另外, 将式 (7-18) ~ 式 (7-21) 与式 (7-9) ~ 式 (7-12) 进行比较, 这一方程组实际上与我们在前面对没有封存期权条件下投资与放弃的情形下所讨论的方程组有相同的形式。我们仅仅需要重新把 R 解释为投资成本, E_M 解释为放弃成本, $(C - M)$ 解释为运营成本即可。那么, P_R 就如同前面的投资临界值, 而 P_M 如同放弃临界值。

为了继续与前面的模型进行类比, 让我们把 $H(I, E, C)$ 界定为较高的临界值, 而把 $L(I, E, C)$ 界定为较低的临界值, 从而来解决投资—放弃系统, 每一个都被表达成一次性成本及成本流的函数。回忆我们的静态比较结论: 函数 H 和 L 两者都随成本项 C 的流量而递增, 函数 H 随着 I 和 E 而递增, 而函数 L 关于这两项为递减。现在, 当前的模型中, 重新启动及封存的临界值可以写成下列形式:

$$P_R = H(R, E_M, C - M), \quad P_M = L(R, E_M, C - M)$$

现在转到前面的八个方程中剩余的四个方程。关于新投资的价值匹配与平滑粘贴条件是非常熟悉的:

$$-A_1 P_H^{\beta_1} + B_2 P_H^{\beta_2} + \frac{P_H}{\delta} - \frac{C}{r} = I \quad (7-22)$$

$$-\beta_1 A_1 P_H^{\beta_1 - 1} + \beta_2 B_2 P_H^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (7-23)$$

在废弃临界点, 这些条件变为

$$(D_2 - A_2) P_S^{\beta_1} + D_2 P_S^{\beta_2} - \frac{M}{r} = -E_S \quad (7-24)$$

$$\beta_1 (D_1 - A_1) P_S^{\beta_1 - 1} + \beta_2 D_2 P_S^{\beta_2 - 1} = 0 \quad (7-25)$$

这些方程中有六个未知数——临界值 P_H, P_S 及系数 $A_1, B_2, (D_1 - A_1)$ 和 D_2 。然而, 上面四个方程的第一组的解给我们提供了系数之间的联系, 我们已知 $D_1 = (D_1 - A_1) + A_1$ 及 $(B_2 - D_2)$, 因此我们完成了解。

这个系统太复杂以至于不能解析性地掌握它, 所以我们将提供一些数值模拟, 以提供对这个解的特征的更多的了解。然而, 直觉表明了其解的一些

一般特征。首先,如果 M 和 R 两者都为零,则封存相当于无成本的推迟,我们又回到了第 6 章麦克唐纳-西格尔(McDonald and Siegel, 1985)的基本模型。那么,引起封存与重新启动的行动会使得 M 和 R 在点 C 会合,而引起废弃的行动两者迅速跌落至零。现在考虑 R 和 M 的逐步提高,且每次只改变一个。

当 R 升高而 M 保持为常数时,重新启动的临界值 P_R 将提高而封存的临界值 P_M 将下降,当投资成本升高时投资与放弃临界值的变化与本章前面一样。重新投资的临界值 P_H 将升高;当重新启动代价更高时,封存期权不太有用,因此企业更不愿意投资。最后,当重新启动代价更高时,废弃临界值 P_S 也将升高,当价格下降时,企业不愿意持有有一个封存的项目。

当保持 R 的提高时,封存的临界值 P_M 下降而废弃的临界值 P_S 上升。当封存成为最优策略的一部分时,必然有 $P_M > P_S$ 。因此,这两个临界值相交时的 R 值限定了与封存不再有关的参数空间的边界。将 P_C 写做在这一边界上的普通解,加上共同的 P_C 所满足的价值匹配条件式(7-20)和式(7-24),及相应的平滑粘贴条件式(7-21)和式(7-25),我们发现:

$$\begin{aligned}
 -A_1 P_C^{\beta_1} + B_2 P_C^{\beta_2} + \frac{P_C}{\delta} - \frac{C}{r} &= -(E_M + E_S) = -E \\
 -\beta_1 A_1 P_C^{\beta_1 - 1} + \beta_2 B_2 P_C^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} &= 0
 \end{aligned}$$

这实际上就是本章前面封存根本不存在时,临界值 P_H 和 P_L 满足的放弃方程式(7-11)和式(7-12),以及相应的一对投资方程式(7-9)和式(7-10)。这样,所有的情形完全与其应该表现出的情形相一致。对足够高的 R 值,企业忽略了封存的可能性,并且像以前一样,在空闲与活动状态之间转换。

下面保持 R 固定而提高 M 。这会降低从封存中所节约的流动成本($C - M$)。因此, P_R 和 P_M 两者都下降,企业将不太愿意封存一个项目,而更愿意重新启动一个已封存的项目。然而, P_H 和 P_S 升高,企业将更不愿意投资,而更愿意放弃一个封存的项目。当 M 上升到特定水平时,下降的 P_M 与上升的 P_S 再次相遇,对任何较高的 M 值,封存都不会被使用。

在限定了使用封存的边界的临界值 R 和 M 之间也存在一种权衡。当 R 较大时, M 的临界值将较小,反之亦然。

7.2.2 数值结论

现在我们转到证明这种直觉的数值解。最有意义的参数为维护成本流 M 及重新启动成本 R ,为重点考察它们,在剩余的说明中我们将假定封存成

本 E_M 与废弃成本 E_S 均为零;因此,它们的和,即直接放弃的成本 E 也为零。我们还将简短地提供另一个数值例子,以说明这些参数不为零时的影响。

我们把 C 一般化为 $C=1$ 。我们假定一家风险中性的企业, $r=0.05$ 。价格的随机过程中 $\alpha=0$ 且 $\sigma=0.2$, 则 $\mu=r=0.05$ 且 $\delta=\mu-\alpha=0.05$ 。投资的一次性成本为 $I=2$, 不投资没有一次性成本, 因此, $E=0$ 。在这些数值条件下, 忽略封存的可能性, 投资与放弃的临界值为 $P_H=1.5977$, $P_L=0.7135$ 。

现在允许封存, 并考虑两种情形: $M=0.01$ 和 $M=0.05$ 。对每一种情形, 我们考虑 R 值的范围。这四个临界值的最终值如表 7—1 所示。对固定的 M 而言, R 变化的影响可以从这里详细说明了的每种情形下看到。在情形 1, 维护费用很低, $M=0.01$ 。现在封存在某一价格范围被采用, 直到极限的 $\bar{R} \approx 1.76$; 一旦 R 超过了这个 \bar{R} , 封存永远不会被采用。随着 R 在 $(0, \bar{R})$ 范围内升高, (1) P_H 提到没有封存的水平; (2) P_M 下降且 P_S 上升, 直到 $R=\bar{R}$, 两者在 P_L 相遇; (3) P_R 上升, 只有当 R 到达 \bar{R} 时, 才会变得与此无关。

表 7—1 封存与放弃的临界值
($r=0.05$, $\delta=0.05$, $\sigma=0.2$, $C=1$, $I=2$, $E=0$)

情形 1: 较低的成本 $M=0.01$				
R	P_H	P_R	P_M	P_S
0.2	1.557	1.202	0.832 2	0.293 7
0.4	1.568	1.272	0.798 7	0.317 1
0.6	1.576	1.325	0.777 0	0.342 4
0.8	1.582	1.372	0.760 8	0.371 3
1.0	1.587	1.413	0.747 8	0.406 1
1.2	1.591	1.451	0.736 9	0.449 8
1.4	1.594	1.487	0.727 6	0.508 5
1.6	1.597	1.521	0.719 5	0.595 5
1.763 4	1.598	1.548	0.713 5	0.713 5
情形 2: 较高的成本 $M=0.05$				
R	P_H	P_R	P_M	P_S
0.1	1.577	1.108	0.824 6	0.524 0
0.2	1.583	1.157	0.796 8	0.543 0
0.3	1.587	1.194	0.778 3	0.561 2
0.4	1.590	1.225	0.764 4	0.579 3

续前表

R	P_H	P_R	P_M	P_S
0.5	1.592	1.253	0.753 0	0.597 8
0.6	1.594	1.278	0.743 4	0.617 0
0.7	1.596	1.301	0.735 1	0.637 1
0.8	1.597	1.323	0.727 8	0.658 4
0.9	1.597	1.343	0.721 2	0.681 1
1.030 7	1.598	1.370	0.713 5	0.713 5

在情形 2, 维护费用较高, $M = 0.05$ 。封存在一个较小的范围内相关, \bar{R} 仅稍大于 1。

从图 7—7 中比较容易看到一般模式。将 M 固定在一个相对较低的值上, 各类临界值作为 R 的函数由图中的粗线表示。当 $R < \bar{R}$ 时, 封存是最优策略的一部分。当 $R \geq \bar{R}$ 时, 两个临界值 P_M 和 P_S 在 P_L 会合。当考虑较高的 M 值时, 曲线转移到由细线所示的位置。 P_M 曲线向下移动, P_S 曲线向上移动, 两者在较低的 \bar{R} 相遇。在新的较低的 \bar{R} 水平, P_H 曲线向上移动到其最终的常数水平。 P_R 曲线向下移动, 只有当封存不再被使用, 它才停止向下移动到其最终的常数水平。还应当注意到, 随着 R 从 0 点开始递增, 重新开始与封存的临界值非常快地分开。由于我们已经设定封存的成本 $E_M = 0$, 这一对转换的总成本 $R + E_M$ 很小, 我们有前面式 (7-16) 所示的三次根的例子。

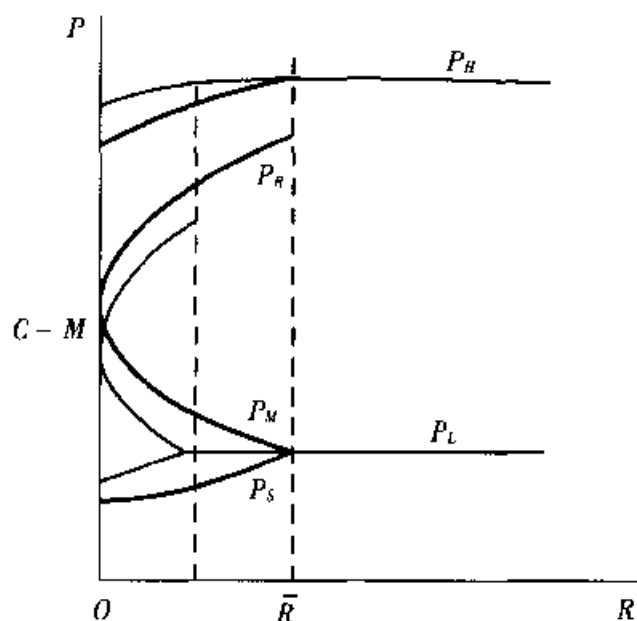


图 7—7 封存与放弃

一种更进一步的数值试验很有趣，也就是让 R 和 M 两者都很小，从而把封存的模型推到我们在第 6 章中的模型的极限形式。这确实会发生，但是接近极限的过程非常慢，因为存在不确定性时，即使很小的沉没成本也会有重大影响。那么，与以前一样，保持 $C = 1$ ，即使我们把与封存有关的成本降低到 $M = 0.001$ 及 $R = 0.02$ ，我们也会发现， $P_R = 1.089$ 及 $P_M = 0.919$ ，每一个都离开它们的共同的极限值（即 1）大约 10%。废弃的临界值变为 $P_S = 0.0963$ ，再次明显地高于其极限 0。

7.2.3 例子：油轮的建造、封存及废弃

前面所提供的数值解有助于说明最优临界值对各类成本参数在质上的依赖。然而，对现实世界中最优投资、封存、重新启动及废弃决策的例子进行考察也是非常有用的。正如我们的铜矿业的例子，这可以给我们提供对沉没成本和不确定性的重要性的更好评价，而且也显示出模型如何能应用于实践。

我们将把我们的模型应用于油轮业。油轮业提供了一种特别好的例子，因为油轮的潜在的所有者或实际的所有者面临着相当大的利润不确定性，以及巨大的沉没成本。由于油轮市场的竞争非常激烈，所以会产生不确定性，油轮的回报率（使用油轮的日收益，即我们模型中的 P ）随着油价的波动、石油生产的地理分布和石油消费的变化，以及油轮供给的变化等而大幅波动。而且，由于建造一艘新油轮以及维护或重新启动处于封存中的油轮的开支巨大，沉没成本也是重要的。

一般有四种规模的油轮：小油轮，载重量大约为 35 000 吨；中型油轮，载重量约为 85 000 吨；大型油轮，载重量约为 140 000 吨；以及从 20 世纪 70 年代中期以来出现的巨型油轮（VLCC's），载重量约为 270 000 吨。收益率以及建造、运营和其他成本不会随着油轮的载重量而直线上升，因此，投资、封存等经济学问题在这些不同类型的油轮间会有所变化。我们将集中于一种特定的类型——载重量为 85 000 吨的中型油轮。^[9]

建造载重量为 85 000 吨级的新油轮的平均成本大约为 $I = 4\,000$ 万美元。（所有成本与收益都以 1992 年的美元计。）封存油轮的一次性成本为 $E_M = 20$ 万美元，废弃一艘封存的油轮的成本为 $E_S = -340$ 万美元（即油轮有一个正的废弃值），重新启动一艘已封存的这种规模的油轮的成本为 $R = 79$ 万美元。一艘封存的油轮的年维护成本为 $M = 51.5$ 万美元。最后，给定

燃油及劳动力成本，这艘油轮 1992 年的年平均运营成本大约为 $C = 440$ 万美元。在 1992 年，这艘油轮每年将获得的总收益大约为 $P = 730$ 万美元。我们已经假定， P 服从几何布朗运动，该过程的漂移率 α 及波动率 σ 可以从关于总收入的实际时间序列的样本均值及样本方差中估计出来。利用从 1980—1992 年中期的季度数据，我们发现 $\alpha = 0$ ， $\sigma = 0.15$ 。最后，我们用 0.05 来表示实际的无风险利率 r 和经风险调整的利率 μ （因此 $\delta = 0.05$ ）。^[10]

图 7—8 显示了作为一次性重新启动成本 R 的函数的临界值 P_H ， P_R ， P_M 和 P_S 。注意到，我们的基本值为 79 万美元，1992 年的毛收入为每年 730 万美元，这对于重新启动一艘油轮来讲已经足够高了，但是正好低于投资于一艘新油轮所需的每年 950 万美元收入的临界收益。与这个结论相一致，实际上在 1992 年确实少有或根本没有在新油轮上的投资。观察到当 R 提高时， P_R 与 P_S 升高，而 P_M 下降，但不是非常快。只要重新启动的成本低于 270 万美元，封存仍然是一种可行的选择。投资的临界值 P_H 也随着 R 的上升而升高（尽管是如此之慢，以至于很难从图中分辨出来）；较高的 R 降低了油轮的价值，因此，提高了企业在愿意投资之前期望获得的收益。^[11]

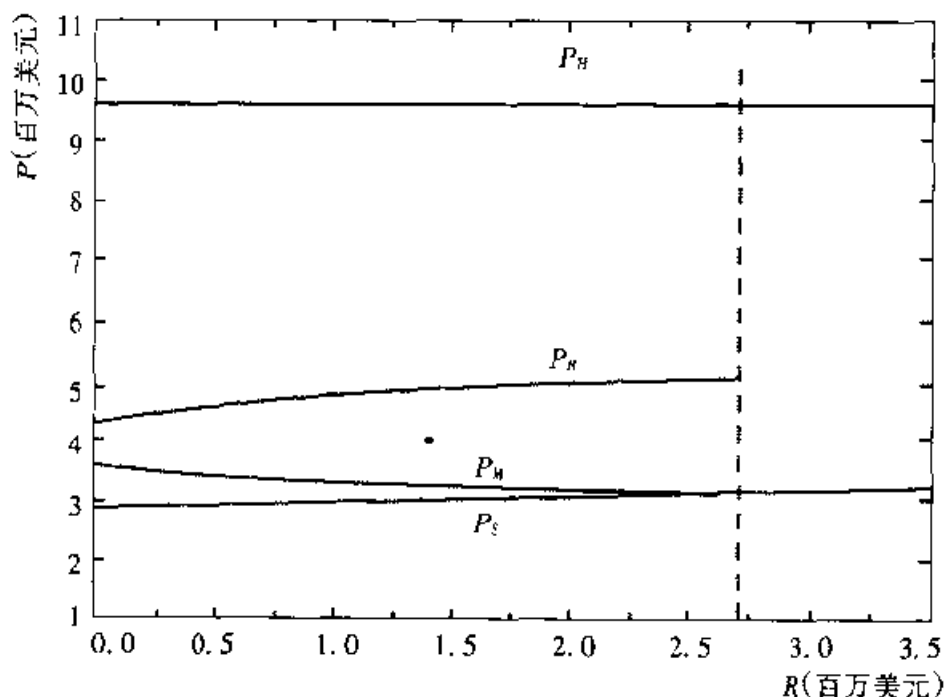


图 7—8 作为重新活动成本 R 的函数的临界值

图 7—9 显示了作为封存一艘正在运营的油轮的一次性成本 E_M 的函数

的最优临界值。注意临界值对 E_M 的定性依赖与它对 R 的定性依赖是一样的。超过 100 万美元的 E_M 值是不现实的（考虑到我们的基本价值为 20 万美元），但是出于说明的目的，我们已经把这种较大范围包括在内了。注意只要 E_M 低于 210 万美元，封存仍然是一种选择。

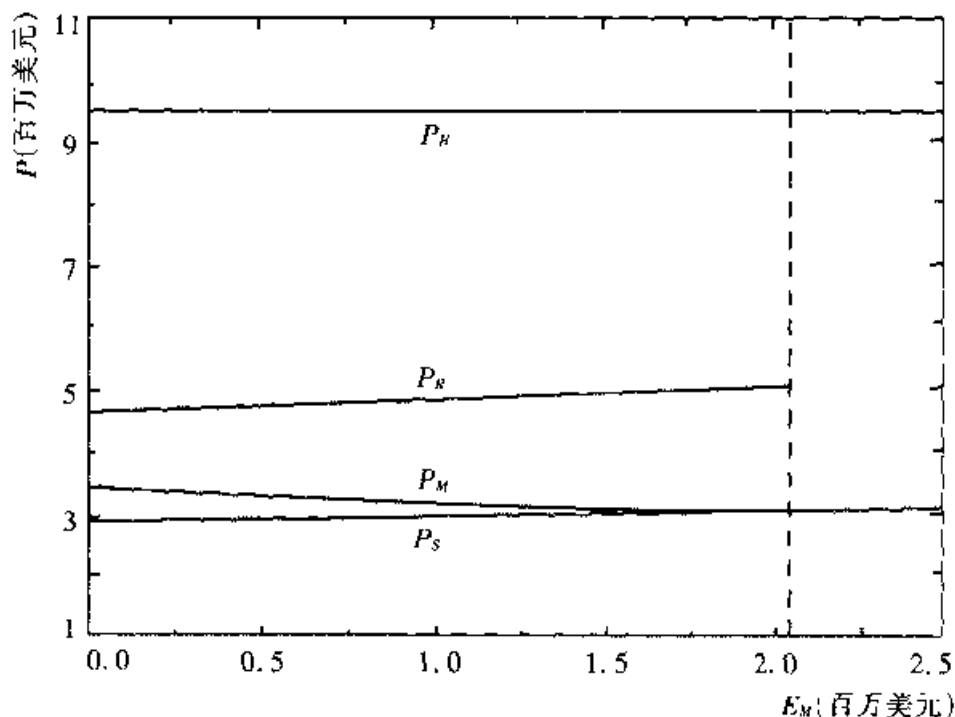


图 7—9 作为封存的一次性成本 E_M 的函数的临界值

图 7—10 显示了作为已封存油轮的年维护成本 M 的函数的最优临界值。正如图中所显示的，在决定封存对企业来讲是否是一种可行选择时，这是一个临界参数。注意到，一直到 M 达到大约 72 万美元之前，封存仍然是一种选择，我们的基本价值 51.5 万美元离这个值并不太远。回想到较高的 M 值降低了油轮的价值，从而提高了投资的临界值。较高的 M 值也使封存更不合意，因此，减少了 P_R 和 P_M ，而提高了 P_S 。

图 7—11 显示了作为年运营成本 C 的函数的四个临界值。正如在较高的 M 值情形下，较高的运营成本减少了油轮的价值，并因此提高了投资所需的临界值 P_H 。然而，正如人们所预期的，运营成本的变化对油轮的价值，从而对 P_H 的影响要比维护成本 M 的变化对它们的影响大得多。此外，由于较高的运营成本减少了正在运营的油轮的价值，它提高了临界值 P_R ，在这一点一艘封存的油轮将被重新启动，而且也提高了临界值 P_M 和 P_S ，因此，在企业愿意封存或废弃其油轮之前，收益 P 并不需要下降得太多。

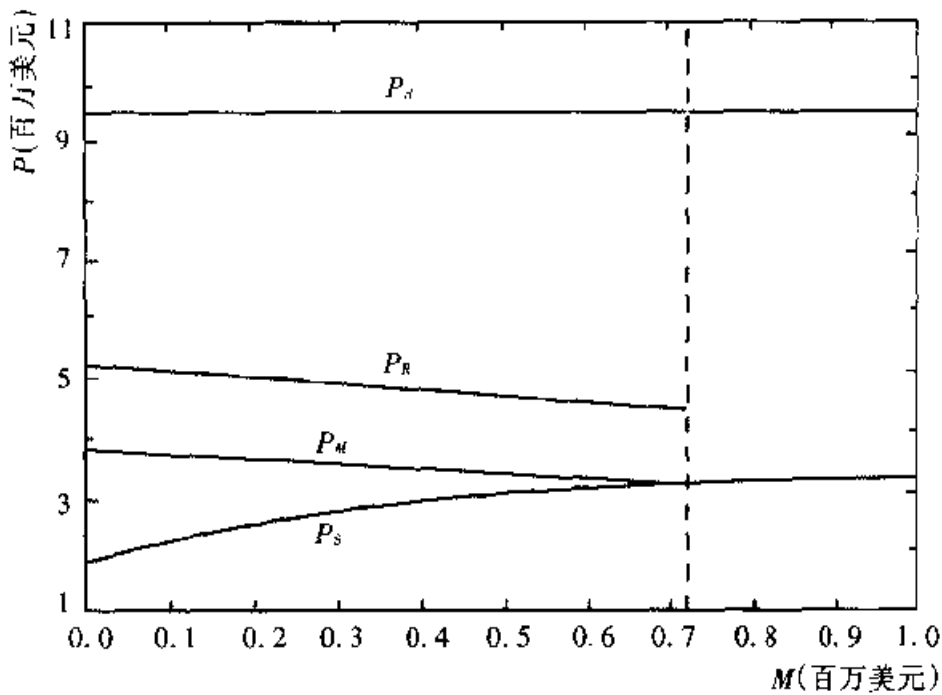


图 7—10 作为年维修成本 M 的函数的临界值

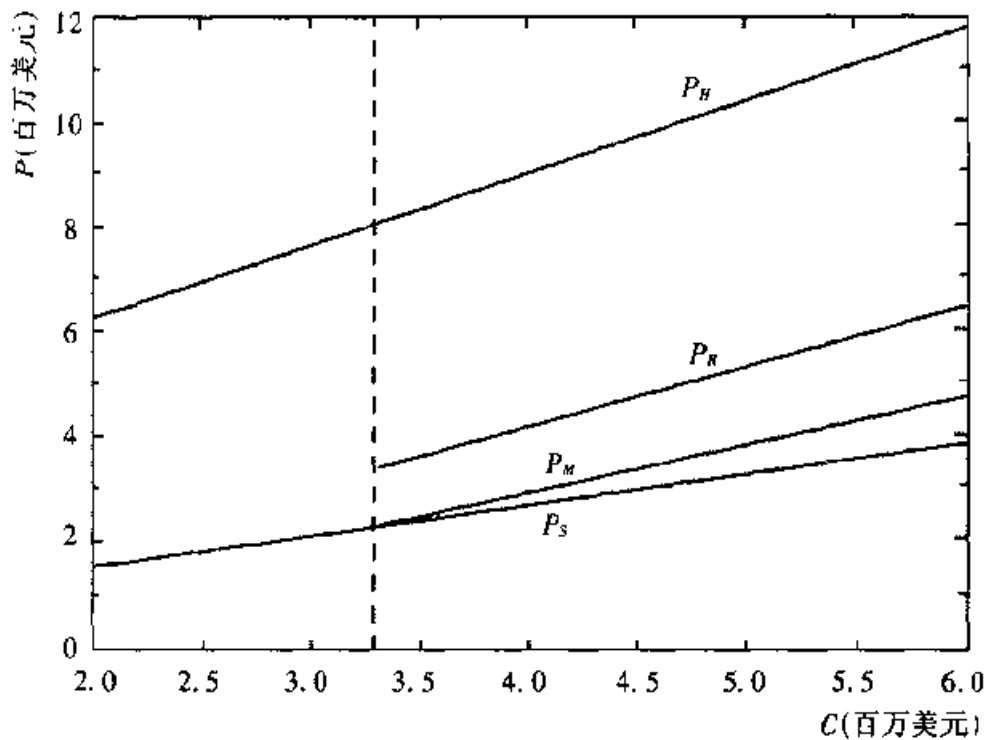


图 7—11 作为年运营成本 C 的函数的临界值

最后，图 7—12 显示了作为 S 的函数的临界值，其中 S 是收益 P 的年变化率的标准差。注意，这些临界值，特别是 P_H 和 P_S ，对 σ 非常敏感。正

如我们在前面的铜业例子所看到的,对大的 σ 值,不活动的区域会大幅扩张。而且,注意到如果 σ 小于 0.1, P_M 和 P_S 是一致的,则封存就不是企业会使用的选择。理由是,只有在不远的将来收益的大幅提高存在合理的概率时(因而油轮将会被重新启动),封存才是有用的。对于 $\sigma < 0.1$, 考虑到封存、重新启动及维护成本,使收益得到大幅度提高从而使封存变得经济的概率非常小。

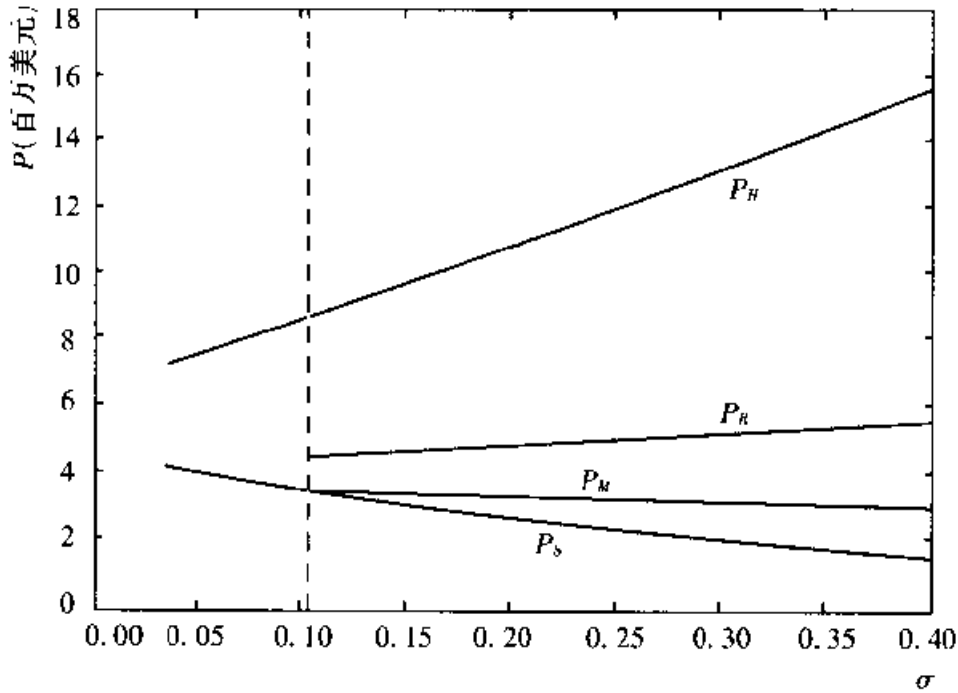


图 7—12 作为流动性 σ 的函数的临界值

7.3 文献导引

242

关于投资与放弃联合决策的先驱性文章见布伦南和施瓦茨 (Brennan and Schwartz, 1985) 的著作。他们构建了一个关于开发、关闭及封存一座生产某种自然资源的矿山的决策的非常一般性的模型,该自然资源的价格随时间推移而波动。矿藏总存量的有限性引入了超出本章所考虑的所有问题的额外的复杂性。事实上,正是模型的这种复杂性隐藏着一些重要的理念。在得到描述投资与放弃的价格临界值的方程系统后,布伦南和施瓦茨立即求助于数值解。他们得到了进入与退出临界价格的比率,并证明对合理的参数值来讲,该比率超过 1。

迪克西特 (Dixit, 1989a) 将进入与退出决策从封存或有限存量的问题中分离出来。从而产生了一些解析性结论和见解。特别地, 他分别把进入和退出临界价格与全部成本和可变成本的短视或马歇尔标准单独地进行比较。他阐明了投资与放弃的独立选择中的时间价值的作用, 或更一般地, 阐述了现状的期权价值的作用。我们的说明基本上遵循迪克西特的处理方法。

最优封存决策的一些较早的工作是由莫辛 (Mossin, 1968) 作出的, 他发展了一个模型, 在该模型中, 经营收入服从一种带有高低两个反射壁的无趋势的随机游动, 而且在模型中不存在废弃的可能性。他计算了最优收入水平, 在这一水平上, 封存并重新启动该项目是最优的。布伦南和施瓦茨 (Brennan and Schwartz, 1985) 的更一般的模型包含了封存的可能性及积极经营和放弃的可能性。然而, 由于对封存及放弃的较低的临界值使用了相同的符号, 他们混淆了从一种活动状态到两种状态间的过渡。当获得数值解时, 他们专门研究了维护成本为零的一个模型; 那么, 废弃就永远不会被利用, 而他们认为转换只会在两种状态之间——运营与封存。我们的方法再一次遵循了迪克西特 (Dixit, 1988) 后来在某种程度上更清晰的分析。

244 在本章, 我们所研究的模型都是关于适应不断变化的经济条件的许多方案间进行最优转换的一般问题的例子。每次转换都是一种期权的执行, 每次转换都产生了一种资产, 这种资产再次将盈利流量与转换期权结合起来。这样, 我们有一组联合的或混合的期权, 而且必须同时为它们定价。分析此类混合期权的文献非常多, 这些文献或者是从一般理论角度进行分析, 或者旨在特殊的应用。在金融经济学中, 格斯奇 (Geske, 1979) 的著作是这类文献中早期的一个例子; 后来的文献包括格斯奇和约翰逊 (Geske and Johnson, 1984) 及卡尔 (Carr, 1988) 的著作。

至于实际投资决策, 库拉蒂拉卡和马库斯 (Kulatilaka and Marcus, 1988) 发展出一个三时间阶段在两种模式下进行转换的模型, 并且简要说明, 它如何能够被扩展到许多模式和转换中。通过将不同的模型放入其框架, 他们还总结了关于实物期权的早期文献。

法恩和弗洛伊德 (Fine and Freund, 1990) 考察了一个一般的两阶段模型, 其中企业必须在不确定性被解决之前选择其生产能力, 并且它或者可以选择特定资本 (适合于特殊产出), 或者可以选择灵活性资本 (它可以产出所有类型的产出, 尽管成本更高)。特里安蒂斯和霍德 (Triantis and Hodder, 1990) 给出了连续时间下的类似模型。何和平迪克 (He and

Pindyck, 1992) 通过考虑生产能力后来的扩张而使分析更进一步。在所有这些模型中, 期权价值更加重要, 因为通过等待企业保持了以后作出更好投资的机会, 而不仅仅是根本不投资, 就像第 5 章和第 6 章的模型所述的情形。

本特利拉和伯特拉 (Bentolila and Bertola, 1990) 考察了存在雇用和解雇费用时企业的雇用决策。迪克西特 (Dixit, 1989b, c) 考虑了汇率波动时的生产与进出口选择。这是以鲍德温和克鲁格曼 (Baldwin and Krugman, 1989) 所做的较早的工作为基础的; 还可参见克鲁格曼 (Krugman, 1989) 的论述。杜马斯 (Dumas, 1992) 和克鲁格曼 (Krugman, 1988) 在一般均衡水平上发展了一个将汇率过程内生化的模型。科格特和库拉蒂拉卡 (Kogut and Kulatilaka, 1993) 考虑了为适应汇率的变动, 跨国企业将生产从一个国家转移到另一个国家的决策。范·威金伯根 (Van Wijnbergen, 1985) 构建了政策不确定背景下欠发达国家资本流出的两阶段模型。

【本章注释】

[1] 从事一项新研究项目的科学家必须投入资本, 如熟悉文献、学习新的数学技能或实验技巧等。我们的经验是, 这种资本锈蚀得非常快, 如果我们将项目搁置哪怕仅有几个星期的时间。

[2] 该证明非常长且非常乏味, 因此我们忽略了它。有兴趣的读者可参考迪克西特 (Dixit, 1989, Appendix A) 的著作。

[3] 给定好的互动的图像软件计算这些临界值时可以转化为几何方法。在 $G(P)$ 的图像上加上水平线 I 和 $-E$, 并调整系数 A_1 和 B_2 , 直到你到达相切点。切点的横坐标就是最优临界值 P_H 和 P_L 。

[4] 一些宏观经济学家发现, 从静态预期到理性预期是一种非常有趣的反语, 它隐含着更多, 而不是更少。

[5] 布伦南和施瓦茨 (Brennan and Schwartz, 1985) 利用或有债权方法来评价铜矿, 并集中于封存和以后重新启动矿山的期权。

[6] 例如, 参见博迪和罗珊斯基 (Bodie and Rosanski, 1980) 及布伦南 (Brennan, 1991) 对 σ 的考虑。对便利收益的比率采用 $\delta = 0.04$, 与它在过去 20 年间的平均值非常接近。但是人们应当记住, 这一参数随着时间推移波动的范围非常大。曾经持续过很长一段时间, 它的值接近于零; 也在很短的一段时间内 (当存货的总量非常低的时候), 它每年高达 30%~40%。为简化分析, 我们已经假定一个常数 δ 。对便利收益及其一般变动的讨论, 以

及对铜业的讨论，参见布伦南（Brennan, 1991）及平迪克（Pindyck, 1993c, d）的论述。

[7] 由于项目每年生产出1 000万磅的铜，投资的净现值（以百万美元计）为 $-20 + \frac{10P}{0.04} - \frac{8}{0.04}$ 。（收益流以利率 $\mu = 0.06$ 进行折现，但是预期将以增长率 $\alpha = 0.02$ 增长，而运营成本以无风险利率 $r = 0.04$ 进行折现。）如果 $\sigma = 0$ ，则这一净现值 > 0 ，即如果 $P > 0.88$ 美元，企业将投资。同样，一旦企业在市场中，存在的净现值为 $-2 - \frac{P}{0.04} + \frac{8}{0.04}$ ，当 $P < 0.79$ 美元时，它为正。

[8] 在一个垄断性产业中，对持有一个封存项目可能有战略性原因，但我们在这里不考虑市场结构。

[9] 关于油轮业的一般介绍，参见罗林森和波特（Rawlinson and Porter, 1986）的论述。冈卡弗斯（Goncalves, 1992）也曾利用或有债权方法考察了油轮的最优投资决策，以及瞬时合约价格与长期合约价格之间的关系。

[10] 我们从波士顿的火星软件公司（Marsoft）获得关于收益、成本及其他行业变量的时间序列数据。我们感谢火星软件公司总经理阿里·G·斯特林博士（Arlie G. Sterling）提供的这些数据，以及给我们提供的关于这个行业的各类经济问题方面的建议。我们也感谢挪威经济与商业学院的维克多·诺曼和西里·彼得森·斯特兰德尼斯（Victor Norman and Siri Pettersen Strandenes），他们也提供了数据和建议。

[11] 不像图 7—7，关于 P_R 和 P_M 曲线的三次根形式在纵轴上不相交，因为在画出前面的图像时，我们假定封存的成本为零，而这个数值例子中不是这种情形。

金融学前沿译丛

不确定条件下的投资

第IV篇

产业均衡

第8章 竞争性产业的动态均衡

247

在第5章~第7章里，我们考察了单个企业的各种投资与不投资决策，其中我们假定该企业具有投资于某一给定项目的垄断权利，并且忽略了其他企业加入竞争的可能性。^[1]经营性项目的利润流受制于正在发生的波动。由于我们假定该项目会产生固定的产出流，因此，我们能将这些波动模型化为外生的定价过程，我们发现教科书中的马歇尔现值标准或价格成本的比较根本不是企业最优选择。在适度不确定条件下，只有当现行价格超过了长期平均成本，或投资沉没成本的现行收益率超过了资本的成本时，而且这些差额经常很大，投资才被证明是合理的。同样地，不是在价格低于平均可变成本，或现行的经营利润变成负值时，而是在损失变得非常大时，企业才

会放弃投资，其原因在于不确定性条件下作出不可逆决策之前等待的期权价值。

248 在实践中，大多数企业并不享有投资的垄断权利，取而代之的是企业必须考虑新竞争对手进入的可能性，或是已有竞争对手扩张的可能性。这使我们对先前的基本结论产生了怀疑。等待的期权价值取决于企业的竞争对手的行为，在自由进入的情形下，这种价值会减少为零吗？它不会使马歇尔的比较价格标准恢复到投资状况下的长期平均成本和不投资的平均可变成本吗？因此，读者可能会怀疑，有关单个企业理论并不适用于扩展到产业均衡的分析范围。

在本章和下一章，我们提出了这些问题，答案是极为确定的。等待的价值会发生什么变化不仅仅取决于竞争的特性，还取决于不确定性的特性。我们发现，当不确定性为企业特定时，企业等待的价值会继续存在，并且我们对企业水平的分析能简单地推广到产业均衡。由于综合的或是产业范围的不确定性，任何企业的等待价值都不会降为零，但是也不会恢复到马歇尔的价格——成本比较标准。尽管原因不同，但最优条件下投资与不投资的临界价格会以我们在第5章~第7章对企业水平分析相同的方式与成本相区别，我们不再详细说明外生价格的随机过程。价格是产业均衡的内生变量，我们必须追溯不确定性的更深层次，也就是需求和成本的条件。当不确定性为产业范围时，新的价格进入的内在反馈就产生了马歇尔和最优规则之间的差距。

对垄断性企业的早期分析也服务于教学目的及真实目的。我们对产业水平的所有分析使用的是在前面章节建立和阐述过的相同方法（动态规划与或有债权分析）。因此，为了使读者能熟悉这些新方法，以前的工作为读者提供了比较简单的假定。

本章关注的是产业均衡的基本理论。换句话说，我们采用了第5章~第7章的企业决策模型，并尽可能把它直接融入产业均衡的模型中。因此，在下一章我们考察了该模型的推广及应用。我们考察了企业之间的异质性，并且考察了在这种产业中数量不多的企业之间存在的不完全竞争的一个简单例子。

最后，可能也是最重要的，在第9章，我们也考察了有关投资政策的问题。如果企业在不确定条件下的不可逆选择受到维持原状的期权价值的巨大影响并因此具有相当大的惯性，则政府是否应当努力地鼓励投资呢？不同的

249

政策工具如何影响投资呢？具体地，政府降低不确定性的政策（如价格控制）的效果如何？政府自身行动的不确定性（如未来税率和管制改变的不确定性）的影响如何？如果这些问题在很多实际环境中具有指导政策的作用，则必须在产业水平上来考察它们。因此，这些章节正好是研究它们的地方。

在我们开始这个计划之前，我们应该讲一下与产业水平和特定企业的不确定形式相联系的不可逆性的特征。当投资的部分或全部成本都是沉没成本时，投资为部分或完全的不可逆。在第8.1.3中，我们提供了为什么会发生这种情况的一些一般性原因。也许最重要的原因是项目和设备本身的专用性。这在产业范围的不确定性情形下比在特定企业的不确定性情形下有更大的适用性。一家钢铁厂不可能用于钢铁以外的其他产业。如果一家钢铁企业受到自身特有的负面冲击，那么它可以把其工厂出售给另一家企业并获得相当好的价格，因此，这种不可逆性并不太严重。然而，如果整个产业都受到负面冲击，那么售出该工厂的价值很低并且不可逆性很大。因此，可以预期我们的理论在整体不确定性背景下具有更重要的意义。当然，即使对特定企业的冲击，一些投资支出也是沉没的。例如，在发现特定企业的随机冲击过程中所产生的任何研究或探索成本。而且，即使是非专用性资本（如汽车、计算机及办公设备等）也会由于生产质量上的不对称信息（即由阿克洛夫（Akerlof, 1970）所阐述过的“柠檬问题”）而在出售时遭受损失。

8.1 基本直觉

在转向数学模型之前，我们详述下述结论的直觉。首先，假定不确定性是特定企业的。这样不同企业经历了相对独立的需求冲击（例如，有不同产品的产业内时尚的改变）或成本冲击（如提高企业家技能的一次机会）。跟前面章节中一样，假定每家企业的冲击都是正向相关的；在实际模型中，我们将把这些冲击指定为布朗运动。尽管企业事先是同一的，经历过有利冲击的企业确实在暗中走在了其对手的前面，因此，这些企业确实有机会等一等 250 并看看在更新沉没资本之前这种领先会有多久。这样我们的期权价值分析方法仍然有效，并且可以建立起产业均衡的模型。

现在考虑产业范围的不确定性，例如，当产品同质时的需求冲击。暂时

假定投资完全不可逆。在这种环境下，对产业需求或成本的有利和不利冲击对价格有不对称的影响。一种不利的需求冲击会导致企业现有供给曲线上较低的价格。然而，有利的冲击如果足够大的话，会引起企业的进入与扩张。这使得供给曲线向右移动，从而抑制了价格上涨。这样，需求冲击的随机过程转换为不对称方式下价格冲击的随机过程。由于有新的企业进入，价格向上的移动受到限制，而价格向下移动则不受影响。我们前面对垄断性企业投资决策的分析假定了一种更对称的布朗运动过程。现在我们必须修正它，以考虑不对称的价格过程。这种不对称性减少了来自投资的预期回报，而且这也是为什么调整投资的临界价格最终超过了马歇尔长期平均成本的原因。类似地，当退出或放弃可能时，其他企业的退出提供了价格过程的下限，使每家企业更愿意接受一个损失期。

本章大部分是这种直觉的精心处理。为了这种目的，我们利用了在此背景下拥有两层意义的模型：它是第5章~第7章垄断性企业模型的更自然的推广，而且尽可能以最简单方式显示出来。

我们考虑一种拥有许多家企业的产业。每家企业都是风险中性的^[2]，采取竞争性行动并且对潜在的随机过程和其他企业的决策规则有理性预期。每家企业拥有生产出1单位产出的生产能力，这种能力可以通过承担一种沉没成本而启动。没有可变生产成本，而且需求弹性大到足以确保已经支付了其沉没成本的每家企业事实上都在其生产能力水平上生产。^[3]

不同企业产出的价格可以预想不到地变化，或者是由于整体性产业需求冲击，或者是由于特定企业的需求冲击，这些都反映出对企业产品的相对偏好的改变。因此，一家企业的产出可以在市场平均价格加上一定的外生贴息或贴现的价格水平上销售。这种贴息或贴现服从已知的随机过程，而它的变化构成了特定企业的冲击。另外，市场需求曲线自身也受到服从另一些随机过程的总体冲击的影响。更具体地，我们假定任何一家企业的单位产出由式(8-1)给出：

$$P = XYD(Q) \quad (8-1)$$

式中， X 为特定企业的冲击； Y 为产业范围内的冲击； Q 为当前产出流； $D(Q)$ 为递减函数，包括了产业的反需求曲线中非随机的部分。当每家企业都生产1单位产出时， Q 等于当前活动的企业的数量，这里我们把它看做连续变量。^[4]

现在我们可以在这种特定的背景下，以一种不同的但更精确的方式来描

述有关不确定性的不对称影响的直觉。我们知道在不确定条件下的一般选择理论中，如果其回报关于随机变量是凸的，较高的不确定性将提高一种行动的预期价值；如果其回报关于随机变量是凹的，则较高的不确定性将降低一种行动的预期价值。让我们考虑一种简单的情形，其中潜在的不确定性是对称的，被解释为等于 X 或 Y 的未来价值在相同概率下的上下漂移。我们将比较这种不确定性在特定企业情形下（ X 冲击）与产业范围情形下（ Y 冲击）的影响。

首先考虑特定企业的不确定性。 X 冲击成比例地转换为价格的不确定性，接着后者又把它成比例地转换为利润流的不确定性。如果企业立即投资，其未来利润流的期望值就是 X 的线性函数，而且其期望值不受不确定性提高的影响。然而，如果企业等待，它有能力通过在价格下降时选择不投资，而价格上升时保持向上的投资潜力，从而降低其向下的风险。这样等待的结果就是企业的回报为 X 的凸函数，因此，等待的预期价值随着 X 的不确定性的提高而提高。不确定性对立即投资的回报的预期价值及等待的预期价值的相反影响解释了为什么更高的不确定性提高了等待的“期权价值”贴息。

现在考虑产业范围内的不确定性。企业知道，如果 Y 上升，这会使进入成为它自己及其他企业进入的吸引力。然而，当其他企业进入时，产业的供给曲线向右移动，价格上升的比例小于 Y 上升的比例。因此，价格为 Y 的凸函数，那么利润流也是一样。 Y 的较高的不确定性减少了投资相对于不投资的期望价值。这也是为什么在投资之前，企业需要更高的当前盈利能力（超过马歇尔的正常回报）。

我们应当强调这两种情形下的相似性与差异性。在每种情形下，潜在的对称性需求冲击都转化为非对称的利润流冲击，但是这在两种情形下是以非常不同的方式发生的。在特定企业的不确定性条件下，利润流向下的冲击被等待的可能性所减缓。这样，较大的不确定性使得等待比立即投资更有价值。在产业范围的不确定性下，在大量的竞争性潜在企业中的任何一家企业的等待的价值都为零。然而，向上的潜在利润被其他企业进入的可能所削减。因此，较大的不确定性减少了投资相对于根本不投资的价值。

在现实中，有几种因素可能会影响利润流作为潜在冲击变量的函数的凸性或凹性。如果企业可以立即调整一些可变投入，则其利润流变成价格的凸函数，正如我们在第 6.3 节所看到的。另外，在第 11 章中，我们还将看到，当企业可以增加其资本存量时，而且其产出流由一个生产函数给出时，可能

存在其他方式，通过它增量投资的边际盈利能力变成价格的凸函数。然而，上面的直觉仍然同时在起作用。例如，在特定企业的不确定性条件下，等待的可能性降低了向下的风险，并且使利润流成为潜在的冲击变量的更凸的函数。然而，在第8章和第9章的大部分章节，我们将对这些额外的凸性置之不理。我们还将限定每家企业都是装备一种技术且只以固定规模经营单一离散项目的处理器，此外，我们还集中于前面所解释过的两种类型的不对称性。

8.2 加总的 uncertainty

253 尽管有潜在直觉的简单性，不确定性的一般模型也非常难以建立，正式的求解也非常困难。构造一些特殊的情形复制出一个一般模型中的复杂性，这些观点可能比较容易解释，这正是我们将要进行的。在这一节和下一节，我们仅仅考虑产业范围内的冲击 Y 。那么，在第8.4节，我们处理完全属于特定企业水平的不确定性。最后，在第8.5节，在一个简单但一般的模型中，实质上确实是取决于两种类型的不确定性的联合作用得到了解释。

当所有不确定性都是产业范围的时候，在一般需求模型式(8-1)中的乘数 X 为一常数，因此，我们可以刚好令它等于1。那么，产业的反需求曲线变为

$$P = YD(Q) \quad (8-2)$$

总冲击 Y 将服从几何布朗运动过程：

$$dY = \alpha Y dt + \sigma Y dz \quad (8-3)$$

在生产这一边，我们假定存在大量的风险中性的竞争性企业。每家企业都可以采用单一的不可逆投资，需要一定的沉没成本 I 。一旦这一投资被作出，它将永远在没有可变生产成本的条件下产出1单位的产出流。我们通过假定每单位的产出相对于产业的总产出 Q 非常小，因此，每家企业都是一个价格接受者，从而把这种企业包括进来。当有 Q 家企业活动时，短期均衡价格可以由上面的式(8-2)来决定。

正如我们在前面所讨论过的，这是第5章~第7章的最简单的延续以服务于我们当前的目的。在本章后面及第9章，我们引入各种一般化，其中每

家企业都有一些可变成本、短期产出波动、退出的可能性等，其中冲击以许多一般的方式来影响需求，而且产业内有一定的不完全竞争。

为设定竞争性产业均衡阶段，考虑通常的教科书中的静态模型。产业价格（单一的数字）是每家企业的参数，单个企业的最优产量的总和是对产业的供给函数所决定的价格所作出的反应。均衡价格由使产业的供给与需求相等的条件所决定。在不确定性的动态世界中，对应的均衡概念是一种理性预期。每家企业都将价格的全部随机过程看做是外生的。因此，我们从一个价格过程开始，令所有企业对它作出反应，然后找到在每一时刻出清市场的过程。这是把我们从一个随机过程带到另一个随机过程的函数或映射。如果得到跟我们开始时相同的价格过程，或者换句话说，如果得到这个映射的一个不动点，则我们拥有了一种均衡。

从总体来看，一个随机过程是一种复杂的数学目标（不可数的无限维函数空间中的一个向量），在全部的一般性上找到这样一个不动点实在是太困难了。幸运的是，利用非常简单的方法就可以找到我们的问题的解。

在无新进入发生的时间区间， Q 固定，因此 P 与 Y 成比例，而且由式 (8-3) 给出：

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (8-4)$$

一个潜在的进入者观察到这种过程，并且将高的价格解释为高水平需求的表面特征。直觉表明，应当存在较高的临界水平 \bar{P} ，如果达到临界值，则会有新的进入者。只要任何一家新企业进入， Q 上升，且价格沿适用于这一时期的需求曲线下降。这样，如果价格曾经跳跃到 \bar{P} ，它立即会回复到较低的水平。在技术性语言中，临界值 \bar{P} 变为价格过程的上反射壁。

当然，企业能理性地预测这一点。这样，从任何一家企业的观点来看，价格过程都是式 (8-4) 中的几何布朗运动的一种修正。只要 $P < \bar{P}$ ，那一过程就是有效的。然而，价格不能升得更高，在 \bar{P} 点有上反射壁。

在第5章~第7章，我们研究了当它面临几何布朗运动的价格过程时，垄断性企业的进入决策。现在我们看到，除了价格过程有一个由这家企业对其他企业的进入决策的理性预期所施加的价格上限 \bar{P} ，竞争性企业的进入决策是一个类似的问题。因此，我们必须在考虑了这种新的价格过程之后，重新考察一家企业的最优进入决策。

问题的解再次由临界值 P^* 来描述，这样，如果价格上升到 P^* ，我们

所关注的企业将选择进入。由于所有企业都是同一的，产业均衡需要这家企业的进入临界值等于它对其他所有企业的临界值的理性预期。因此，我们从一个试验的 \bar{P} 开始，并解出一家企业的决策问题从而找到其 P^* 。过程中的不动点，即 $P^* = \bar{P}$ 决定了产业的均衡。注意关于均衡价格过程是一种带有反射壁的几何布朗运动的直觉或猜测如何简化了这种计算。我们仅需考察并能解释把我们从一个数字带到一串不动点，而不是对一般随机过程的全部函数空间的映射。

8.2.1 活动企业的价值

计算均衡的第一步就是找到一家面临着人为设定的价格过程的已经建立的企业价值。由于未来价格路径依赖于当前价格水平 P ，因此，企业未来利润的期望现值是 P 的函数，我们用 $v(P)$ 来表示。如果价格过程因为反射壁而不是严格向上的，我们将有 $v(P) = \frac{P}{\delta}$ ，其中 $\delta = r - \alpha$ 是贴现率（在这种情形下是无风险利率）与 P 低于反射壁时的预期增长率之间的差额。^[5] 在点 \bar{P} 的反射壁减少了价格和利润中一些向上的潜力，因此，企业的价值实际上必须小于 $\frac{P}{\delta}$ 。我们将找到这种修正的公式。

从初始价格 $P < \bar{P}$ 开始，在充分小的时间区间 dt 内，价格过程几乎一定处在低于价格上限的位置。那么，我们可以进行通常的动态规划或者是或有债权分析，得到熟悉的微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 v''(P) - (r - \delta)Pv'(P) - rv(P) + P = 0 \quad (8-5)$$

该方程的一般解也应当是熟悉的：

$$v(P) = BP^{\beta_1} + \frac{P}{\delta} \quad (8-6)$$

式中， B 为需要确定的常数； β_1 为下面的基本二次式的正根：

$$Q \equiv \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0$$

实际上在一般条件 $r > 0$ 且 $\delta > 0$ 下， $\beta_1 > 1$ 。

这证实了上面所说明的直觉： $\frac{P}{\delta}$ 将是没有价格上限时的企业价值。那么 BP^{β_1} 一定是对价格上限的修正，因此， B 应当为负。这种说明也解释了为什么我们去掉了含有二次式的负根的那一项。如果当前价格 P 非常低，反

射壁 \bar{P} 不可能到达, 除非在非常遥远的未来。那么, 从反射壁中所引起的修正应当变得非常小。然而, 如果 $P \rightarrow 0$, P 的负幂会趋于无限, 因此, 那一项不会在解中出现。

为确定常数 B 的值, 我们考察上面的顶点。从一个非常接近于反射壁 \bar{P} 的点开始, 在下一小时问区间内价格几乎一定会下降。如果价值函数在这一点有负(正)的斜率, 在这一点一定能有套利利润。为将这种可能性剔除, 我们必须有

$$v'(\bar{P}) \equiv \beta_1 B \bar{P}^{\beta_1 - 1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (8-7)$$

这看起来就像是平滑粘贴条件, 但并不是任何最优化的结果。这种条件在扩散过程的任一反射壁都是成立的。^[6]

现在我们可以从式(8-7)中对 B 求解, 并得到

$$B = -\frac{\bar{P}^{1-\beta_1}}{\beta_1 \delta}$$

注意 $B < 0$ 。正如前面所解释的, 反射壁去掉了一些向上的价格潜力, 因此价值的修正是一种降低。将 B 代入式(8-6), 我们有

$$v(P) = \frac{P}{\delta} - \frac{1}{\delta \beta_1} P^{\beta_1} \bar{P}^{1-\beta_1} \quad (8-8)$$

8.2.2 均衡

找到产业均衡的快速方法是利用超过利润条件的动态零条件。在所有企业的公共进入临界值点 \bar{P} , 每家企业对进入或在外面无差别的, 因此, 在产业内的企业价值 $v(\bar{P})$ 必须等于其进入成本 I 。利用式(8-8), 可以给出:

$$\bar{P} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta I \quad (8-9)$$

更值得注意的是, 将上面的式子与第6章的式(6-9)进行比较, 这与单位规模的垄断性企业面临相同的需求过程中的进入价格是一样的。这两种情形在两个方面是有区别的。第6章中的垄断性企业不会受到进入的威胁, 因此, 在那里没有价格过程的上反射壁, 在这里却有这种情况。然而, 垄断性企业有一个正的等待期权价值, 而在本章中对于几个相同的潜在的任何一家都有零等待价值。很凑巧的是, 这两种差别实际上刚好相互抵消。

竞争性企业与垄断性企业进入临界值相同存在于一种非常特殊的例子。在第9章中，我们将发现这种类型的非常一般的结论——一家竞争性企业通过在有未来的竞争性进入时采取短视的态度，就像它将是进入这个产业的最后一家企业而行动，它可以作出正确的投资决策。这个结论也是依赖于这两种效应实质上类似的相互抵消，一种是在投资的价值方面；另一种是在等待的价值上。

257 为了更全面地理解这一点，我们必须深入到构造均衡的不动点过程的细节中去。考虑一家准备进入的企业，令 $f(P)$ 表示其进入期权的价值。正如在第6章中的情形，它采取如下形式：

$$f(P) = AP^{\beta_1}$$

式中， A 为需要确定的常数； β_1 同上。当价格为 P 时，如果企业决定进入，它支付投资成本 I ，作为回报它得到我们刚好定价为 $v(P)$ 的一项资产。最优进入临界值 P^* 满足两个熟悉的条件。第一为价值匹配条件：

$$f(P^*) = v(P^*) - I$$

第二为平滑粘贴条件：

$$f'(P^*) = v'(P^*)$$

利用函数 $f(P)$ 和 $v(P)$ 的函数形式，我们有

$$A(P^*)^{\beta_1} = B(P^*)^{\beta_1} + \frac{P^*}{\delta} - I$$

及

$$\beta_1 A(P^*)^{\beta_1-1} = \beta_1 B(P^*)^{\beta_1-1} + \frac{1}{\delta}$$

注意，我们已经在假定了向上的反射壁 \bar{P} 的条件下求出了常数 B ，但是当 B 仍然受到这种限制时，一些表达式包括着更丰富的内容。

这两个方程可以对临界值 P^* 和常数 A 求解，我们有

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta I \quad (8-10)$$

及

$$A = B + \frac{1}{\beta_1 \delta} (P^*)^{1-\beta_1} = \frac{1}{\beta_1 \delta} [(P^*)^{1-\beta_1} - \bar{P}^{1-\beta_1}] \quad (8-11)$$

观察到该解的两个特征：反射壁 \bar{P} 仅仅通过常数价值函数 $v(P)$ 中的 B 以及随着 B 的变化而——作出反应的最优价值函数 $f(P)$ 中的常数 A 来影响解，这对均衡有重要的意义。

首先,式(8-10)表明,进入临界值 P^* 独立于 B ,从而也独立于反射壁 P 。当然,为了使该解具有经济上的意义,反射壁必定不低于进入临界值。给定这些,反射壁的实际水平与企业的进入决策没有什么关系。利用常数 A 和 B 之间的联系可以理解这种显著的特征。上反射壁的任何变动对这两者有相同的影响,因此,使得对活动的企业的价值的影响等于潜在企业的等待期权的价值。大概而言,向上价格潜力的消减对立即进入的价值和等待更长时间的价值有相等的影响,因此,它不改变两者之间的均衡。^[7]

由于只要反射壁足够高,它就无关紧要,我们可以令它在不影响进入临界值的条件下趋于无限。这个极限对应于单位规模的垄断性企业面临相同的需求曲线但是没有面临其他企业的进入威胁从而在价格过程中没有向上的反射壁的决策。这解释了垄断性企业及竞争性产业情形下进入临界值的一致性。我们再一次提醒读者注意第9章出现的非常一般的结论。

为清楚地解决竞争性产业的均衡,我们令式(8-10)中 $P^* = \bar{P}$;这重新生成了式(8-9),它在前面是通过很快的直觉判断而得到的。另外,令式(8-11)中的 $P^* = \bar{P}$,给出 $A = 0$ 。因此,一家虚拟企业 $f(P)$ 的期权价值实际上就是零。这是我们在快速计算中所开始的那一点,现在我们已经利用了一种更严格的理论观点证明了它。

一家垄断性企业与一家竞争性企业之间的差别如图8-1所示。由于其他企业的进入,竞争性企业所面临的价格范围会受到限制;垄断性企业的价格不受限制。垄断性企业有正的等待价值,而在一定范围内的正的投资价值导致了它的最优进入临界值。一家竞争性企业往往拥有零等待价值,其投资的价值对其价格范围的大部分都是负的,而且仅仅在可能的价格范围内的最上方跃升为零。

通过将进入临界值与马歇尔的正常回报率联系起来就可以理解这些差别。在 $\alpha = 0$ 的情形下讨论它是最简单的,因此,该过程是没有趋势的,而且由于我们假定了风险中性的企业 $\delta = r$ 。现在单位规模的垄断性企业也面临着无趋势的价格过程;给定当前价格 P ,在未来任何一时间点的价格预期也是 P 。当 $P_0 = rI$ 时,如果这样的一家企业投资,它将以沉没成本为代价获得正常回报。然而,我们在第6章中看到,除非价格上升到 P^* ,即 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$,否则它不会投资。我们是在等待的期权价值下解释它的。

259

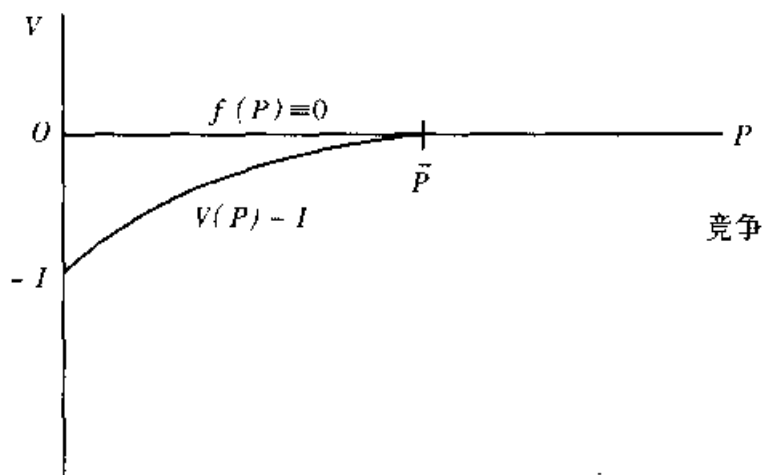
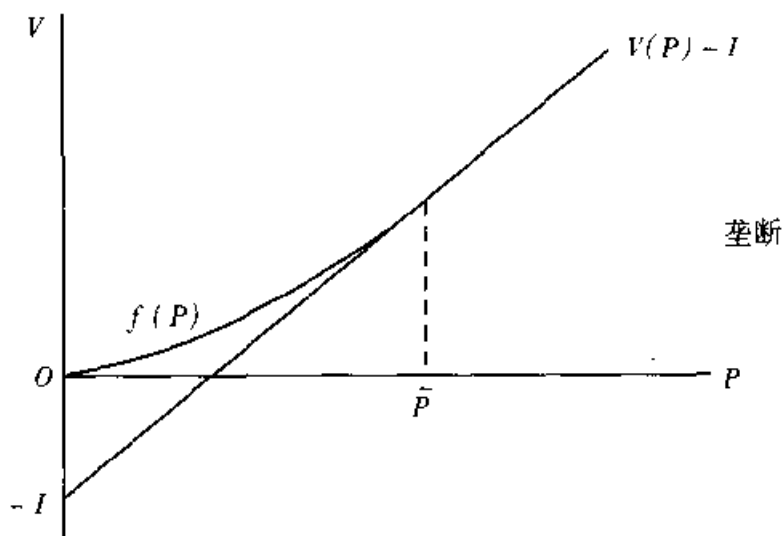


图8—1 垄断性企业与竞争性企业间进入决策的比较

260

现在我们看到，单位规模的竞争性企业也会等待，直到价格上升到相同的水平，即使其等待的期权价值为零。这种解释潜在于这两种情形下价格过程中的差别。竞争性企业的价格过程有上反射壁，它降低了未来价格和回报的预期。具体地，由于企业知道其他所有的企业面临相同的选择，而且会作出相同的决策，价格永远不会上升到超过它进入那一刻时盛行的价格水平；在它进入时的当前价格不是平均价格，而却是它所能得到的最好价格。当价格上升到 P_0 时，如果竞争型企业接受进入的规则，只有在进入发生时的这些时刻，它们才得到正常回报——在其他任何时刻，它们将获得较低的回报。那样，在时间上的平均回报将不足以调整初始投资开支。另外，

当进入临界值超过 P_0 时，每家企业将经历一些超正常回报的阶段以及一些低于正常回报的阶段。均衡 \bar{P} 实际上就是确保平均水平上的一种正常回报。

由于进入临界值妨碍了在相同的参数 α 、 σ 、 r 和 δ 条件下产业的均衡价格与垄断企业的临界值之间的一致性，我们没有必要对竞争性均衡情形下的数值计算详细说明；实际上，我们推荐读者参考第5章和第6章的这些内容。然而，一些总结性数值是有用的。表8—1显示了 β_1 和临界水平上当前投资的回报率：

$$\frac{\bar{P}}{I} = \frac{\beta_1 \delta}{\beta_1 - 1}$$

表 8—1 竞争性进入必需的回报

α	σ	β_1	\bar{P}/I
0	0	∞	0.050
0	0.2	2.16	0.093
0	0.4	1.44	0.165
0.03	0	1.67	0.050
0.03	0.2	1.35	0.077
0.03	0.4	1.16	0.143

对 $r=0.05$ ， $\alpha=0$ 和 0.03 ， $\sigma=0$ 、 0.2 和 0.4 。注意，当 $\alpha=\sigma=0$ 时，回报 $\frac{\bar{P}}{I}$ 等于马歇尔回报，即利率 $r=0.05$ 。当 $\alpha=0.03$ 且 $\sigma=0$ 时也是这种情形。（正如在第5章所讨论过的，当 α 为正数时，即使没有不确定性也会有等待的价值，而且实际上 $\frac{\beta_1}{\beta_1-1}=2.5$ ，但是由于 δ 随着 α 而上升，回报仍然等于 r 。）对于任何一个 α ，当 σ 上升到 0.2 和 0.4 时， β 下降，而且要求的回报 $\frac{\bar{P}}{I}$ 大约要上涨到其马歇尔价格的 $2\sim 3$ 倍。因此，通过第5章和第6章的讨论发现，企业的期权价值与教科书中的现值方法有很大的不同；对竞争性产业也有类似的结论，其均衡与大多数初级及中级微观经济学教科书中的马歇尔理论所提供的图形有很大的不同。

8.3 退出条件下的产业均衡

前面的基本模型基本上沿袭了第 6 章中垄断性企业的模型，并给出了与加总的确定性条件下竞争性产业中非常相似的结论。这个模型的大部分推广都留在了第 9 章。在本章中，我们仅仅采用了非常自然的一种拟合。我们引入了企业退出，构建了一个与第 7 章中的垄断性企业的进入与退出决策非常相似的模型，而且关于加总的确定性条件下竞争性产业的结论几乎是相同的。

要使退出成为一种有意义的期权，我们需要两个条件：(1) 经营的利润流必须有时为负，我们通过对每一单位规模的企业引入一个可变成本，使这成为可能；(2) 没有成本处罚的临时性经营终止和恢复也必须排除，我们这样做了。我们还引入了退出的一次性成本 E 。跟以往一样，这可以包括任何法律上要求的解雇费或土地恢复成本，它也可以为负（但是在数量上小于成本 I ），代表进入成本中的任何非沉没部分。

现在的直觉是，其他企业的进入将复制价格过程中的一个下限——较低的反射壁，就像它们的进入所复制的价格过程的上限——较高的反射壁。每家企业都对它所面临的价格过程有理性预期，即这两个反射壁之间的几何布朗运动。企业自身的进入和退出决策将再次采取价格的较高临界与较低临界。两个反射壁的均衡水平可以从不动点的论证中得到：每家企业的临界值将等于由产业内所有企业的行为所复制的壁垒。

262

这种计算比前面进入完全不可逆的情形要复杂得多，因为我们不能先找到活动企业的价值，然后再找到不活动企业的价值。一家活动企业的选择包括退出期权，因此，这两个值必须同时找到。

一家活动企业面临着式 (8-4) 中带有两个反射壁 \bar{P} 和 \underline{P} 的价格过程。令 $v_1(P)$ 表示当前价格位于区间 $[\underline{P}, \bar{P}]$ 时企业的价值。它满足我们熟悉的微分方程：

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 v_1''(P) + (r - \delta) P v_1'(P) - r v_1(P) + P - C = 0 \quad (8-12)$$

其解的形式与第 7 章中的非常相似：

$$v_1(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \quad (8-13)$$

最后两项给出了对应于没有反射壁时价格过程的利润的预期现值。小小的

新变化是，由于方程式只有在价格的有限区间 (\underline{P}, \bar{P}) 内才成立，我们不能利用当 P 趋于零或无穷时的极限以便消去其他项中的任何一项。第一项，对应于方程的正根 β_1 ，表示由于价格过程中的上限所引起的企业价值减少。第二项，对应于方程的负根 β_2 ，表示企业退出期权的价值。在较高的反射壁，我们有套利条件（与前面仅有进入的情形下的式（8-7）类似）：

$$v'_1(\bar{P}) = \beta_1 B_1 \bar{P}^{\beta_1 - 1} + \beta_2 B_2 \bar{P}^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (8-14)$$

用 $v_0(P)$ 表示不活动企业的价值，那么，类似的论据给出：

$$v_0(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (8-15)$$

式中，第一项为活动期权的价值；第二项为由价格过程中下限所导致的企业价值上涨。在较低的反射壁，我们有

$$v'_0(\underline{P}) = \beta_1 A_1 \underline{P}^{\beta_1 - 1} + \beta_2 A_2 \underline{P}^{\beta_2 - 1} = 0 \quad (8-16)$$

现在假定进入临界值为 P_H ，退出临界值为 P_L 。这两个值满足通常的价值匹配和平滑粘贴条件：

$$v_0(P_H) = v_1(P_H) - I \quad (8-17)$$

$$v_1(P_L) = v_0(P_L) - E \quad (8-18)$$

$$v'_0(P_H) = v'_1(P_H) \quad (8-19)$$

$$v'_1(P_L) = v'_0(P_L) \quad (8-20)$$

对于给定的反射壁 \underline{P} 和 \bar{P} ，这四个方程与在两个反射壁的条件一起，可以 263 求出常数 A_1, A_2, B_1, B_2 和临界值 P_H, P_L 。最后，不动点所要求的 $P_H = \bar{P}, P_L = \underline{P}$ 完全决定了均衡。

让我们从找到临界值开始。注意，价值匹配和平滑粘贴的四个条件可以记作：

$$(B_1 - A_1)P_H^{\beta_1} + (B_2 - A_2)P_H^{\beta_2} + \frac{P_H}{\delta} - \frac{C}{r} = I \quad (8-21)$$

$$\beta_1(B_1 - A_1)P_H^{\beta_1 - 1} + \beta_2(B_2 - A_2)P_H^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (8-22)$$

$$(B_1 - A_1)P_L^{\beta_1} + (B_2 - A_2)P_L^{\beta_2} + \frac{P_L}{\delta} - \frac{C}{r} = -E \quad (8-23)$$

$$\beta_1(B_1 - A_1)P_L^{\beta_1 - 1} + \beta_2(B_2 - A_2)P_L^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} = 0 \quad (8-24)$$

注意到这是关于四个未知数的四个方程组，即临界值 P_H, P_L 和“复

合”常数 $(B_1 - A_1)$, $(B_2 - A_2)$ 。在这种形式下, 方程组实际上与第 7 章中界定了一家垄断性企业的进入与退出临界值的方程式 (8-9) 和方程式 (8-10) 的系统是一样的。因此, 现在的系统复制了独立于反射壁 \underline{P} 和 \bar{P} 的相同的临界值。与前面完全不可逆进入时的模型一样, 反射壁不会影响临界值。当然, 为了使期权的执行有意义, 反射壁必须足够宽从而复制临界值, 即我们需要 $\underline{P} \leq P_L$ 及 $P_H \leq \bar{P}$, 否则反射壁的实际位置就是毫无意义的。其理由是, 实际的位置相等地影响期权价值的每对常数 A_1, B_1 与 A_2, B_2 。因此, 支配立即行动与等待进入或退出之间的关系的关系的差额 $(B_1 - A_1)$ 与 $(B_2 - A_2)$ 是不变化的。

最后再回到均衡。关于均衡, 我们简单地设定前面的式 (8-21) ~ 式 (8-24) 的方程组中 $P = P_H$ 及 $P = P_L$ 。这与前面第 7 章中方程式 (7-9) ~ 式 (7-12), 即垄断性企业的相应系统是一样的, 我们不必重复那里已经做过的数值计算。在那里关注惯性区间的数量级的解释仍然适用, 竞争性均衡价格过程的上限和下限分别大大不同于马歇尔的长期平均成本及平均可变成本, 而且相互之间隔开得很远。我们将立即提供这一点的一个生动的数值例子。

我们仍然需要分别找到活动企业和空闲企业的价值。为做到这一点, 我们通过两个平滑粘贴条件式 (8-19) 和式 (8-20), 将在反射壁的两个方程式 (8-14) 和式 (8-16) 结合起来, 可以得到下式:

$$\begin{aligned} \beta_1 A_1 P^{\beta_1 - 1} + \beta_2 A_2 \bar{P}^{\beta_2 - 1} &= 0 \\ \beta_1 A_1 \underline{P}^{\beta_1 - 1} + \beta_2 A_2 \underline{P}^{\beta_2 - 1} &= 0 \end{aligned}$$

264 把这两个公式看做关于 A_1 和 A_2 的一对线性方程。系数矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \bar{P}^{\beta_1 - 1} & \beta_2 \bar{P}^{\beta_2 - 1} \\ \beta_1 \underline{P}^{\beta_1 - 1} & \beta_2 \underline{P}^{\beta_2 - 1} \end{pmatrix}$$

它们是非退化的, 只要 $P > \underline{P}$, 那么惟一解就是 $A_1 = A_2 = 0$ 。因此, 空闲企业的价值实际上就是零, 正好是它应当是的那样, 考虑到竞争性条件和同一的企业, 这样就完成了解。

我们现在回到第 7 章中的铜业的进入与退出的例子, 重新陈述一些数值结果以便给读者提供其中所包含的数量级的一种更好的了解。事实上, 在解释拥有投资的垄断权力的企业的情形中, 产业数据的使用就是第 7 章中的某

种不规则（不正常）；现在相同的数据在产业均衡的背景下有一种更令人满意的解释。在研究的主要情形下，我们假定一个平均规模的开采、熔炼及精炼的矿井（每年生产1 000万磅的铜）的建造成本为 $I = 2\,000$ 万美元，放弃矿井时的场地恢复成本为 $F = 200$ 万美元。可变成本为 $C = 0.80$ 美元/磅，但允许它在这个数值周围变动。价格变动参数 σ 为每年0.2，而且也允许它在一定范围内变动。无风险利率 $r = 0.04$ ，而回报不足，为 $\delta = 0.04$ 。在这些数值条件下，马歇尔进入临界价格为0.88美元，而退出临界价格为0.792美元。然而如表8—2所示，确切的进入与退出临界值却分别是1.35美元和0.55美元。这个表还显示出对 C 和 σ 的不同值条件下马歇尔临界值与实际临界值。

表 8—2 铜冶炼业的进入与退出临界值

C	σ	上临界		下临界	
		封存	修正	封存	修正
0.8	0.1	0.88	1.12	0.792	0.63
0.8	0.2	0.88	1.35	0.792	0.55
0.8	0.4	0.88	1.75	0.792	0.45
0.4	0.2	0.48	0.80	0.392	0.26
0.6	0.2	0.68	1.06	0.592	0.40
0.8	0.2	0.88	1.35	0.792	0.55
1.0	0.2	1.08	1.60	0.992	0.70

注：有关参数见正文。

图8—2和图8—3显示出，对于 C 为0.80美元/磅及 $\sigma = 0.2$ 的中心情形来讲铜业价格的样本路径。观察到这个价格在上和下的反射壁（即进入临界值1.35美元和退出临界值0.55美元）之间是以几何布朗运动而波动的，这两个临界值如图中水平线所示。马歇尔进入与退出临界值0.88美元和0.79美元也由图中水平线显示出来。（在图中，时间以年来测量，为了复制样本路径的目的，每年都被分成50等分。）图8—2显示出一种“幸运”的（从铜生产者的角度来看）样本路径，其中价格位于其区间的上面的时间要长一些，而图8—3显示出一种“不幸运”的现实。

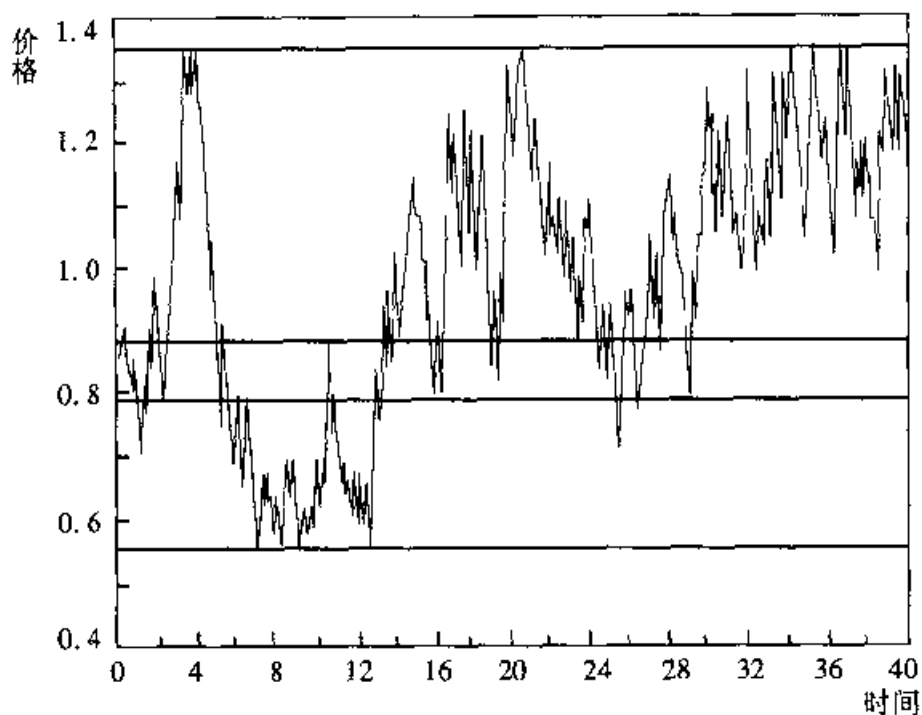


图 8—2 铜价的样本路径

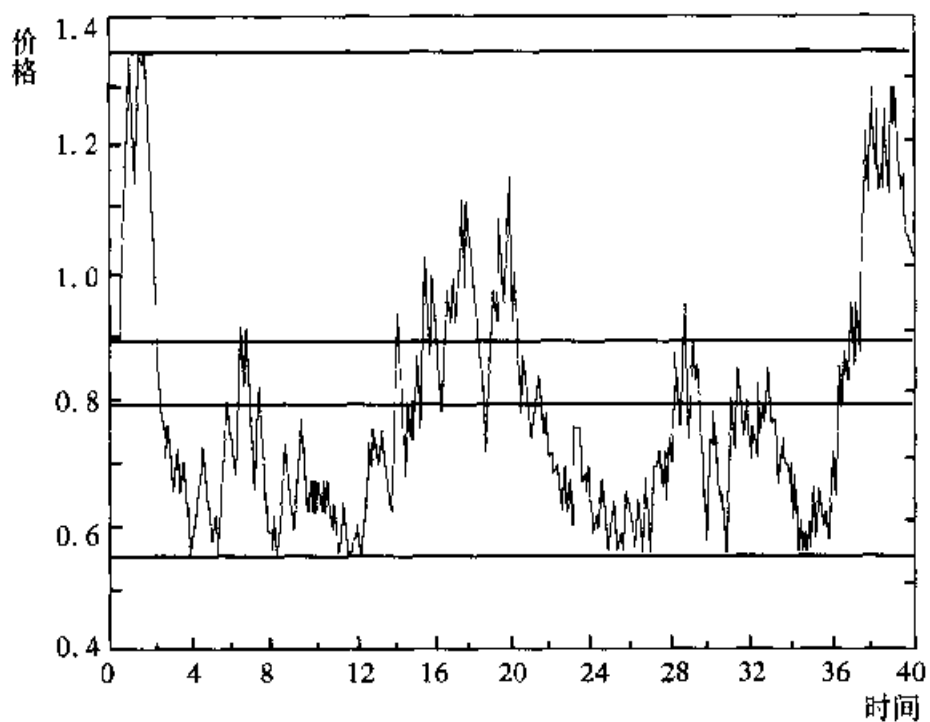


图 8—3 铜价的另一样本路径

这些图显示出价格的特殊实现形式，但是我们可以思考一下长期看来价格在其区间内不同区域的时间比例是多少。通过计算价格的长期平稳分

布,我们就可以回答这个问题。观察到 P 在其反射壁 P 和 \bar{P} 之间服从式 (8-4) 中的几何布朗运动,我们从这里开始。因此,利用伊藤引理,我们知道 $p \equiv \log P$ 在相应的反射壁 $\underline{p} = \log P$ 及 $\bar{p} = \log \bar{P}$ 之间服从漂移参数为 $\alpha' = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$ 、方差参数为 σ 的简单几何布朗运动。现在我们可以利用第 3.5 节中的结论来找到 p 的长期分布。它是一个指数分布,其密度为 $Ke^{\gamma x}$, 其中 $\gamma = \frac{2\alpha'}{\sigma^2}$, 常数 K 是为了得到一个总体的概率而选择的。这样一来,很容易计算出 p 在区间 (\underline{p}, \bar{p}) 的不同子集上的时间百分比。然后,结论可以转换为对应于 P 的区间。

对于基本情形下的参数值,我们发现,一般来说,价格在 0.88 美元的马歇尔上限与 1.35 美元的进入临界值之间保持 58.5% 的时间。这样超过一半的时间,铜生产者会获得,这在传统的微观经济学分析中我们称之为超过正常的利润。价格在两个马歇尔临界值 0.79 美元~0.88 美元之间大约为 11.3% 的时间(在这种情形下,我们可以认为,企业获得正利润,但是低于正常利润)。最后,价格位于退出临界值 0.55 美元及马歇尔临界值 0.79 美元之间,因此,企业会遭受损失,大约有 30.2% 的时间。

这些图明显表明,在不确定性条件下竞争性产业的动态均衡会与教科书中的介绍有很大差异。我们预期,根据马歇尔的理论,铜业在差不多 90% 的时间里根本就不应该存在。价格将位于长期平均成本之上而不会吸引新进入者,或者位于平均可变成本之下而不会诱发退出。对于有人想利用教科书中马歇尔的观点来解释这种发现的话,没有进入的超额利润意味着进入壁垒,而遭受损失的企业的持续经营意味着残酷的竞争或掠夺式竞争。我们的理论说明,当竞争过程在随机动态的背景下适当地解释时,即便是涵盖了长期的伸展或产业的大部分时间,这种事件也可以与完全竞争保持一致。在第 9 章我们将讨论这种理论的政策含义。

8.4 特定企业的不确定性

这里,我们处理两个极端的例子,其中需求曲线式 (8-1) 中的所有不确定性都完全是特定企业的。现在产业范围内的冲击 Y 设定为等于 1, 这

样任何一家企业的需求曲线变为

$$P = XD(Q) \quad (8-25)$$

回顾我们在第8章引言中所列出的关于特定企业不确定性的直觉。当一家企业得到对其盈利能力有利的冲击时，它知道一般来讲这种幸运并不会由它的竞争者所分享。因此，它不需要立即投资，它有一定的回旋余地来等待并观察这种好运是否是临时性的。我们的第一个模型旨在使这种观念更精确。

只有当每家企业都有能力在观察到其潜在盈利能力的当前水平上作出决策时，等待的机会才是相关的。为了从最纯粹的角度来把握这种观点，人们可以界定一种产业，它由数量固定的潜在企业所组成，其中每家都可以持续地观察到其企业特有的冲击，然后再决定是否投资。然而，这样做不能把握竞争性均衡的另一种基本特征，即自由进入。因此，我们需要作出决策的另一种优先阶段，即变成这些潜在企业中的一家，它观察到了它们当前利润的潜力。这种决策必须在不知道特定冲击的条件下作出。

因此，我们构建了下面这样一个两阶段模型。通过支付进入成本 R ，任何一家企业都可以获得来自已知分布的需求冲击 X 的一个初始拉力。之后，这个变量将服从特定企业的几何布朗运动过程，或者在企业之间是相互独立的。每家企业可以通过支付更多的沉没投资成本 I 来开始实际的经营。

268 一个例子有助于牢记这种观点。考虑一家制药公司，它可以通过承受研究成本 R 来开发一种新药，这产生了对其疗效和盈利能力的初始估计。企业对该药申请了专利，但是除非利润估计得充分高，否则它不会产生引起额外的投资开支 I ，这是开始生产所必需的。随着时间的推移，当公司找到该药的新用户时，利润估计可能会提高；或者当其他企业发现了治疗相同病症的其他药物时，利润估计可能会下降。

我们从长期来刻画这样一种产业内的竞争性均衡。存在许多竞争性企业，它们面临着独立的冲击，而且在企业水平上存在着大量的不确定性及灵活性。然而，不同企业的冲击是独立的，而且大数定律的作用确保了产业的加总是非随机的。^[8] 这样产出的非随机性总量可以由企业生产出来，这些企业随着时间进行变化，但是总量仍然是平衡的。然而，企业水平的不确定性条件给产业均衡留下了记号：活动企业的分布参数，即非随机的产业的数量和价格固定时的实际价值，确实依赖于每家企业所面临的不确定性

程度。

关于相对平衡的产业范围内的条件隐藏了许多企业水平上的不确定性的观点，在近来的实证研究中得到了重视。戴维斯和霍尔蒂万格（Davis and Haltiwanger, 1990）以及其他学者已经令人注目地证明了在美国经济中就业的微小的净变化背后大量的总雇用与解雇。为了这种应用而构造的模型包括了太多的特定背景以便使一般的直觉突出出来。我们的简单模型有助于读者对这种现象建立起更好的概念性理解及更一般的直觉。

我们从指定 X 中的不确定性特征开始，从而适应企业的两阶段决策。新的进入者获得来自于已知的分布的初始拉力 X 。之后，其拉力 X 服从几何布朗运动：

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dz \quad (8-26)$$

我们已经把 X 解释为一种特殊的需求冲击（口味改变的随机波动会引起产业内微小的多样性变化的价格贴息的提高）。最终的影响是对盈利能力的冲击，而且我们也可以把 X 看做技术性冲击，以一种退化的形式出现在企业利润流的公式中，在同时发生的可变选择已经被最优地选择出来以后，如第 6.3 节的讨论。

在产业中存在自由进入，而且任何一家企业在支付 R 后都得到初始拉力。然而，并没有要求一定要立即开始生产。更多的沉没成本 I 必须承受这一过程，而在作出不可逆的承诺之前，企业可以等待以便观察这一过程是否以一种更有利的水平变化。 269

我们将刻画这样一种产业的长期随机均衡。事实上，将要求这样一种均衡，然后内生性决定构成均衡的各个平稳数量（价格、企业数量等）。假定 N 为新进入者的非随机流量，他们支付费用 R 并学习初始的 X ，然后他们的冲击将变成独立且随机的。一个非随机的流量 M 将达到行动的决策。我们还希望保持活动企业的总数量 Q 为一常数。为实现这一点，假定所有企业，无论是等待的还是活动的，面临一个参数为 λ 的外生性泊松死亡过程，这一过程在各个企业间也是独立的。那么，在一个平稳均衡中， M 必须等于 λQ 。

所有的不确定性都是特殊的，我们指定每家企业都是风险中性的，并让它们的决策最大化其预期净价值，令 r 表示贴现未来利润流量的无风险利率。

8.4.1 行动决策

在活动企业很多且保持为常数 Q 的长期平稳均衡中，每个新的进入或等待企业都把这个 Q 看做是给定的，其利润流为 $XD(Q)$ 。它连续地观察 X ，并决定何时支付其投资成本 I 以变成一个活动的生产者。这实际上与我们在第 6.1 节所研究过的基本的单个企业的模型是一样的。式 (6-9) 给我们提供了引发投资的临界价格 P^* 。在本章的记号中，它变成了企业的冲击中的临界值 X^* ，而且约束方程变为

$$X^* D(Q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} (r + \lambda - \alpha) I \quad (8-27)$$

式中， β_1 为下面的基本二次式的正根：

$$Q \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 \beta (\beta - 1) + \alpha \beta - (r + \lambda) = 0$$

270 确保预期利润收敛的条件是 $r + \gamma > \alpha$ ；注意，泊松死亡概率在得到收敛中起到了贴现率的作用。正如我们在第 3.5 节及第 4.1.9 中对泊松过程的讨论中所看到的一样。假定收敛的条件满足，有 $\beta_1 > 1$ ，与第 5 章和第 6 章中的模型一样。

本章引言中对直觉的讨论告诉我们式 (8-27) 实际上就是第 5 章和第 6 章垄断性企业进入决策的相应公式的类推的理由。当不确定性是特定企业的时候，一家获得有利的 X 的企业确实对其竞争者而言有利可图。有利的 X 是属于这家企业的；如果它不立即投资，对手不可能“偷走”其 X 并跳进来。因此，等待的正价值确实存在，而企业的最优决策显示出我们所熟悉的惯性。

当然，这只是对产业均衡的不完全考虑，除非我们证明 Q 可以与前面的叙述一致的方式来确定。在这个模型的建立中还需要更多的步骤。

8.4.2 进入决策

当 X^* 如上述所确定时，我们可以找到其当前的 X 处于一种有 Q 家活动企业的产业中的潜在企业的价值：

$$V(X, Q) = \begin{cases} A(Q) X^{\beta_1}, & X \leq X^* \\ \frac{XD(Q)}{r + \lambda - \alpha} - I, & X \geq X^* \end{cases} \quad (8-28)$$

这在第 5 章～第 7 章也是非常熟悉的。上面的公式是等待企业的期权价值，而下面的公式是潜在企业从立即行动中所得到的利润减去行动的成本后的预

期现值。当然，下面的公式适用于这样的区域，其中立即行动是最优的，而上面的公式则适用于这样的区域，其中等待是最优的。实际上， X^* 就是由这两个表达式及价值匹配和平滑粘贴来确定的。这样也会产生：

$$A(Q) = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}}{\beta_1^{\beta_1}} \frac{1}{(r + \lambda - \alpha)^\beta} D(Q)^{\beta_1} I^{1 - \beta_1} \quad (8-29)$$

较高的 Q 降低了 $D(Q)$ ，因而由式 (8-29) 降低了 $A(Q)$ ，而由式 (8-27) 提高了 X^* 。最后，由式 (8-28)，我们看到较高的 Q 降低了整体的价值函数 $V(X)$ 。图 8-4 显示了典型的价值函数及其随 Q 的变化的移动。直觉是，如果在产业内存在更多的活动企业，任何一家新进入企业观察到更小的利润流前景，因此，在把自己变成活动企业时会要求更高的特定企业的利润冲击。

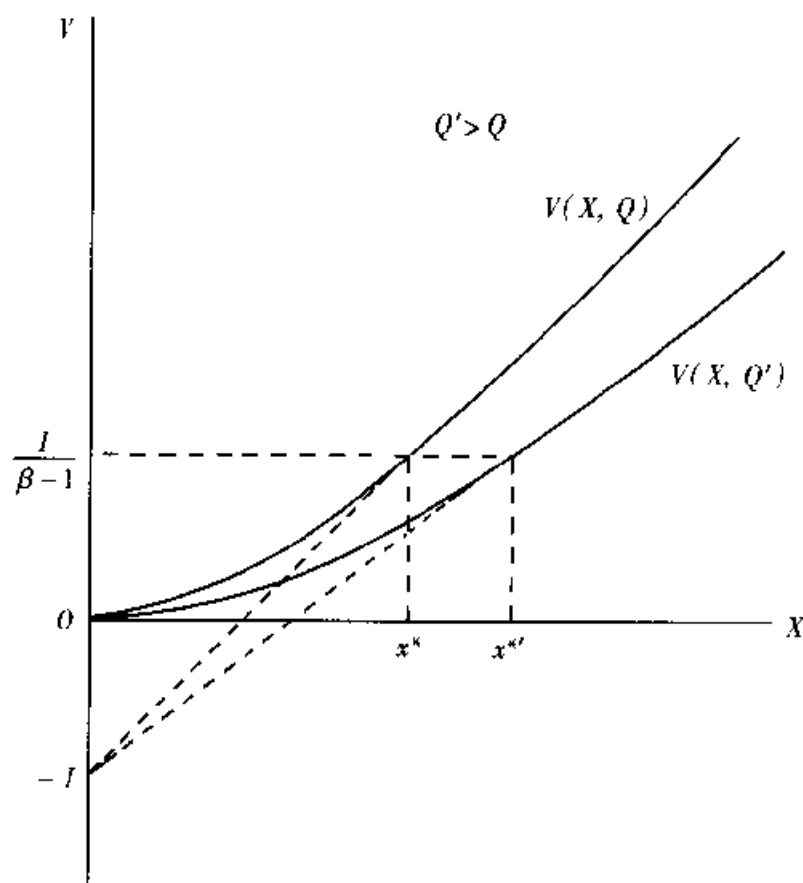


图 8-4 企业的价值函数

那么，一家潜在的进入企业可以计算出其预期回报 $E_X[V(X, Q)]$ ，以已知的初始拉力 X 的分布为条件。自由进入者要确保

$$E_X[V(X, Q)] = R \quad (8-30)$$

式中, R 为初始的进入成本。我们刚刚看到, 方程式左边项对 Q 是单调的, 因此, 这个方程式决定了均衡时的 Q 。

作为一个例子, 假定初始拉力的分布在区间 $(0, \hat{X})$ 内为单一分布。如果活动的临界值 X^* 被发现是大于 \hat{X} 的, 则期望净值为零的条件式(8-30)就是

$$\frac{A(Q)\hat{X}^{\beta_1}}{1+\beta_1} = R$$

例如, 在简单情形下, 如果 $D(Q)$ 为等弹性的, 这就接受了 Q 的一种明确的 (但在数学上是杂乱的) 解。如果 $X^* < \hat{X}$, 我们得到

$$\frac{A(Q)}{1+\beta_1}(X^*)^{\beta_1+1} + \frac{D(Q)}{2(r+\lambda-\alpha)}[\hat{X}^2 - (X^*)^2] - I(\hat{X} - X^*) = R\hat{X}$$

这必须通过数值方法来求解。

272

即使到现在, 证明还没有完成。活动企业的数量 Q 随着初始进入决策的一个复杂的链条而上升, 先是独立于企业冲击变量 X 的随机波动, 接着是独立于随机死亡的进入决策。我们必须证明, 这些相互作用如何在一种一致的方式下生产出产业的均衡 Q 。

8.4.3 企业的分布

考虑任何一家已经支付了进入成本 R 的企业的实际寿命历程, 它来自其已知分布的 X 的一个随机性冲击开始。如果初始的 X 超过了临界值 X^* , 企业支付投资成本 I 并立即变成一家活动的生产者。否则它让 X 变化, 而只有当达到 X^* 时才开始活动。通过这个过程, 企业面临一个常数但是外生的死亡概率 λ 。

这种新进入者以速度 N 到达。它们中每一个的完全随机动态 (它在时间 t 到达并占有位置 X 的概率) 可以利用柯尔莫哥洛夫方程来考察, 这是我们在第 3 章的附录中所讨论的。这里我们的目的受到更多的限制。对于产业均衡, 只有处于各种不同状态的企业的总数量会有影响, 即有多少是活动的, 有多少是随着 X 值的变化在等待的。因此, 大数定律允许我们将注意力集中在长期平稳均衡中。这意味着, 退出的泊松死亡比例以及活动的比例在时间上都是常数。与此类似, X 的当前水平不同的企业的数量在时间上也是常数。当然, 占有这些位置的企业的实际特性保持变动, 但是为了我们

的目的,任何企业都与其他企业一样拥有相同的 X 。

计算企业的长期分布的方法与第3.5节的方法相同,但必须包括两个特征,即新进入者与泊松死亡。以对数形式进行计算更方便,即 $x = \log X$ 。令 $g(x)$ 表示初始拉力 x 的密度函数, $G(x)$ 为对应的累积分布。注意到 x 的范围向左拓展为 $-\infty$, 令 $x^* = \log X^*$ 。对于新进入的企业, $N[1 - G(x^*)]$ 立即得到足够大的拉力来调整行动。其他企业进入不是立即投资从而没有完成第二个步骤的企业集合,而是等到达到活动的临界值。

对于这个团体来讲, x 持续变化。对式(8-26)利用伊藤引理,我们看到 x 服从布朗运动:

$$dx = vdt + \sigma dz \quad (8-31)$$

式中, $v = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$ 。另外,这两个团体都承受外生的参数为 λ 的泊松死亡过程。

现在从等待企业开始,其分布在区间 $(-\infty, x^*)$ 内。令 $N\phi(x)$ 表示这种企业在位置 x 的密度;乘数 N 仅仅通过进入速度来使之加倍并导致关于 $\phi(x)$ 的更简单的方程。为了让密度在时间上保持为常数,企业到达 x 的速度(已经受到来自下面的正向冲击或来自上面的负向冲击)必须等于企业在 x 离开的速度(受到布朗运动过程或泊松死亡过程的冲击)。我们以更精确的方式来解释关于企业的“平衡流量”这个方程。

为了这种目的,我们利用布朗运动的二项近似,这在第3.2.2中已经证明是非常有用的。将时间分成短的时间区间 dt , 将 x 分成短的片断,每个长度为 dh 。在每个时间区间内的企业中有 $d\lambda dt$ 家企业将死亡。对于剩余企业, p 部分将会从一个片断移动到右边, q 部分会移动到左边,其中

$$p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{\sigma} \sqrt{dt} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{\sigma} \sqrt{dt} \right)$$

现在考虑以 x 为中心的片断。它从 $N\phi(x)dh$ 家出发,在下一时间段 dt 内,所有这些都会因为泊松冲击或布朗运动而离开。新进入者,以及从左边移动到右边的企业会移动进来以代替它们。图8-5用图表显示了这些流量。

为保持平衡,我们要求

$$\begin{aligned} N\phi(x)dh = Ndtg(x)dh + p(1 - \lambda dt)N\phi(x - dh)dh \\ + q(1 - \lambda dt)N\phi(x + dh)dh \end{aligned} \quad (8-32)$$

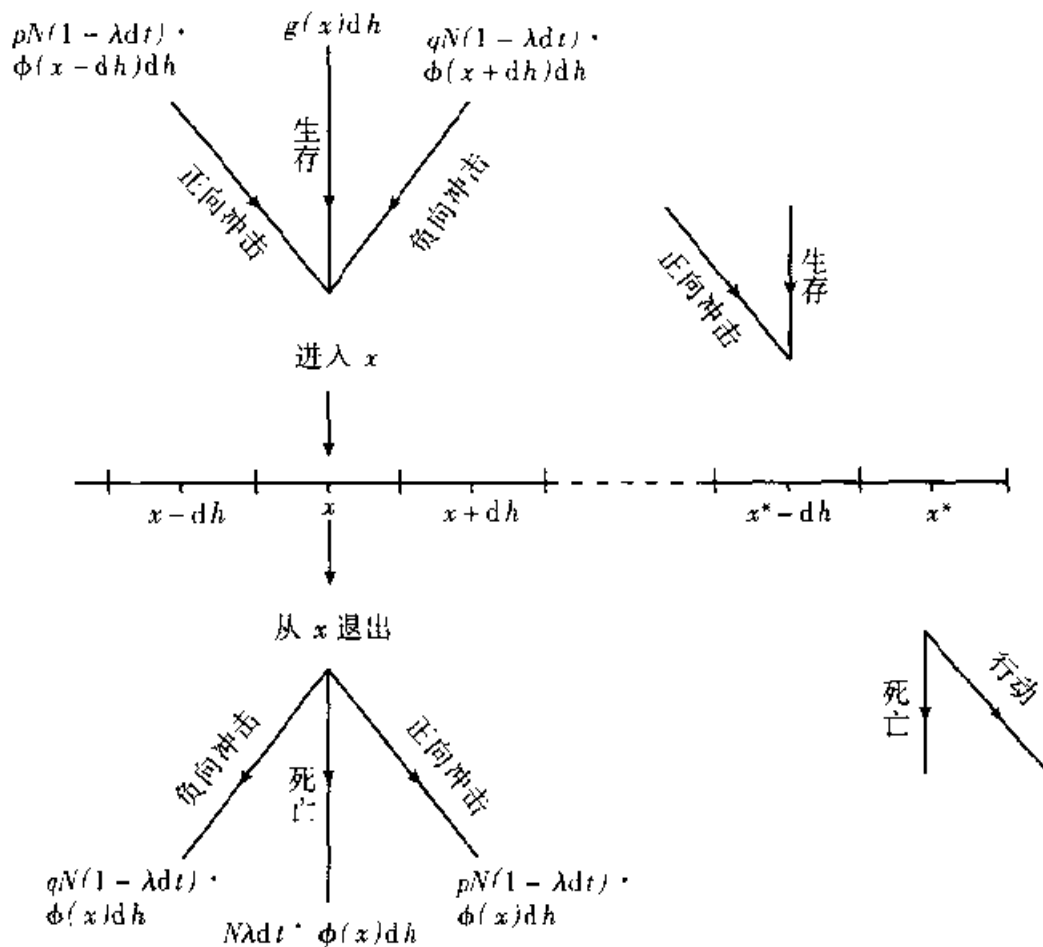


图 8—5 等待企业的进入、转移与退出

将同类项 Ndh 消去，并利用泰勒定理展开右边的 $\phi(x \pm dh)$ ，然后简化，得到微分方程：

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \phi''(x) - v\phi'(x) - \lambda\phi(x) + g(x) = 0 \quad (8-33)$$

274 这个方程同第 5 章～第 7 章的方程仅有微小的差别，因为它是一个简单的而不是几何布朗运动。然而，求解的方法是非常类似的。很容易证明一般解有以下形式：

$$\phi(x) = C_1 \exp[\gamma_1 x] + C_2 \exp[\gamma_2 x] + \phi_0(x)$$

式中最后一项为全部方程的一个特殊解，前两项来自相似部分的一般解。常数 C_1 和 C_2 仍然需要确定，而 γ_1 和 γ_2 为下列二次式的两个根：

$$Q \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 \gamma^2 - v\gamma - \lambda = 0$$

因此，其中一个为正，一个为负。

对等待企业总数的考虑可以找到确定常数 C_1 和 C_2 的第一个条件, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx$$

必须为有限的。这有助于排除相同部分的解中的负根, 因为当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 负的指数会趋于无穷。

关于第二个条件, 观察到临界值达到 x^* 的企业会变成活动的, 而且会失去这种分布。考虑位于 x^* 左边的 x 空间中一个片断, 以 $x = x^* - dh$ 为中心。对这一片断, 我们必须修正前面方程式 (8-32) 中的平衡。它不能从右边得到任何的进来者, 因此

$$N\phi(x)dh = Ndtg(x)dh + p(1 - \lambda dt)N\phi(x - dh)dh$$

类似的简化现在给出 $\phi(x) = 0$, 令 $dh \rightarrow 0$, 我们得到条件 $\phi(x^*) = 0$ 。

我们还可以计算出等待企业的临界值达到 x^* 因而变成活动企业的比例, 这些正好是位于 x^* 左边片断的 $N\phi(x - dh)dh$ 家企业中 $p(1 - \lambda dt)$ 部分。再次利用泰勒定理, 这个表达式中的主要的项为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N[\phi(x^*) - \phi'(x^*)dh]dh &= -\frac{1}{2}N\phi'(x^*)(dh)^2 \\ &= -\frac{1}{2}N\phi'(x^*)\sigma^2 dt \end{aligned}$$

由于这些企业在时间段 dt 内是活动的, 活动的比例为 $-\frac{1}{2}\sigma^2 N\phi'(x^*)$ 。

我们对一种服从解析解的情形说明这种计算。假定 X 的分布在区间 $(0, \hat{x})$ 内是单一分布, 那么 $x = \log X$ 在 $(-\infty, \hat{x})$ 上有指数分布, 其中 $\hat{x} = \log \hat{X}$ 。这样

$$G(x) = g(x) = \exp(x - \hat{x})$$

我们简单地假设问题中的其他参数是这样的, 结果行动的临界值 $x^* < \hat{x}$, 其他的情形留给读者, 它们更简单, 因为没有一家进入的企业会立即行动。

很容易证明式 (8-33) 的一个详细积分为

$$\phi_0(x) = \frac{e^{x - \hat{x}}}{\lambda + \nu - \frac{1}{2}\sigma^2}$$

为使上面的公式具有经济意义, 公式中的分母必须为正。这正好说明, 二次式在 $\gamma = 1$ 的 Q 值为负。那么, 正根 γ_1 一定大于 1。我们假定这一点, 为

了印刷上的方便,把这个根记作 γ , 则式 (8-33) 的一般解为:

$$\phi(x) = Ce^{\gamma x} + \phi_0(x)$$

276 常数 C 可以从条件 $\phi(x^*) = 0$ 中得到确定。这样产生了

$$\phi(x) = \frac{1}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2} [e^{\gamma x} - e^{\gamma(x-x^*)} e^{\gamma x^*}] \quad (8-34)$$

从这里我们可以计算出等待企业的数量。它们的总数为

$$M \equiv N \int_{-\infty}^{x^*} \phi(x) dx = \frac{N}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} e^{\gamma x^*}$$

行动的比率为

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 N \phi'(x^*) = N \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(\gamma - 1)}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2} e^{\gamma x^*}$$

类似地,可以找到活动企业的分布。这些将在整个区间 $x \in (-\infty, \infty)$ 内展开,因为一些企业可能已经行动了,并且其 X 是下降的。通过部分新进入流量发现它们的 X 高于 x^* 从而立即行动,以及通过在 x^* 行动的流量,它们也可以得到证明。它们的数量会由泊松死亡流量而减少。

事实上,要找到产业的均衡点,我们仅仅需要活动企业的总数量,而不是它们的 X 的分布。立即行动的新进入流量为 $N[1 - G(x^*)]$ 。从前面关于等待企业的解中发现行动的流量为 $-\frac{1}{2}\sigma^2 N \phi'(x^*)$ 。活动企业的总数为 Q , 死亡流量为 λQ 。为保持这个数量为常数,我们需要

$$\lambda Q = N[1 - G(x^*) - \frac{1}{2}\sigma^2 N \phi'(x^*)] \quad (8-35)$$

我们可以从前面的均衡条件中算出 x^* 和 Q : 行动条件式(8-27)和自由进入条件式(8-30)。因此,这个方程限定了 N 。由于自由进入条件式(8-30),新进入者并不关心它们的选择,因此,我们可以采用通常的传统长期均衡分析并假定有足够的企业确实会进入。这样前面所描述的“随机平稳”均衡可以得到维持。

在我们的特定情形下, X 为单一分布, 条件式 (8-35) 变为

$$\lambda Q = N \left[1 - e^{\gamma x^*} \frac{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma}{\lambda + v - \frac{1}{2}\sigma^2} \right]$$

这允许我们计算出新进入速度 N 或者是相对于活动企业的数量 Q ，或相对于活动企业和等待企业的总数 $(Q + M)$ 的比例。

尽管各种数学表达式变得很复杂，但是一些一般的原则仍然成立。当一种产业中的企业受到特定冲击的约束时，每家企业的投资决策都会严重地受到等待其自身的冲击的更好实现的期权价值的影响。在产业水平上，冲击及企业的反应可以加总到长期平稳条件中，因此，产业的产出和价格不是随机的。然而，这种变量的均衡水平受到特定企业不确定性的参数的影响。而且，在加总的不确定性背后存在大量的随机性和波动性：企业进入、投资以及退出，以便对他们个人命运的冲击作出反应。

在现实中，产业范围和特定企业的冲击会一起发生。因此，我们将继续把本章中所研究过的模型联合为单一的一般模型，从而将这两种冲击都包括进来。然后，在第 12 章，我们将考虑一些实际数据的一种应用。

8.5 一个一般模型

现在我们在一个更一般的模型中考察产业均衡，其中特定企业的不确定性和产业范围的不确定性并存。考虑到这种联合的不确定性中增加的记号和数学上的复杂性，对每种情形都进行一定的简化。我们的处理基本上沿着卡巴利罗和平迪克 (Caballero and Pindyck, 1992) 的方法。

我们假定，企业为风险中性的（或者产业范围的风险与整体经济中的资本市场中的风险无关），并将更一般的情形留给读者。我们假定，产业需求是等弹性的，这样，需求方程式 (8-1) 变为

$$P = XYQ^{-\epsilon} \quad (8-36)$$

式中， $\frac{1}{\epsilon}$ 为需求的价格弹性。我们还忽略了前面特定企业不确定性模型中的第二个行动阶段，这样 $I=0$ 且 $X^*=0$ 。

与以前一样，每家企业都有能力生产出单位产出，且没有生产中的可变成本，这样， P 也就是利润流。另外，与以前一样，我们可以把这看做更一般的结构的退化形式，其中任何可变投入（那些没有不可逆性或调整成本的）都被选定为最优水平。我们继续把企业看做是无穷小的，而且它们的数量是一个连续变量，那么 Q 就等于这个数量。

278 这两种冲击服从独立的几何布朗运动过程^[9]令 dz_x 和 dz_y 为独立的标准维纳过程的增量, 这样 $V(dz_x) = V(dz_y) = dt$ 且 $\epsilon(dz_x, dz_y) = 0$ 。那么, 特定企业的冲击服从

$$dX = \alpha_x X dt + \sigma_x X dz_x \quad (8-37)$$

而产业范围的冲击服从

$$dY = \alpha_y Y dt + \sigma_y Y dz_y \quad (8-38)$$

新进入者支付沉没成本 R 并得到从已知分布所选出的初始的 X 。令 \bar{X} 表示这个初始的 X 的期望值。没有行动的更多的成本, 且利润流永远为正。因此, 所有的进入者将立即变成活动的。

在第 8.2 节的模型中, 我们仅仅有产业范围内的不确定性, 均衡是由在上面的价格反射壁来描述的。在加入了特定企业的不确定性之后, 很自然的一般化是表达式 (8-36) 中关于价格的产业范围内的要素的类似反射壁, 即

$$W = YQ^{-\epsilon} \quad (8-39)$$

其观点是, 只要 W 低于临界水平 \bar{W} , 没有新企业会进入, 而现在的企业会继续承受泊松死亡, 因此, $dQ = -\lambda Q$ 。Y 的几何布朗运动及 Q 的泊松死亡过程将引起 W 的几何布朗运动, 即

$$dW = (\alpha_y + \epsilon\lambda) W dt + \sigma_y W dz_y \quad (8-40)$$

然而, 如果 W 上升到临界值 \bar{W} , 足够多的新企业将进入以阻止它更进一步的上升, 这样使得 \bar{W} 成为过程式 (8-40) 中的较高的反射壁。当然 \bar{W} 必须作为均衡的方程组中的一部分而内生地确定。我们现在来证明这种猜测。

活动企业的价值为

$$V(X, W) = E \int_0^{\infty} X_t W_t e^{-(r+\lambda)t} dt$$

279 其中的贴现率由于 λ 而提高, 以便使泊松死亡以熟悉的方式出现。这满足偏微分方程:

$$\frac{1}{2} (\sigma_x^2 X^2 V_{XX} + \sigma_y^2 W^2 V_{WW}) + (\alpha_x X V_X + \alpha_w W V_W) - (r + \lambda) V + XW = 0$$

式中, α_w 为 $(\alpha_y + \epsilon\lambda)$ 的简写。

当 X 的次数为 1 时, 这个价值函数是齐次的: 一家幸运的企业拥有的自身特定的冲击 2 倍于初始的拉力的话, 它将永远拥有 2 倍于利润流的预期, 因此, 它也有 2 倍的价值。然而, 当 W 的次数为 1 时, 价值函数不是

齐次的；如果产业范围内的冲击比较大，拉动新的进入者的临界值将会更快地达到，因此，利润流较高的相应阶段不可能持续得太长久。这样，我们可以写成 $V(X, W) = Xv(W)$ 。将其代入上面关于 V 的偏微分方程中，会复制关于 v 的常微分方程，即

$$\frac{1}{2}\sigma_y^2 W^2 v''(W) + \alpha_x W v'(W) - (r + \lambda - \alpha_x)v(W) + W = 0 \quad (8-41)$$

这将我们带到了第6章和第7章熟悉的背景中。其解为

$$v(W) = \frac{W}{r + \lambda - \alpha_x - \alpha_w} - AW^{\beta_1}$$

式中， A 为需要确定的常数； β_1 为二次式的正根：

$$\frac{1}{2}\sigma_y^2 \beta(\beta-1) + \alpha_w \beta - (r + \lambda - \alpha_x) = 0$$

与往常一样，考虑到当 $W \rightarrow 0$ 时的极限，我们已经消去了包含负根的项。这个解的解释也与我们在前面对纯粹加总的不确定性的处理相似。解中右边第一项表示如果 W 为可以在不担心新的进入者的条件下继续其过程的利润流的预期现值，而第二项则表示价值的降低，因为实际的新进入给 W 过程加上了上限。跟以往一样，为使该解有经济意义，我们需要右边第一项中的分母，即 $(r + \lambda - \alpha_x - \alpha_w)$ 为正数，这反过来会导致 $\beta_1 > 1$ 。

跟我们在本章前面对方程式(8-7)的做法一样，常数是由反射壁 $v'(W) = 0$ 时的平滑粘贴条件所确定的。这导致：

$$v(W) = \frac{1}{r + \lambda - \alpha_x - \alpha_w} \left(W - \frac{W^{\beta_1} \bar{W}^{1-\beta_1}}{\beta_1} \right) \quad (8-42)$$

对于一个给定的 X ，一家企业的实际价值为 $V(X, W) = Xv(W)$ 。然而，一个潜在的进入者只能看到 W 。因此，从进入者的角度来看，期望值为 $Xv(W)$ 。临界值 W 是自由进入的条件限定，因此，这一期望值必须等于在那一点的进入成本 R 。将 $\bar{X}v(W)$ 和 R 代入并化简，我们得到

$$\bar{X} \bar{W} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} (r + \lambda - \alpha_x - \alpha_w) R \quad (8-43)$$

这是一种非常自然的一般化，它联合了纯粹产业范围内的不确定性所对应的方程（前面第8.2节中的式(8-10)），与纯粹的特定企业的不确定性（前面第8.4节中的式(8-27)）。现在其特征实在是太熟悉了，根本就不必再解释

关于这一模型的更深入的理论细节，我们推荐读者参阅卡巴利罗和平迪克（Caballero and Pindyck, 1992）的著作。在第 12 章，我们将讨论其实证应用。

8.6 文献导引

卢卡斯和普雷斯科特（Lucas and Prescott, 1971）利用离散时间的马尔可夫链模型考虑了竞争性产业中的投资的理性预期均衡，他们建立了均衡的最优条件。李普曼和鲁梅尔特（Lippman and Rumelt, 1985）将进入与退出组合到一个简单的模型中。

埃德尔森和奥斯班德（Edleson and Osband, 1988）证明，均衡中竞争性企业的进入和退出临界值并不是马歇尔式的。垄断性企业的期权价值的临界值及竞争性企业自由进入临界值的一致性首先由利希（Leahy, 1992）注意到。我们的解释大多数按照迪克西特（Dixit, 1992）的论述。

杜马斯（Dumas, 1992）提供了一般均衡的一个早期模型，其中每家企业在布朗运动的不确定性条件下作出代价高昂的转换决策；这项研究是在生产性资本的国际间配置的背景下进行的，其目的是刻画出实际汇率的动态均衡。

卡巴利罗（Caballero, 1991）试图通过仅仅把一家企业的决策模型化，由参数来改变其需求的价格弹性，并把完全竞争解释为弹性趋于无穷时的极限的捷径来研究产业均衡。他证明，传统的现值标准在这种极限条件下会恢复。然而，人们必须认识到，使需求更有弹性的价格水平自身是内生性的，而且它起到了反射壁上限的作用。仅仅通过进行一种适当的产业水平的分析，这些影响可以得到理解。关于这一点更精确、更详细的讨论参见平迪克（Pindyck, 1993a）的著作。后来卡巴利罗和平迪克（Caballero and Pindyck, 1992）努力构造的把特定企业的不确定性与总体的不确定性联合起来的产业均衡的模型形成了我们上面的处理方法的基础。

【本章注释】

[1] 在第 5 章我们提到项目价值收益率的不足 $\delta = \mu - \alpha$ （ μ 为具有相同风险资产的竞争性预期收益）能反映其他企业进入的可能性，然而我们没

有明确地将企业进入模型化，也没有提供它为什么会致持续的收益率不足的任何证明。

[2] 对 CAPM 假定的推广是明显的，而且在这里几乎没有引入额外的记号，因此，我们把它留给有潜力的读者。

[3] 对 Q 家企业，这要求超过 $\frac{1}{Q}$ 的价格弹性，因此由这种假定所承受的限制非常弱。

[4] 我们对随机变量闭集及大数定律的处理是非常有启发性的，但其结论在直觉上是非常清楚的，而且就当前的目的来讲，正式严格处理将会太长而且很困难。关于这一严格理论的基础请参见朱迪 (Judd, 1985) 的论述。

[5] 回顾一下，我们已经假定企业是风险中性的。另外，我们还可以假定复制是成立的，而且 μ 为与式 (8-4) 中的 dz 完全相关的一种资产或资产组合的有竞争力的经风险调整的贴现率；那么， δ 将等于 $\mu - \alpha$ 。关于这一点评述，参见第 6 章，特别是其中的第 6.1.2。

[6] 参见马利亚里斯和布罗克 (Maliaris and Brock, 1982, p.200) 或迪克西特 (Dixit, 1993a, Section 3.5) 的论述。

[7] 在第 9 章，我们将看到当价格上限充分低到有意义时的影响。

[8] 注意我们并没有给出这一点的正式严格证明。

[9] 独立性的假定是很自然的。将 X 分成两个部分，一个沿 Y 的方向，另一个与它成直角。与 Y 的冲击完全相关的前者一定是产业范围内的，因而应当包括在 Y 自身中，这样就剩下了独立于 Y 的特定企业的冲击。

第9章 政策干预与不完全竞争



在前面的章节，我们讨论了竞争性产业均衡的一个基本模型。在模型中，我们认识到每家企业都受到同样的激励而且在做着类似的决策，每家企业都在不确定性的环境中作出其不可逆的投资决策。我们考虑了产业范围和特定企业的不确定性，并且发现两者对企业不太想作出投资都有影响，但却是由于不同的理由。对产业范围内的不确定性，每家企业都知道，为了适应有利的发展条件，其他企业会像它所做的那样进入或扩张。因此而发生的供给增加将会抑制价格的提高，这样就减少了企业向上的潜在利润，从而也减少了其自身投资的预期价值。对特定企业的不确定性，每家企业都可以利用其自身的好运气。然而，这样它就必须对立即投资与为了重新评价

形势而等待的方案进行比较。等待使得企业可以侦察其运气是否只是暂时的，这样就降低了投资中向下的风险。因此，不确定性使等待更有价值，从而阻止了立即投资。

在本章，我们扩展了用于得到这些结论的那个简单模型，并且寻求其更深一步的含义。第一个问题是关于这一产业均衡的社会最优。很多人会认为，如果企业面临正在进行的不确定性时对投资犹豫不决，政府应当行动起来，提供额外的投资激励。我们发现，这种观点经常是错误的，而且至少必须受到严格限制。基本模型的均衡显示了强大的惯性（inertia），但是没有内在的扭曲或市场失灵，因此这种惯性就是社会最优的。面临相同的不确定性而且考虑相同的不可逆投资决策的计划者同样也会犹豫不决。只有当市场失灵的一些类型跟不确定性和不可逆性共存时政策干预才会被证明是正当的。在这种背景下，一个自然的例子就是风险中分担的市场失灵，我们将讨论由它所引出的问题。然而，我们还发现，一些减少风险的政策，如价格控制可能拥有使其达不到预期目标的效果，甚至是令人惊奇的副作用。

考察社会最优的数学工具有一种有用的副产品：它允许我们在各种各样的有用的方向上扩展第8章中的简单模型。较早以前，我们已经假定了增加的需求冲击，以及同一类型的企业中每家企业都有单位产出能力和生产中的零可变成本。利用新技巧，我们可以去掉所有这些限制。这引起的惟一差别是，在产业均衡中，价格过程的上限（反射壁）不再是常数，而是可以随当前活动企业的数目的变化而变化的。

最后，我们放松了完全竞争的假定，并考虑潜在竞争者的数量很少时的产业均衡。那么，这种随机选择问题变成了一种随机博弈。在我们的特定背景下，关于这种博弈的一般理论及其求解都非常困难，但是，我们讨论了一种带来了一些有用知识的特殊的简单模型。这类问题的更一般的分析是未来研究中非常有前途的课题。

与这些章节的工作有关的更加有前途的研究领域包括检验这些理论的计量经济学工作，以及在适当的地方应用这些理论的实验工作。在第12章，提供了我们所了解的部分此类工作的一个简单综述，而且提出了需要进一步实证研究的路径。

9.1 社会最优

我们的产业由在任何风险都得到有效定价、功能良好的资本市场运作的企业所组成。产出市场是竞争性的，企业拥有理性预期。这正是标准的阿罗-德布鲁（Arrow-Debreu）框架，其中完全市场有效地调整着涉及时间与不确定性的决策。因此，我们应当预期产业均衡是社会最优的。现在明确地证明这种最优性。

284 在这个过程中，我们说明了一个解决产业均衡的新模型，模型本身被证明是非常有用的。社会最优就是一个简单动态优化问题的解。当它描述市场均衡时，通过解决这一相同的优化问题我们可以发现后者。除了最简单的模型外，寻找均衡的这种方法比试图寻找价格的内生性随机过程的不动点要简单得多。通过推广第 8 章中的简单模型，即考虑不同质的企业，每家企业都有向上倾斜的短期供给曲线，并且处理非倍增的需求冲击，我们将证明这一点。

9.1.1 优化与均衡间的相互作用

我们从第 8 章描述带有总的不确定性的基本模型的社会最优的特征开始。在那个模型中，产业的反需求曲线为

$$P = YD(Q) \quad (9-1)$$

式中，倍增的漂移变量 Y 服从几何布朗运动：

$$dY = \alpha Y dt + \sigma Y dz \quad (9-2)$$

产业的产出 Q 等于生产单位的数量，这里把它看做连续变量。通过承受沉没成本 I ，每单位产出都可以被启动。假定向该产业增加生产能力的决策由社会计划者制定。在这种背景下，我们可以把生产单位看做社会最优的离散解释或履行中的企业。

在任一时刻需求曲线下面的区域由式 (9-3) 给出：

$$YU(Q) = Y \int_0^Q D(q) dq \quad (9-3)$$

这可以看做当漂移变量为 Y 时，由产出流量 Q 所产生的总社会效用流量；那么 $YU'(Q) = YD'(Q)$ 为边际社会效用。在离散化的解释中，这正好是价格。由于不存在可变成本，社会计划者旨在社会效用中已经去掉了生产能力扩张的成本社会效用的预期现值最大化。

在任一时刻 t 的社会效用为 $Y_t U(Q_t)$ 。如果在这一时刻增加的生产能力为 ΔQ_t ，它引起的成本等于 $I\Delta Q_t$ 。社会计划者的目标函数为

$$E \left\{ \int_0^{\infty} Y_t U(Q_t) e^{-\mu t} dt - \sum_t I \Delta Q_t e^{-r t} \right\}$$

式中，求和是对发生了生产能力增加的所有时刻进行的。不确定性的收益用 μ 来贴现，而确定的成本用无风险利率 r 来贴现。当给定初始条件时，如 $Y_0 = Y$ 和 $Q_0 = Q$ ，计划者会最大化这一社会净现值。

这是一个动态规划问题。为了尽快得到结果，这里将在一定程度上启发性地来解决这个问题。在第11章，我们将更详细地考察单个企业生产能力扩张时的类似问题。^[1]

令 $W(Q, Y)$ 表示目标函数的最大值，即贝尔曼价值函数，其中自变量为初始状态 (Q, Y) 。与普通的动态规划一样，我们将该问题分解为瞬时将来和超过瞬时后的连续将来。社会计划者瞬时关注的是是否以数量 dQ 来扩张生产能力。这将花费 $I dQ$ ，而且把价值函数提高了 $W_Q(Q, Y) dQ$ 。因此，如果 $W_Q(Q, Y) < I$ ，增量就不会调整。我们从直觉上预期，较高的 Y 值将进一步调整生产能力的增加。因此，对每一个 Q 都存在一个临界值，用 $Y(Q)$ 表示，只有当 Y 达到 $Y(Q)$ 时，边际增量 dQ 才是最优的。此外，曲线 $Y(Q)$ 将是向上倾斜的。当然，作为解的一部分，我们必须获得 $Y(Q)$ 。

在这条曲线下面的区域内，即 $Y < Y(Q)$ ，企业在下一小时间段 dt 内将不增加生产能力。因此，动态规划的贝尔曼方程变成：

$$W(Q, Y) = YU(Q)dt + e^{-\rho dt} E[W(Q, Y + dY)]$$

利用伊藤引理展开右边，并像在第5章和第6章那样简化，我们看到，贝尔曼函数满足微分方程：

$$\frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 W_{YY}(Q, Y) + (r - \delta) Y W_Y(Q, Y) - r W(Q, Y) + YU(Q) = 0 \quad (9-4)$$

对每一个 Q ，可以把它看做把 W 与 Y 联系起来的常微分方程。再次利用第5章和第6章中的工作经验来写出下面的解：

$$W(Q, Y) = B(Q) Y^{\beta_1} + \frac{YU(Q)}{\delta} \quad (9-5)$$

式中， $B(Q)$ 为待定函数^[2]； δ 被限定为 $\mu - \alpha$ ； β_1 为下面的基本二次式的 β

正根:

$$Q \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - r = 0$$

为了收敛的需要, 假定 $r > 0$ 且 $\delta > 0$, 有 $\beta_1 > 1$ 。而且, 与以前一样, 我们已经考虑了 $Y \rightarrow 0$ 时取极限, 把含有负根 β_2 的项消去。

为求解, 必须找到生产能力的最优扩张政策。在增加的边际为第 dQ 单位的边界上, 贝尔曼函数中增加的 $W_Q(Q, Y)$ 等于边际单位的成本 I (价值匹配条件)。因此有

$$B'(Q)Y^{\beta_1} + \frac{YU'(Q)}{\delta} = I \quad (9-6)$$

此外, 收益 W_Q 及成本 I 关于 Y 的导数必须相等 (平滑粘贴条件)。因此, $W_{QY}(Q, Y)$ 必须等于零, 或者

$$\beta B'(Q)Y^{\beta_1-1} + \frac{U'(Q)}{\delta} = 0 \quad (9-7)$$

我们可以求解这两个方程来找到临界值 $Y(Q)$, 它满足下式:

$$Y(Q)U'(Q) = \frac{\beta_1}{\beta_1-1} \delta I \quad (9-8)$$

这一方程有非常自然的解释。方程左边正好是由式 (9-3) 给出的总社会效用流量关于 Q 的导数, 因此, 它等于价格 $YD(Q)$ 。那么, 我们发现, 社会最优临界值简洁地限定为价格的临界水平。更有意义的是, 这个临界值正好是我们在第 8 章式 (8-9) 中所找到的竞争性均衡进入的临界值 \bar{P} 。社会最优与竞争性均衡是同一的, 这就证明了最先把我们引导到这条道路上的那种直觉。^[3]

287 社会最优的视角, 尽管形式上等价于竞争性均衡的视角, 但有一些实践上的优势。例如, 如果需求冲击不是倍增的, 进入临界价格会随着当前生产的变化而变化。一种纯粹的均衡方法将要求我们在函数 $\bar{P}(Q)$ 空间中找到一个不动点, 这可能是非常困难的。在这种背景下, 社会最优方法把这种困难大大简化了。下面我们将说明其中的一些问题。

让我们回到简单的模型上来, 我们还可以在式 (9-6) 和式 (9-7) 中消去 Y , 从而得到 $B'(Q)$, 并对它积分可找到 $B(Q)$, 这样就完成了关于 $W(Q, Y)$ 的解。我们有

$$B'(Q) = -(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1} \left[\frac{U'(Q)}{\delta} \right]^{\beta_1} \frac{I^{1-\beta_1}}{\beta_1^{\beta_1}}$$

在这里我们对精确的表达式没有太大的兴趣，但是 $B(Q)$ 的解释相当重要。如果 Q 保持在当前的固定水平上，而 Y 服从布朗运动过程，式(9-5)中的第二项 $\frac{YU(Q)}{\delta}$ 就是 $YU(Q)$ 的预期现值。因此，第一项 $B(Q)Y^{\beta_1}$ 必然是社会投资能力的价值，它适应于 Y 的变化而最优地提高了 Q 。换句话说，第一项是由社会根据其对这个产业扩张的选择所设定的值。当真正采取了边际性扩张时，社会以额外产出的预期现值的形式得到 $\frac{YU'(Q)}{\delta}$ ，但因执行而失去的边际期权的价值为 $-B'(Q)Y^{\beta_1}$ （注意 $B'(Q)$ 为负），那么价值匹配条件式(9-6)使这种行为的这两种效应（净收益）的余额等于其成本 I 。

我们可以利用第5章和第6章中的记号，并写为下式：

$$v(Q, Y) = \frac{YU'(Q)}{\delta}, \quad f(Q, Y) = -B'(Q)Y^{\beta_1}$$

那么， $v(Q, Y)$ 为边际单位安置后的值，而 $f(Q, Y)$ 是安置它的期权价值。从价值匹配条件和平滑粘贴条件中发现的最优临界值实际上类似于第6章的式(6-7)和式(6-8)，即

$$f(Q, Y) = v(Q, Y) - I, \quad f_Y(Q, Y) = v_Y(Q, Y)$$

那么，当 Q 单位早已被装备而随机变量的当前水平为 Y 时，整个产业对社会的价值由下面的式子给出：

$$W(Q, Y) = \int_0^Q v(q, Y) dq - \int_Q^{\infty} f(q, Y) dq$$

上式代表所有已装备单位的价值之和，及所有未来要装备的单位的期权价值之和。读者可以容易地检验出，关于式(9-5)中 $W(Q, Y)$ 的解正是这样得到的。

在第11章，我们将考虑可以累加性扩张其生产能力的一家企业，并发现在企业的总价值中有类似的期权价值成分。那里，我们将重现这种直觉，并且依赖于它。

9.1.2 更一般的模型

社会最优的视角允许我们将产业均衡模型一般化，而且在这一过程中，²⁸⁸显示出监管竞争性企业不可逆投资决策的重要原则。

假定产业需求采用非常一般的形式：

$$P = D(Q, Y) \quad (9-9)$$

这样，我们就不再限定需求转换变量 Y 为倍增进入的。那么需求曲线下方的区域变成：

$$U(Q, Y) = \int_0^D D(q, Y) dq \quad (9-10)$$

对它进行微分，我们有 $U_Q(Q, Y) = D(Q, Y)$ 。

我们还允许企业拥有更一般和更灵活的技术。每家企业都可以同时改变其产出水平，而且企业间在这样做的时候能力不同。假定企业 n 的可变成本函数为 $c(q, n)$ ，其中 q 为其产出率。这些函数具有总成本和边际成本都递增的标准特征， $c_q > 0$ ， $c_{qq} > 0$ ，这些企业也以递增的成本被排序，因此， $c_n > 0$ 和 $c_{qn} > 0$ 。

假定当前有 N 家企业是活动的，我们把 N 看做一个连续变量。一位社会计划者，或者竞争性市场中的法则，将确保总产出 Q 在企业之间的配置（企业 n 生产 $q(n)$ ），并以这种方式来最小化成本。这样，总成本函数 $C(Q, N)$ 将由下面的最小量得到

$$\min_{q(n)} \int_0^N c(q(n), n) dn$$

约束条件为

$$\int_0^N q(n) dn = Q$$

这一最小化问题的一阶条件为

$$c_q(q(n), n) = \omega$$

对所有的 $n \in [0, N]$ 成立。

式中， ω 为拉格朗日乘数。^[4]利用包络定理（envelope theorem），我们有

$$C_Q(Q, N) = \omega$$

289 换句话说，边际成本在企业之间是相等的，而总的边际成本等于每家企业的边际成本。这个定理给出：

$$C_N(Q, N) = c(q(N), N) - \omega q(N)$$

总产出流量也是一个选择问题。社会计划者将选择它，以达到最大化净社会剩余（超过成本的额外效用），这里我们定义为 $S(N, Y)$ 。当需求转换变量在点 Y 且有 N 家活动的企业时，这意味着

$$S(N, Y) = \max_Q [U(Q, Y) - C(Q, N)]$$

该式的一阶条件为 $U_Q(Q, Y) = C_Q(Q, N)$ ，或者

$$D(Q, Y) = c_q(q(n), n) = \omega$$

对所有的 $n \in [0, N]$ 成立。这时价格等于每家企业的边际成本，这是完全竞争市场中短期均衡的标准条件。

利用包络定理，我们有

$$\begin{aligned} S_N(N, Y) &= -C_N(N, Y) = \omega q(N) - c(q(N), N) \\ &= D(Q, Y)q(N) - c(q(N), N) \end{aligned}$$

这正是最后一家企业的经营利润流，我们把它简写为 $\pi(N, Y)$ 。

现在考虑社会计划者的投资问题。通过作出不可逆的投资 I 可以创立一家新企业。为简化记号，我们假定风险中性，尽管第 4.3 节中等价风险中性评价方法可以处理风险规避。利用对前面特殊例子的自然推广，社会目标为

$$E \left\{ \int_0^{\infty} S(N_t, Y_t) e^{-\alpha t} dt - \sum_t I \Delta N_t e^{-\alpha t} \right\}$$

式中求和发生在所有那些创立新企业的时刻。令 $W(N, Y)$ 表示作为初始状态 (N, Y) 的函数（即贝尔曼函数）的最大化。重复前面关于多冲击问题下的步骤，我们可以把它的形式写作

$$W(N, Y) = B(N) Y^{\beta_1} + T(N, Y)$$

式中， $T(N, Y)$ 为 N 永远保持初始值的常数所产生的剩余预期现值，而第一项为社会扩张选择的价值。

这样，使得建立边际为第 dN 个企业为最优的 Y 的临界水平由熟悉的 290 价值匹配条件和平滑粘贴条件给出：

$$W_N(N, Y) \equiv B'(N) Y^{\beta_1} + T_N(N, Y) = I$$

及

$$W_{NY}(N, Y) \equiv \beta_1 B'(N) Y^{\beta_1 - 1} + T_{NY}(N, Y) = 0$$

从这两个方程式中消去 $B'(N)$ ，得到

$$T_N(N, Y) - \frac{Y}{\beta_1} T_{NY}(N, Y) = I \quad (9-11)$$

在积分符号下进行微分，得到

$$T(N, Y) = E \left\{ \int_0^{\infty} S(N, Y_t) e^{-\alpha t} dt \right\}$$

用不同的标注表示为

$$T_N(N, Y) = E \left\{ \int_0^{\infty} S_N(N, Y_t) e^{-\alpha t} dt \right\}$$

从上面我们看到， $S_N(N, Y)$ 就是第 N 家企业的经营利润 $\pi(N, Y)$ 。因此，

$T_N(N, Y)$ 正好是这一经营利润的期望值,它是在 Y_t 服从由给定的初始值 Y 开始的随机过程而保持 N 为一常数时所计算出来的。

那么, T_{NY} 就是由随机变量 Y 的较高水平开始的这种期望值的边际效应。由于较高的 Y 提高了利润, T_{NY} 为正。因此, 在式 (9-11) 中, 必须有 $T_N > I$ 。换句话说, 在产业内已经存在 N 家企业时, 证明建立边际企业 dN 是合理的临界水平上, 创建企业做的边际预期值超过了行动的成本。原因也是熟悉的: 剩余正好是社会执行这种期权的机会成本。

这样, 一般模型在许多方面再现了前面简单情形下的分析和结论。然而, 有一个结论并不成立; 只有在非常特殊的情形下, 从式 (9-11) 中所发现的临界水平意味着常数价格 $D(Q, Y)$ 。一般地, 临界价格为企业数量 N 的函数。

另外, 由于不存在价格扭曲或市场失灵, 社会计划者的问题产生了与竞争性均衡下的直接结果相同的结论, 但是现在我们领会到了间接方法的优点。如果进入的临界价格为函数 $\bar{P}(N)$, 则均衡的内生性价格过程要复杂得多。其顶部(反射壁)随着新企业的进入而变化。为找到均衡, 我们必须在复杂的函数空间解决一个不动点问题。社会最优问题仍然是一个简单的动态最优的计算。

还有其他不成立的情形。式 (9-11) 隐藏了管理竞争性企业进入决策的一个重要的简单原则。假定有 N 家企业已经在这个产业中, 而下一家边际企业正在考虑是否进入。假定这家企业对 Y 的随机变化拥有理性预期, 但是它假定它自己会是最后的进入者, 忽略了如果 Y 上升到适当的水平, 在它之后其他企业也会进入的事实。这家企业将这样计算其利润的预期现值:

$$v(N, Y) = E \left\{ \int_0^{\infty} \pi(N, Y_t) e^{-\alpha t} dt \right\} = T_N(N, Y)$$

它会对其进入期权的价值 $f(N, Y)$ 进行一般的计算, 并发现:

$$f(N, Y) = b(N) Y^2$$

式中, $b(N)$ 将从价值匹配和平滑粘贴条件中与进入临界值 $Y(N)$ 一起被确定:

$$f(N, Y) = v(N, Y) - I, f_Y(N, Y) = v_Y(N, Y)$$

消去其中的 $b(N)$, 这些方程就会退化为式 (9-11)。因此, 证明社会最优附属于竞争性均衡这一点很容易, 其中每家企业都认识到未来新企业进入的可能性, 以及新企业进入对价格过程及其自身利润流的影响的可能性。

换言之, 每家企业可以找到它作为可能进入的最后一家企业时的利润的预期现值, 然后再进行标准的期权价值计算, 从而作出进入决策。尽管企业

对 Y 的随机过程有理性预期，考虑到其他企业的进入决策，它也可能完全是短视的。它不仅作出与其完全预期到其他企业的进入决策时所作的相同决策，而且它以一种要简单得多的计算来得到这个答案。

当第 N 家企业假定它将是进入这个产业的最后一家企业时，它忽略了两件事。首先，它认为其利润流将在保持 N 固定不变，由 $\pi(N, Y)$ 随 Y 的变化而变化的随机演化中给出。这样它忽略了由于适应 Y 上升到一个新高度而发生的后面的进入所引起的其利润向上的减少。对把进入考虑在内的企业来讲，其他不变将使作出投资更具有吸引力。然而，它还忽略了这样一个事实，即未来进入的前景减少了其等待的价值。假定企业拥有推迟其决策的选择权，而且拥有其等待期权的价值为正就开始行动的机会。其他不变，这使得投资比不投资的吸引力更小。这两种效应实际上相互抵消，因此，在这种情形下，两种错误导致了企业正确的最优选择。我们在第 8.2.2 中提到了一种特殊情形，其中价格上限的实际水平对企业进入的临界价格的计算无所谓，只要这一上限至少与这个临界价格一样高。现在我们看到了这种效应的一般形式。竞争性均衡的这种引人注目的特征是由利希 (Leahy, 1992) 发现的。

9.1.3 对反托拉斯及贸易政策的意义

我们已经看到，社会最优与竞争性均衡之间标准的相互作用保持在我们所构建的模型类型的范围之内。只要不存在外部性，而且相关风险可以在有效市场中抵消，动态和不确定性自身并不是政策干预的充分理由。实际上，市场结果显示大量的惯性（没有投资发生的冲击范围），以流行的观点来看，企业在投资上的犹豫态度可能是政府干预以促进投资的充分理由。然而，这种惯性是最优的——社会计划者并不希望投资得太快。

我们的随机动态市场均衡中还有一些其他特征，这些特征往往被看做一种需要政策干预的无效率。这是因为，传统的教科书中的均衡观点是基于马歇尔长期观念的静态均衡。在那种观点中，当价格提高到高于其长期平均成本时，企业进入某产业；当价格下降到低于其平均可变成本时，企业就退出。那么，超过长期平均成本的价格被看做进入的壁垒，企业要求有反托拉斯措施。类似地，价格低于平均可变成本往往被看做掠夺式倾销，通常是外国公司采用的，因此，这是贸易制裁的正当理由。

我们想强调，这样的结论很可能是一种基本的错误，因为在现实中，经

济条件从来都不是平稳的。把这种情形下的产业均衡看做其适应演化着的不确定性（即随机过程）的自身变化是非常重要的。在面临正在发生的不确定性条件下，产业的自然竞争的动态将包括一些阶段：产业的“简单印象”拥有这样的特征，即静态理论把它解释为竞争行为的偏差。把竞争性均衡看做随机过程的概念在宏观经济学中已经变得非常普遍；产业组织理论和反托拉斯政策也应该认识到相同的事实。

假定这样一种产业，在价格处于马歇尔长期水平 P_0 和均衡临界水平 \bar{P} 之间时引起了政策当局的注意。政策当局看到创立的企业获得超过正常水平的利润，但是没有新的进入发生。利用传统的微观经济学或产业组织理论，他们将感觉到存在垄断势力或进入壁垒，而且也可能采取反托拉斯行动，这就错了；把这个过程看做一个整体，它就是完全竞争的，长期预期回报是正常的，而均衡也是社会最优的

此外，如果价格低于最低的平均可变成本，这并不一定表示承受损失的企业的一种掠夺性倾销。考虑到如果市场条件充分多变，较低的临界价格将远远低于企业最好退出的最低平均可变成本。在这种情形下，我们可能仅仅观察到企业通过保持其沉没成本的活动而理性地安然渡过一段困难期。^[5]

第 8 章关于铜业的数字例子提示我们，对大多数企业而言，市场价格可能处于马歇尔的价格范围之外。这样就不仅仅是简单印象，而且持续多年的时间序列都可能是不充分的。只有通过对该产业的长期观察，才有希望发现对正常竞争的真正偏离。以简单印象为基础的政策可能导致非常严重的错误，尽管政策制定者有最好的意愿。特别是在前面所提到的，价格高于长期平均成本从而产生大量的暂时性利润只不过是仅仅允许存在作为长期平均的正常利润的竞争性产业中的需求波动所引起的。然而，政府往往试图控制这种猜测出来的企业的超额利润，并且保护消费者避免这些假想的过高价格。城市居民的租金控制就是此类政策的一个典型例子。

在第 9.2 节，我们将讨论一个描述此类政策在真实的动态背景下对投资影响的模型。我们将发现，价格控制会抑制投资，从而使产业的供给下降到这样一种程度：从长期来看，平均价格实际上会上升。这样，即使从政策设计的受助集团的角度来看，价格控制政策也可能会有相反的效果。反过来看，如果政府引入价格下限，以支持处于困难阶段的企业，企业将对此作出反应。它们将大量地进入该产业，这样可能使困难时期更困难，导致政府收益的大量流失。农业的价格支持，是美国和欧洲（通过共同农业政策）长期

存在的一种政策工具，它往往有这样的效果。

9.1.4 市场失灵与政策反应

前面我们发现，不确定性和不可逆性自身并不会成为政府干预市场失灵的证据。强调这一点非常重要，因为公共政策的争论往往在这个问题上犯错误。当产业和职工承受反向的冲击，特别是来自国际竞争的反向冲击时，调整成本的存在本身往往被看做需要政策活动的经济问题。在这种情形下要求政府干预应当以其他一些名副其实的市场失灵为基础。

这并不意味着市场一直运转良好，政府干预永远不需要。一些形式的市场失灵的确是由不确定条件下的动态环境自然地引起的。特别地，风险市场往往是不完全的。这里的理由必须由完全契约的不对称信息或全部的复杂性来解释。劳动收入风险是特别难以保险的。当市场失灵这些独立的原因与正在发生的不确定条件下的不可逆选择的基础问题同时存在时，这两种相互作用会产生一些新的且有趣的次优结果。

我们这里没有对这些市场失灵的模型进行详细描述，仅仅是概括其背后的经济直觉，并把我们的讨论所赖以为基础的著作提供给有兴趣的读者，参见迪克西特和罗布（Dixit and Rob, 1993a, b）的著作。

风险市场的失灵在劳动收入的背景下是最经常的，也是最自然的。现在考虑劳动供给决策，例如教育与职业选择，也包括了大量的沉没成本和不可逆性，而且必须在正在发生不确定性的环境下作出决策。这样，它们实质上就是投资决策，我们的一般框架自然也适合于对它们的分析。这也正是被我们所采用的背景。

考虑这样一个经济，它提供两种可替换的职业，其中一种我们称之为部门，另一种可能是不同的产业或城市。这两种职业之间的相对吸引力随着时间的推移而波动，例如由于随机性的技术冲击。从一个部门转换到另一个部门需要一些沉没成本，这些成本包括（取决于环境）重新训练、旅行、购买或房屋销售、搬家的影响、交新朋友的时间及努力，以及许多其他有形或无形的成本。因此，个人将不会作出这种转换，除非另一部门的相对吸引力充分高到不仅能抵消这些成本的正常回报，而且还能抵消保持状态的期权价值。

这两个部门的产出间的相对价格由标准的需求与供给相等下的均衡所决定。我们称之为部门1和部门2。在缺乏任何形式的劳动力流动的条件下，

每一部门工人收入的波动将与技术对该部门生产能力的冲击成比例，这里包括了人们所面临的收入风险。现在假定，部门 2 得到了有利的冲击。作为响应，个人从部门 1 转移到部门 2，这提高了部门 2 的产出，因此会降低相对于部门 1 的均衡价格，减少了部门 2 相对于部门 1 的初始收入增加。换句话说，当一个人转移到有利的部门时，降低了两个部门中所有其他人所面临的收入风险的程度。

如果利用完全市场有效地配置了风险，这种价格变化只是一种货币性的外部性。然而，因为风险市场是不完全的，风险的减少有实质性影响：它是移动者对社会中的其他所有人转移的一种有益的外部性。由于在其私人计算中并没有考虑这种社会收益，结果劳动力的流动性是一种次优的低流动。（可能是通过对流动中所包括的换工作及任何的再培训进行补贴）鼓励一些额外的流动性的政府可以得到对整个社会来讲更好的结果。^[6]

这种机制通过内生性的相对价格来运转。因此，需求弹性越大，这种机制越不明显。在这种极端情形下，即对世界贸易开放的小经济中，相对价格是由国际市场条件所决定的（也许是作为一种随机过程），在这样的经济中，部门之间的劳动力转移对这个价格没有影响。那么，均衡中的流动程度就是在考虑了风险市场的限制下的二阶最优选择（second-best optimal）。除非政府能设计出分担风险的新途径，否则它不能改良不协调的私人选择的结果。

296 各类税收确实提供了间接的风险分担。在一个开放经济中，贸易税收就是这样一种工具。假定政府减少了一种税收（或提供一种补贴），因此，国内的相对价格与国际的相对价格不一样。现在，两个部门间的收入与国内产出价格相联系，而且更强烈地受到税收收益分配（或补贴过程的贡献）的影响，这改变了风险的配置。那么，在原则上找到一项改善风险分担从而导致社会改良的政策并不是很难。然而，政策的精确的特征是与环境高度相关的，诸如关税之类的简单方法并不能保证在任何情形下都是有益的。

9.2 一些常用政策的分析

政府确实采取了一些改变企业和消费者在其经济决策中所面临的不确定

性的一些政策。这些政策往往是由一些即时的政治或经济原因所引发的（一种信念），即企业会收取过高的价格，或者一种激励投资的已发现的需求。现在，最简单的经济分析告诉我们，拥有单一目的的政策措施经常会有其他的负效应，这些往往是非常有害的。在作为本书主题的随机动态环境下，这个问题更严重。在本节，我们通过分析两项此类政策来说明这一点：

9.2.1 价格控制

政府经常试图通过施加控制来减少价格的波动性。瞬时目的经常是为了保护消费者免受过高的价格的伤害，正如对城市房租上限的规定和 20 世纪 70 年代美国对天然气及石油价格的控制等情形；或者是为了保护生产者的收入，正如欧洲共同农业政策及美国对农业价格的过高支持。经济学家一般会对此类措施持批评态度。他们强调其有害的那部分影响，例如，在租金控制下城市中出租房的稀缺及其质量低下，以及在共同农业政策支持下欧洲过剩的小麦和葡萄酒。这些论点背后的经济分析是标准的教科书中的供给与需求框架。如果价格保持在低于市场出清的水平之下，供给将会太少；如果它保持在高于市场出清的水平之上，则其供给将会太多。然而，这是一种非常静态的状态，尽管现实中的效应大多数都是动态地通过地主或农场主的投资决策来运营的。我们的有关不确定条件下投资的方法提供了对价格控制效应的更丰富的分析，并导致对这些负效应更深入的理解。

我们继续使用我们的基本模型。为了扼要说明，每家企业在活动时都 297
有生产出 1 单位产出的能力，投资的沉没成本为 I ，生产的可变成本为 C 。为记号的简单，我们假定风险中性，无风险的利率为 r 。产业的需求曲线为

$$P = YD(Q) \quad (9-12)$$

式中，总冲击 Y 服从几何布朗运动：

$$dY = \alpha Y dt + \sigma Y dz$$

如果产业均衡包括了进入和退出两种情形，可以给出价格上限和下限的最简单和统一的处理。因此，我们采用第 7 章中的模型，其中一家不生产的企业必然最后失去其沉淀的投资 I 。那么，我们知道，没有任何控制的产业均衡可以由进入临界值和退出临界值来刻画。由于马上就要看到的原因，我们将前者记作 \bar{S} ，后者记作 \underline{S} 。

现在假定政府将对价格实施上限 \bar{P} 和/或下限 \underline{P} 。我们这样做意味着，

在产业中的 Q 和 Y 存在的水平上, 由式 (9-12) 给出的市场出清价格将超过 P , 则企业只能收取 \bar{P} , 而额外的需求就是理性的。如果出清市场的价格低于 P , 则企业将获得 P , 政府变成吸收额外供给的最后购买者。假定在这种背景下, 这样的政府购买或者被破坏掉或者出口或者送给其他国家, 而不会对我们的经济中的需求或供给产生反馈。(这对欧洲的共同农业政策来讲大体上是正确的。) 我们在这里不关心政府预算效率的影响。

在第 8 章, 我们研究了当此类政策有效时企业进入和退出选择的一种观点。事实上, 我们发现, 只要 \bar{P} 高于自然进入临界值 \bar{S} , 实际的 \bar{P} 水平对 \bar{S} 几乎没有影响。较低的上限以相等的数量降低了立即投资的价值以及等待的价值, 剩下了主导投资临界值的不受影响的平衡。当下限 \underline{P} 实际上低于自然退出临界值 \underline{S} 时, 类似的情形成立。

现在, 我们必须考虑把上限和下限联系起来, 并看这样做会如何影响企业的选择及产业的均衡。为简化解释, 我们分别对上限和下限这样做, 这两种处理原则上很容易被整合到一个联合分析中。

首先, 假定价格下限低到不影响分析的结果, 即 $\underline{P}=0$, 但是上限 \bar{P} 有效果, 即有时出清市场的价格会超过 \bar{P} 。我们把这种假设的市场出清价格称为影子价格。我们假定, 包括实际的和潜在的, 该企业可以观察到稀缺的程度 (地主发现多少可能的租户正在四处寻找住房, 或正在报纸上查找这些信息), 因此, 它们可以计算出影子价格, 这会影响到它们的决策。即使当前 1 单位的产出仅仅能得到受控制的价格 \bar{P} , 如果影子价格非常高, 它们知道价格控制会有约束力地持续很长时间, 从而价格不会下降到低于 \bar{P} 也会持续很长时间。因此, 较高的影子价格将使投资更具有吸引力, 即使它并不会改变实际的当前利润流。那么, 就存在一个会加快新投资的临界水平 \bar{S} 。当上限 \bar{P} 逐渐降低时, 影子价格的临界水平 \bar{S} 提高。当上限接近马歇尔长期平均成本 $(C+rI)$ 时, 影子价格的临界水平将接近无限——如果价格控制到只允许正常的回报, 只有当企业确信这种状态永远持续时, 企业才会投资。

假定 \bar{P} 在有效范围之内。现在我们必须确定临界值, 从而有 $\underline{S} < \bar{P} < \bar{S}$ 。为此, 我们考虑作为普遍接受的影子价格 S 的函数的一家实际企业的价值 v 。

当影子价格 S 在范围 (\underline{S}, \bar{P}) 之内时, 它还是一个实际价格, 而这家企业的利润流为 $(S - C)$ 。那么, 下面是熟悉的步骤, 企业的价值为

$$v(S) = \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r} + A_1 S^{\beta_1} + A_2 S^{\beta_2} \quad (9-13)$$

前两项给出了当退出和有约束力的上限无关时的利润的期望值；注意到 S 以预期比率 α 增加，收益流以利率 $r - \alpha = \delta$ 来贴现。另两项为将来到达退出临界值及价格上限时的结果的期望现值。幂 β_1 和 β_2 都是熟悉的二次式的根，常数 A_1 和 A_2 仍然需要确定。为做到这一点，我们有退出临界值时的价值匹配条件和平滑粘贴条件：

$$v(\underline{S}) = 0, \quad v'(\underline{S}) = 0$$

当上限有约束力，即影子价格落在范围 (\bar{P}, \bar{S}) 之内时，利润流为 $(P - C)$ ，且有

$$v(S) = \frac{\bar{P} - C}{r} + B_1 S^{\beta_1} + B_2 S^{\beta_2} \quad (9-14)$$

另外，式 (9-14) 中的前两项为永远收到的这一利润流的价值，注意到常数收益 \bar{P} 必须以利率 r 的水平贴现，而不是 δ 。其余两项为到达范围的 299 极限时的影响，而常数 B_1 和 B_2 待定。为了找到它，我们有进入临界值的价值匹配条件和平滑粘贴条件：

$$v(\underline{S}) = I, \quad v'(\underline{S}) = 0$$

最后，价值函数在两个范围相交的点 \bar{P} 必须是连续可微的。这样，由式 (9-13) 和式 (9-14) 在点 \bar{P} 所评价的 $v(S)$ 的表达式必须相等，类似结论对 $v'(S)$ 的相应表达式也成立。

我们总共有六个方程来确定两个临界值 \underline{S} , \bar{S} 和四个常数 A_1 , A_2 , B_1 , B_2 。这些需要数值解，我们很快就会说明它。

首先，我们讨论关于均衡的一些有用信息。正如第 8 章中的实际价格，这里的影子价格 S 服从参数为 α 和 σ 、反射壁为 \underline{S} 和 \bar{S} 的几何布朗运动。那么，利用前面所用过的相同方法，可以找到 S 的长期分布。 $\log S$ 服从简单的布朗运动，其漂移系数为 $\alpha' = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$ ，偏离系数为 σ 。因此，在其反射壁 $\log \underline{S}$ 和 $\log \bar{S}$ 之间，它为指数分布，其密度与 $e^{\gamma x}$ 成比例，其中 $\gamma = \frac{2\alpha'}{\sigma^2}$ 。反过来，可以发现 S 的密度与 $S^{\gamma-1}$ 成比例。这样，超过上限的概率，即 S 高于 \bar{P} 的时间的比例，由式 (9-15) 给出：

$$\frac{\bar{S}^{\gamma} - P^{\gamma}}{\bar{S}^{\gamma} - \underline{S}^{\gamma}} \quad (9-15)$$

式中, $\gamma \neq 0$ 。当 \bar{P} 在没有政策干预下的进入临界值与马歇尔长期平均成本之间下降时, 这一概率从 0 上升到 1。

利用密度函数, 我们也可以计算在长期普遍接受的实际价格的长期平均值 $E[P]$ 。由于在区间 (\underline{S}, \bar{P}) 内的实际价格等于影子价格 S , 而在区间 (\bar{P}, \bar{S}) 内的实际价格等于上限价格, 预期变为

$$\begin{aligned}
 E[P] &= \frac{\int_{\underline{S}}^{\bar{P}} S S^{\gamma-1} dS + \int_{\bar{P}}^{\bar{S}} P S^{\gamma-1} dS}{\int_{\underline{S}}^{\bar{S}} S^{\gamma-1} dS} \\
 &= \frac{\frac{\bar{P}^{\gamma+1} - \underline{S}^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \frac{\bar{P}(\bar{S}^{\gamma} - \bar{P}^{\gamma})}{\gamma}}{\frac{\bar{S}^{\gamma} - \underline{S}^{\gamma}}{\gamma}} \quad (9-16)
 \end{aligned}$$

式中, $\gamma \neq 0$ 。

300 如果 $\gamma = 0$, 则这两个表达式必须被解释为极限, 假定利用洛必达原则, 超过上限概率变为

$$\frac{\log \bar{S} - \log \bar{P}}{\log \bar{S} - \log \underline{S}}$$

而价格预期变为

$$E[P] = \frac{(\bar{P} - \underline{S}) - \bar{P}(\log \bar{S} - \log \bar{P})}{\log \bar{S} - \log \underline{S}}$$

现在我们转到数值解。由于价格上限更可能被应用于需求和自由市场价格一直在提高的产业中, 我们令 $\alpha = 0.02$, $\sigma = 0.2$ 且 $r = 0.05$, 这正是我们在前几章中所用过的值。最后, 我们令 $C = 1$ (这是标准化了的平均可变成本的单位选择), 而且 $I = 2$, 这使得马歇尔的长期平均成本为 1.1。

表 9—1 显示了结果。在没有任何控制 (或等价地, 当上限处于不相关的高水平, 实际为无限时) 的条件下, 进入临界值为 1.532 4 而退出临界值为 0.679 0。随着上限降低, 更重要的影响是对影子价格的进入临界值的影响。它首先逐步提高, 然后提高得越来越快。当上限处于自然临界值与长期平均成本之间时, 影响会突然大幅提高, 上限有效的长期平均频率也提高。退出临界值也会上升, 但是数量不太明显。

表 9—1

价格上限的影响

 $(\alpha=0.02, \sigma=0.2, r=0.05, l=2, C=1)$

\bar{P}	S	\bar{S}	概率	$E[P]$
∞	0.679 0	1.532 4	0.000 0	1.048 4
1.50	0.679 0	1.533 8	0.027 3	1.048 5
1.40	0.679 5	1.560 8	0.130 7	1.049 4
1.30	0.682 3	1.657 3	0.273 6	1.051 7
1.20	0.693 0	1.994 8	0.480 2	1.056 4
1.15	0.706 6	2.612 3	0.627 5	1.060 7
1.12	0.721 2	4.099 5	0.746 7	1.065 8
1.11	0.728 0	6.040 6	0.800 1	1.069 2
1.10	0.736 4	∞	1.000 0	1.100 0

这种分析给我们提供了关于价格控制削弱了投资的运行机制的一种更清晰的概念。在价格控制下，企业在行动之前会等待以发现需求的更大压力。³⁰¹ 供给的这种动态减少反过来意味着需求压力会足以高到保持上限更经常是有效的。事实上，政策产生了其自身的“需求”。

也许最有意思和最奇怪的结论就是控制长期平均成本的影响。当上限降低时，这一价格上升。换句话说，政策没有能够实现其有意地降低消费者价格的目标，它在长期平均意义上的影响正好相反！原因是，尽管价格高于上限的发生被取消了，由于投资的削减从而长期供给的减少，价格保持在新价格上限水平上的时间比例却是增加的。在图 9—1 中，我们看到了价格分布的这种移动：随着 \bar{P} 的下降，其右边的密度消失了，但是在点 \bar{P} 却有更多的点聚集，而且左边的尾巴的一部分也消失了。从图中来看，对平均价格的影响是模棱两可的，但从数值模拟来看，我们发现影响是“反常的”。

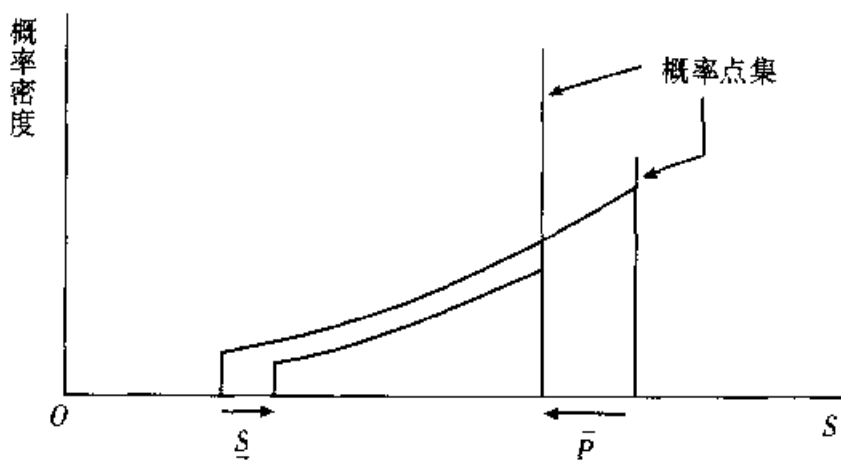


图 9—1 价格上限分布的影响

302

对价格下限的分析遵循同样的步骤。当我们把 \underline{P} 由零提高到没有任何政策下的退出临界值 \underline{S} 水平时，下限保持为没有约束力。超过这一点，它开始对相对低的需求状态发挥效力。这反过来会改变进入与退出临界值。当价格下限上升时，投资的向下风险被减少了。因此，企业更愿意进入而不太愿意离开，那么两个临界值都会下降。当价格下限到达点 C ，退出临界值 \underline{S} 下降为零；能确保其可变成本被抵消的现存企业将永远不会离开。当价格下限处于可变成本 C 和马歇尔长期平均成本 $(C + rI)$ 之间时，退出临界值 \underline{S} 保持为零，尽管进入临界值仍然高于 $(C + rI)$ 。这是因为，企业所考虑的新投资仍然需要一些平衡低于正常利润阶段的超常利润阶段。最后，当价格下限提高到 $(C + rI)$ 时，进入临界值下降到相同的水平。

为更详细地描述均衡的特征，我们重复跟以前相同的过程。首先，假定价格下限 \underline{P} 高到足以在某些时候有效力，但是低于 C 。当影子价格 S 处于区间 $(\underline{S}, \underline{P})$ 内时，企业的利润流为 $(\underline{P} - C)$ ，其价值为

$$v(S) = \frac{\underline{P} - C}{r} + A_1 S^{\beta_1} + A_2 S^{\beta_2}$$

在区间 (\underline{P}, \bar{S}) 内时，价格下限不起作用，实际的价格等于影子价格，利润流为 $(S - C)$ ，其价值为

$$v(S) = \frac{S}{\delta} - \frac{C}{r} + B_1 S^{\beta_1} + B_2 S^{\beta_2}$$

那么在 \underline{S} 和 \bar{S} 的价值匹配条件和平滑粘贴条件，以及在 \underline{P} 的连续可微，完成了全部解。我们也可以像以前那样计算出长期内价格下限有效力的概率及长期平均成本。

下面假定价格下限 \underline{P} 处于范围 $(C, C + rI)$ 内，这里 $\underline{S} = 0$ 。对 S 处于范围 $(0, \underline{P})$ 内，我们得到

$$v(S) = \frac{\underline{P} - C}{r} + A_1 S^{\beta_1}$$

考虑到当 $S \rightarrow 0$ 时的极限，除了正根被保留外，这与上面的解几乎是一样的。对 S 处于 (\underline{P}, \bar{S}) 内，解实际上跟前面一样。现在，在点 \bar{S} 的价值匹配条件和平滑粘贴条件以及在点 \underline{P} 连续可微的条件给出了确定三个常数 A_1 ， B_1 和 B_2 及临界值 \bar{S} 的四个方程。

在这种情形下，长期平均成本的计算是不同的。由于一旦企业进入，它们就永远不会离开，企业的长期数量会趋于无穷而影子价格的分布会在点 0 累积起来。在极限水平上，上限经常能达到，而且平均价格等于上限价格。

我们在表9—2中显示了数值模拟。除了由于价格下限在需求下降时更可能在产业中被普遍接受以外，参数与上限情形下相同，我们令 $\alpha = 0.02$ 。另外，最引人注目的特征是当价格下限从其最低有效水平提高到可变成本 C 的过程中长期平均成本的下降。原因是相同的：需求越低，价格越高，但是其中大部分由需求更高状态下所引起的额外进入所导致的更低的价格抵消了。在某种程度上这种效应在数量上更适度，但它是不会被弄错的。这样，价格下限的长期影响对那些它旨在帮助的人们来说可能是有害的。在许多国家，农场主是如此地依赖于农场价格支持而又是如此地对它们的结果不满意，这一现象可以看做对这一现象的解释。当然，一旦价格下限上升到高于可变成本的水平，它就总是有效的。因此，平均价格等于价格下限，并且随着价格下限的上升而上升，这是事物非常不合理的状态。

表9—2 价格下限的影响
($\alpha=0.02, \sigma=0.2, r=0.05, l=2, C=1$)

P	S	S	概率	$E [P]$
0	0.746 2	1.666 7	0	1.030 9
0.75	0.746 2	1.666 8	0.012 6	1.030 9
0.80	0.739 8	1.666 5	0.180 4	1.030 3
0.85	0.718 4	1.664 5	0.351 1	1.028 7
0.90	0.672 2	1.658 4	0.529 1	1.025 6
0.95	0.573 5	1.643 3	0.723 8	1.020 1
0.97	0.498 2	1.632 3	0.818 5	1.016 4
0.99	0.354 3	1.609 0	0.916 0	1.009 9
1.00	0	1.596 0	1	1.00
1.02	0	1.549 2	1	1.02
1.04	0	1.489 9	1	1.04
1.06	0	1.418 9	1	1.06
1.08	0	1.325 7	1	1.08
1.09	0	1.259 6	1	1.09
1.10	0	1.100 0	1	1.10

9.2.2 政策不确定性

政府不能仅靠实施政策措施来降低潜在投资者所面临的不确定性，它们也会通过政策改变的前景来创造不确定性。政策过程的这种特征尤其与美国有关。在美国，税收政策的改变时常地被提议并讨论，即使在一项特定的新

税法被介绍到国会后，它也要经历少则数月、多则数年的辩论和修正。人们普遍认为，政策改变的预期对投资决策有强烈的影响。然而，政策不确定性似乎不能被布朗运动所描述，它更像是一种泊松跳跃过程。我们现在说明一个例子，以麦特考夫和哈希特 (Metcalf and Hassett, 1993) 的理论为基础，以显示这种政策不确定性如何影响投资。

我们采用了第 6 章的简单模型，由正在考虑以沉没成本 I 进行离散投资的一家企业开始。在投资之后，该项目将在没有可变生产成本的情况下永远生产出 1 单位的产出流。产出的价格服从几何布朗运动：

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz$$

企业为风险中性的，且 r 为贴现率。令 $\delta = r - \alpha$ 。那么，当初始价格为 P 时，来自项目的全部收益的预期现值为 $\frac{P}{\delta}$ 。

我们所考虑的政策工具是以给定的税率 θ 对投资的课税扣除。当这种政策生效时，企业进行投资的沉没成本降低到 $(1 - \theta)I$ 。然而，政府可能在两种政策空间进行转换，一种是课税扣除不存在；另一种是课税扣除存在。我们将利用下标 0 表示无课税扣除，用下标 1 表示有课税扣除，从而区分这两种状态。

在这两种政策空间的转换是一种泊松过程。由课税扣除无效的状态开始，在下一时间段 dt 课税扣除会生效的概率为 $\lambda_1 dt$ ，而当课税扣除最初就有效时，它将会被取消的概率为 $\lambda_0 dt$ 。

直觉表明了下述形式的企业投资政策。在 P 值的一个很小区间内，即区间 $(0, P_1)$ 内，不管课税扣除是否有效，企业都不会投资。在区间 (P_1, P_0) 内，如果课税扣除生效，企业将会投资；如果课税扣除政策无效，则企业会发现最好是等待并希望这样的政策会得到推行。超过 P_0 后，瞬时收益的前景会如此之大，以至于企业会立即投资而不考虑当前的政策。

为确定临界值 P_1 和 P_0 ，我们与以往一样，考虑作为没有课税扣除时的价格 $V_0(P)$ 及课税扣除有效时的价格 $V_1(P)$ 的函数的投资机会的净回报。我们得到关于这些内容的表达式和方程式，以及在临界点它们所满足的条件。

305 在范围 (P_0, ∞) 内，企业往往会立即投资，因此我们有

$$V_0(P) = \frac{P}{\delta} - I \quad (9-17)$$

以及

$$V_1(P) = \frac{P}{\delta} - (1 - \theta)I \quad (9-18)$$

在范围 (P_1, P_0) 内, 如果课税扣除政策有效, 企业立即投资, 因此 $V_1(P)$ 由上面的式 (9-18) 给出, 然而, $V_0(P)$ 要复杂得多。在下一个时间段 dt 内, 课税扣除政策生效的概率为 $\lambda_1 dt$, 企业如果投资, 其价值变为 $V_1(P + dP)$, 否则其价值为 $V_0(P + dP)$ 。这样

$$V_0(P) = e^{-r dt} \{ \lambda_1 dt E[V_1(P + dP)] + (1 - \lambda_1 dt) E[V_0(P + dP)] \}$$

利用伊藤引理展开右边, 保留最主要的 dt 项, 并像以往那样简化, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''_0(P) + (r - \delta) P V'_0(P) - r V_0(P) \\ + \lambda_1 [V_1(P) - V_0(P)] = 0 \end{aligned} \quad (9-19)$$

除新增项包括了 λ_1 以外 (它描述来自课税扣除在不久的将来的期望资本收益), 这是通常的企业等待投资的微分方程, 我们注意到, 在价格范围 (P_1, P_2) 内关于 $V_1(P)$ 的表达式。那么, 我们可以得到微分方程的通解:

$$V_0(P) = B_1 P^{\beta(1)_1} + B_2 P^{\beta(1)_2} + \frac{\lambda_1 P}{\delta(\delta + \lambda_1)} - \frac{\lambda_1(1 - \theta)I}{r + \lambda_1} \quad (9-20)$$

式中, B_1 和 B_2 为待定常数; 而 $\beta(1)_1$ 和 $\beta(1)_2$ 为熟悉的二次式的正根和负根:

$$Q(1) \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - (r + \lambda_1) = 0$$

关于二次式及其根看起来复杂的记号, 是用来把它们与很快就会出现的其他相关的表达式和根区分开来的。

最后, 我们处理区域 $(0, P_1)$ 。这里企业在两个政策空间内等待, 而且每个政策空间都可以转换到另一个中去。沿着与前面推导出等待企业的微分方程式 (9-19) 相同的步骤, 我们得到一对微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''_0(P) + (r - \delta) P V'_0(P) - r V_0(P) + \lambda_1 [V_1(P) \\ - V_0(P)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V''_1(P) + (r - \delta) P V'_1(P) - r V_1(P) + \lambda_0 [V_0(P) \\ - V_1(P)] = 0 \end{aligned}$$

这样产生很容易求解的两个线性组合。定义两个函数, 如

$$V_a(P) = \frac{V_1(P)}{\lambda_0} + \frac{V_0(P)}{\lambda_1}, \quad V_s(P) = V_1(P) - V_0(P)$$

那么

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''_a(P) + (r - \delta)PV'_a(P) - rV_a(P) = 0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''_s(P) + (r - \delta)PV'_s(P) - (r + \lambda_0 + \lambda_1)V_s(P) = 0$$

这些方程的每一个都产生一个关于 P 的幂的解，而 P 的幂则是熟悉的二次方程的根。在每种情形下，我们有 P 的一个拓展到 0 的区间，因此，我们只取其正根。这样

$$V_a(P) = C_a P^{\beta(0)_1}, \quad V_s(P) = D_s P^{\beta(2)_1}$$

式中， C_a 和 D_s 为待定常数； $\beta(0)_1$ 为下列二次方程的正根：

$$Q(0) \equiv \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0$$

而 $\beta(2)_1$ 为下列二次方程的正根：

$$Q(2) \equiv \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - (r + \lambda_0 + \lambda_1) = 0$$

从记忆的角度来看， $\beta(0)$ 来自二次式 $Q(0)$ ，其中常数项既不含 λ_0 也不含 λ_1 ； $\beta(1)$ 来自二次式 $Q(1)$ ，其常数项只含有 λ_1 ； $\beta(2)$ 来自二次式 $Q(2)$ ，其常数项含有 λ_0 和 λ_1 。与以前一样，下标 1 表示正根，下标 2 表示负根，则相关的根满足下面的串不等式：

$$\beta(2)_1 > \beta(1)_1 > \beta(0)_1 > 1 > 0 > \beta(1)_2$$

在这种记号下，我们可以在范围 $(0, P_1)$ 内将 $V_0(P)$ 和 $V_1(P)$ 的解写作：

$$V_0(P) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 C P^{\beta(0)_1} - \lambda_1 D P^{\beta(2)_1}}{\lambda_0 + \lambda_1} \quad (9-21)$$

且有

$$V_1(P) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 C P^{\beta(0)_1} + \lambda_0 D P^{\beta(2)_1}}{\lambda_0 + \lambda_1} \quad (9-22)$$

现在，我们可以把不同空间内的表达式的值联系起来。在临界值 P_1 ，如果课税扣除有效，企业就会投资，因此， $V_1(P)$ 在左边的表达式 (9-22) 与其右边的表达式 (9-18) 满足价值匹配条件和平滑粘贴条件。对 $V_0(P)$ ，这并不是决策的临界值，但是函数在通过这一点时也必须是连续可微的，因此，式 (9-21) 和式 (9-20) 在这一点应当有相等的值和导数。最后，对临界值 P_0 的最优选择， $V_0(P)$ 在左边的表达式 (9-20) 与其右

边的表达式(9-17)应当满足价值匹配条件和平滑粘贴条件。这样我们总共有六个方程式来确定临界值 P_1 和 P_0 以及四个常数 B_1 , B_2 , C_u 和 D_s 。

我们利用数值解来说明这种计算。令 $\alpha=0.1$ 且 $r=0.05$,则 $\delta=r-\alpha=0.05$,在前面的计算中这些值都是非常典型的。令 $I=20$,这正是在给出马歇尔投资临界值 $\delta I=1$ 时的单位选择,并且可以对所遇到的数值给出更简单的解释。在这些数值条件下,而且根本没有课税扣除政策,最优投资的临界值将会是 $P^*=1.3702$ 。这样,超过马歇尔临界值的正常的期权价值溢价为0.37。

我们考虑一个10%的课税扣除,即 $\theta=0.1$ 。如果这种课税扣除总是有效的,临界值会下降10%,即为1.2331。然而,当两个空间可以在泊松过程中来回转换时,这两个临界值会受到影响。我们考察每种情形下颁布法律(λ_1)和取消法律(λ_0)的概率在从0~0.5的范围内变化时,对课税扣除在当前无效时的 P_0 和课税扣除当前有效时的 P_1 这两个临界值的影响。结果显示在表9-3和表9-4中。

表9-3 当税收减免不起作用时的投资临界值(P_0)

($\alpha=0$, $\sigma=0.1$, $r=0.05$, $I=20$)

λ_0	λ_1					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0	1.371	1.498	1.642	1.813	2.003	2.201
0.1	1.371	1.494	1.641	1.813	2.003	2.201
0.2	1.371	1.492	1.640	1.813	2.003	2.201
0.3	1.371	1.491	1.639	1.812	2.003	2.201
0.4	1.371	1.491	1.638	1.812	2.003	2.201
0.5	1.371	1.490	1.638	1.812	2.002	2.200

表9-4 当税收减免起作用时的投资临界值(P_1)

($\alpha=0$, $\sigma=0.1$, $r=0.05$, $I=20$)

λ_0	λ_1					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0	1.233	1.233	1.233	1.233	1.233	1.233
0.1	1.177	1.196	1.209	1.216	1.221	1.224
0.2	1.152	1.176	1.193	1.204	1.212	1.216
0.3	1.135	1.162	1.182	1.195	1.204	1.210
0.4	1.125	1.153	1.174	1.188	1.198	1.205
0.5	1.117	1.145	1.167	1.183	1.194	1.201

首先考虑课税扣除当前无效时的情形。表 9—3 显示出当颁布法律 λ_1 的概率在下一年之内提高, 临界值 P_0 也提高。这在直觉上非常明显, 投资成本下降的前景提高了等待的价值。给人留下深刻印象的是这种影响的数量级。如果课税扣除从来没有被提到, 超过正常回报 1 的普通期权价值溢价为 0.37; 一项 10% 的课税扣除的法律 30% 的通过概率会将这一贴息翻番到 0.81。考虑到课税扣除具有将贴息降低到 0.23 的效力, 因此, 尽管政策还在被讨论, 法律的通过还不确定, 课税扣除政策的影响却已非常强烈地抑制了投资。

即使当课税扣除并没有处于适当的位置时, 临界值 P_0 也会受到取消它的概率 λ_0 的影响。这是因为, 当课税扣除被颁布时, 企业在将来的时间内随机地计算它, 经济条件可能非常不利, 而且在课税扣除充分改善投资环境之前, 它们也可能会被取消, 这就降低了企业现在等待的价值。但是, 这种影响在数量上是可以忽略不计的。

308 下面考虑课税扣除当前有效时的情形。现在相关的临界值为表 9—4 中的 P_1 。我们看到, 它随着 λ_0 的提高而降低: 失去课税扣除的前景使得企业更愿意现在就投资。这种影响在数量上不像前面的 λ_1 对 P_0 的推迟影响那么强烈。这里, 在贴息从 0.233 减半到 0.117 之前, 我们需要 λ_0 从 0 一直增加到 0.5。

此外, λ_1 的增加提高了 P_1 。要点是, 在通过法律的一个较高概率水平上, 即使现在有效的课税扣除被取消了, 它也会被相当快地恢复, 立即投资的需要并不是很强烈。当然, 如果 $\lambda_0 = 0$, 这个问题是无关的, 但是对 λ_0 较大的值, 这个问题变得非常引人注目。如果 $\lambda_1 = 0.5$, 则取消当前的课税扣除的前景 (较高的 λ_0) 对投资的促进效应非常小。

309 这些结论表明, 促进投资政策的通过存在不确定性似乎对投资有非常强的决定效应。事实上, 如果政府试图加速投资, 所能做的最好的事情就是立即通过课税扣除的法律, 并且要很快取消它, 且发誓永远不会再恢复 (高的 λ_0 和低的 λ_1)。当然, 这样一种政策的可信性是毫无疑问的。

尽管我们的分析是在企业水平上进行的, 但利用第 8 章的方法我们可以发现其产业上的意义。如果我们考虑由许多此类企业所组成的竞争性产业, 每家企业投资决策的价格临界值将简单地变成随机动态均衡产业的价格过程的上限。现在, P_0 的增加将被解释为由于单个企业投资的减少所引起的减少产业供给的努力。当管理部门、国会及媒体之间还在对是否制定课税扣除进行争论时, 企业等待争论结果, 而且它们的等待隐含着消费者的较高价格

形式的成本。

麦特考夫和哈希特 (Metcalf and Hassett, 1993) 拥有一个更一般的模型, 其中投资规模自身会影响到选择。他们发现, 政策不确定性不仅提高了企业投资的临界值, 而且降低了其投资的规模。当我们在第 11 章讨论改变规模的投资理论时, 读者有能力把这一推广作为一个练习来处理。

9.3 垄断性产业的例子

我们已经如此深入地考虑了两种极端的的结构, 即关于这一点的第 5 章~第 7 章中的垄断及第 8 章和第 9 章中的完全竞争市场。其理由是实践性的, 而不是基础性的。在我们随机动态集合中的垄断性产业显示出极大的困难。关于这种应用的随机博弈理论的发展是最近的事情, 利用这种理论的易处理的模型还非常少见。我们将讨论一个特别简单的例子, 以斯梅特 (Smets, 1991) 的理论为基础, 它给出了其中的一些问题。更一般、更详细的处理必须等待更进一步的研究。

一般的要点并非难以陈述。一方面, 不确定性和不可逆性隐含着等待的期权价值, 因此, 每一企业投资决策中有更多的迟疑; 另一方面, 对竞争对手优先购买的恐惧表明需要很快行动。这些考虑中哪个更重要取决于问题中的参数, 以及潜在冲击的当前状态。我们的简单模型适于说明这种紧张状态。

310

我们考虑两家企业, 每家都有生产出单位产出流的潜力, 它可以通过承受沉没成本 I 来活动。生产中没有可变成本, 而且我们假定该产业的需求有充分的弹性来确保生产能力。这样, 产业的产出为 0, 1 或 2, 取决于活动企业的数量。价格由需求函数式 (9-1) 给出, 我们这里重述:

$$P = YD(Q)$$

而且增加的冲击 Y 服从几何布朗运动式 (9-2)。为简化记号, 我们假定企业为风险中性的, 或者 Y 的风险与整体的市场风险之间为零相关。这样, 所有的确定和不确定性的未来成本和收益的贴现率都是无风险利率 r 。

动态博弈经常是向后解, 现在也不例外。我们由假定其中一家企业早已投资开始分析, 并找到另一家企业的最优决策, 这里我们称另一家企业为追随者。然后, 我们考察任何一家企业都不投资的情形, 并考虑任意一家企业在知道另一家企业会以它的计算方式作出反应并正在决定是否首先行动时的决策。

追随者利润流将为 $YD(2)$ 。沿着同样的步骤，我们可以发现加速追随者投资的临界值 Y_2 ，它满足

$$Y_2 D(2) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta I \quad (9-23)$$

式中， β_1 和 δ 都为通常的含义。

如果 $Y \geq Y_2$ ，追随者将立即投资，并得到价值 $\frac{YD(2)}{\delta} - I$ 。如果 $Y < Y_2$ ，追随者将等待，直到临界值第一次达到才投资，在这一点它得到 $\frac{Y_2 D(2)}{\delta} - I$ 。因此，其预期现值为

$$E[e^{-rT}] \left[\frac{Y_2 D(2)}{\delta} - I \right]$$

式中， T 是从 Y 开始的需求冲击的随机过程达到 Y_2 时的（随机的）第一时刻。我们在附录中计算了这一预期。利用它，追随者的价值可以表述为

$$V_2(Y) = \begin{cases} \frac{YD(2)}{\delta} - I, & Y \geq Y_2 \\ \left(\frac{Y}{Y_2} \right)^{\beta_1} \left[\frac{Y_2 D(2)}{\delta} - I \right], & Y < Y_2 \end{cases} \quad (9-24)$$

311 这一函数的图像在图 9—2 中可以看到。注意到，这两个分支在点 Y_2 相切；这类似于布朗运动在空间转换点的现值的平滑粘贴特征。^[7]

现在假定没有一家企业已经投资，而它们中的一个正企图成为领导者。（当然这并不需要在实质上提高 Y 值的一定范围，但是，为了确定立即投资至少对一家企业来讲是最优的，从而找到 Y 的这些范围，我们必须准确地考虑假定的情节。）

312 在一家企业作出这种计算时，当它看到它的对手已经投资之后，企业将考虑其他企业的行动。这正是我们在前面所研究过的追随者的决策。因此，如果 $Y \geq Y_2$ ，追随者将立即投资，而领导者的利润也会为 $YD(2)$ ，其值与追随者的值是一样的。如果 $Y < Y_2$ ，则追随者将等待，直到临界值达到 Y_2 追随者投资。同时，领导者将会有较大的利润流 $YD(1)$ ，其期望值为

$$E \left[\int_0^T e^{-rt} YD(1) dt \right] + \epsilon [e^{-rT}] \left[\frac{Y_2 D(2)}{\delta} - I \right]$$

式中，跟以前一样， T 是从 Y 开始的需求冲击的随机过程达到 Y_2 时的（随机的）第一时刻。另外，我们在附录中计算出其期望值，并在这里陈述结论。领导者的价值为

$$V_1(Y) = \begin{cases} V_2(Y) = \frac{YD(2)}{\delta} - I, & Y \geq Y_2 \\ \left(\frac{1}{\delta}\right)YD(1)\left[1 - \left(\frac{Y}{Y_2}\right)^{\beta_1 - 1}\right] + \left(\frac{Y}{Y_2}\right)^{\beta_1} \frac{Y_2 D(2)}{\delta} - I, & Y < Y_2 \end{cases} \quad (9-25)$$

这有更复杂的图像，如图9—2所示。在 $Y < Y_2$ 的范围内，它为凹的，其斜率在点 Y_2 不连续。^[8]后者当然是这样一个事实的结果，即追随者的决策在点 Y_2 的变化是不连续的。

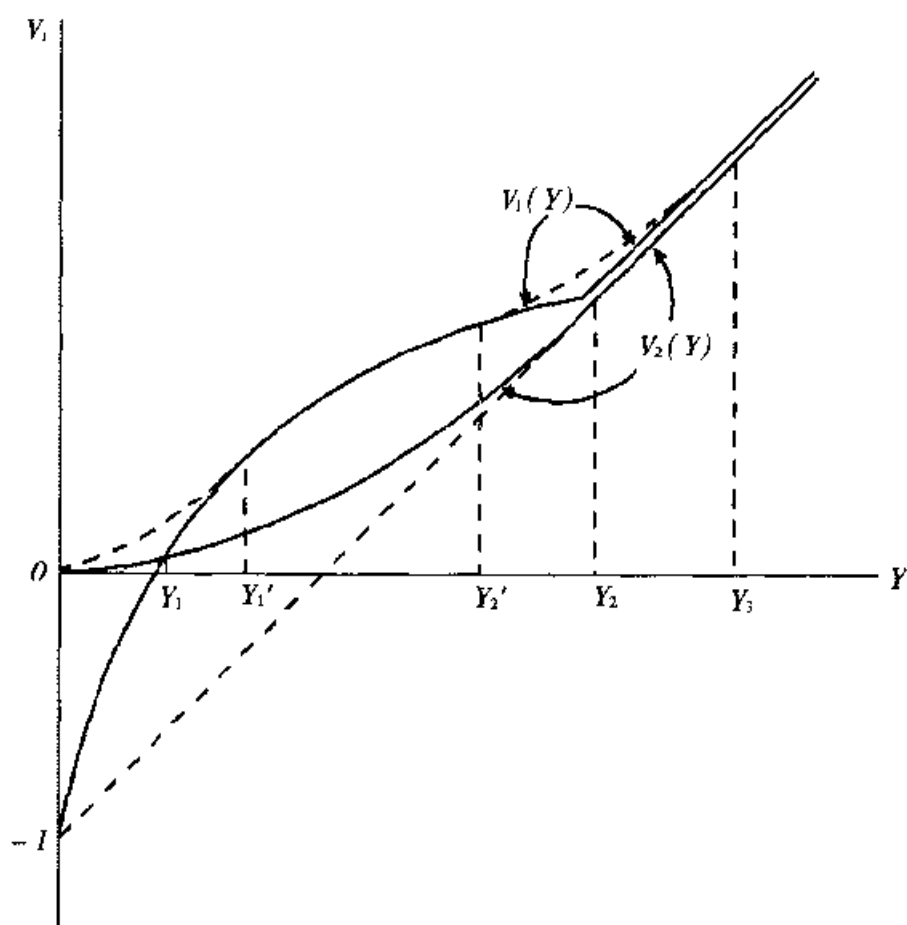


图9—2 双头垄断下领导者与追随者的价值

对于从 Y 到 Y_3 的左边这一范围内，领导者的价值超过了追随者的价值，因为它在追随者投资之前得到了更高的利润。然而，对于 Y 的一个非常小的价值范围，领导者的价值小于追随者的价值，因为领导者承受了以前的投资成本，但是起初只有很低的利润流，两条曲线在点 Y_1 相交。

我们并没有指定哪一家企业为领导者，每家企业自身的利润考虑应当决

定它是想做领导者还是追随者。结果是不同的，这取决于初始环境。

如果初始的 Y 低于 Y_1 ，没有一家企业会投资。当 Y_1 达到时，一家企业会立即投资，而另一家企业会等待直到 Y_2 ，但是两者在这两种角色间是无差异的。

注意到在点 Y_1 ，我们有 $V_1(Y_1) = V_2(Y_1) > 0$ 。则方程为

$$\frac{Y_1 D(1)}{\delta} \left(1 - \left(\frac{Y_1}{Y_2} \right)^{\beta_1} \right) + \left(\frac{Y_1}{Y_2} \right)^{\beta_1} \frac{Y_2 D(2)}{\delta} - I > 0$$

313 或者

$$\frac{Y_1 D(1)}{\delta} > I - \left(\frac{Y_1}{Y_2} \right)^{\beta_1} \frac{D(1) - D(2)}{\delta} > I$$

因此， $Y_1 D(1) > \delta I$ ，则第一次投资不会发生，除非第一个投资者的当前利润流相对于沉没成本提供了超常的回报。其中的理由与完全竞争情形下的理由是类似的。即使等待的价值为零，试图成为第一家投资的企业认识到，未来其他企业的进入会降低利润流向上的分布。因此，它需要足够的当前贴息来补偿。可是，不像在完全竞争的情形下，这家企业在这一点的期望现值为正。在只有两家企业且没有自由进入的条件下，这在直觉上是合理的。

原则上把这种分析推广到 N 家企业是简单的，但在实践中却是非常凌乱的。然而，在没有做正式的工作之前，结论也是明显的。当最小的 Y ，如 Y_1 ，引起了第一家企业的投资，我们将有 $Y_1 D(1) > \delta I$ 且 $V_1(Y) = \dots = V_N(Y_1)$ 。当 $N \rightarrow \infty$ 时， $V_1(Y_1) = \dots = V_N(Y_1) \rightarrow 0$ 。

下面假定 Y 从范围 (Y_1, Y_2) 内的某一点开始，则每家企业通过抓住领导角色一定能获利。没有一家企业能负担等待的期权价值，因为如果它不投资，另一家将会投资。

注意，如果两家企业都立即投资，每家都有价值 $\frac{YD(2) - I}{\delta}$ 。这甚至低于 Y 在范围 (Y_1, Y_2) 内时追随者的 $V_2(Y)$ ，因此，从它们的整体的观点来看，同时投资就是一种错误。当然，这种错误在博弈均衡中会发生。如果博弈是在离散时间内进行的，均衡可能是一种混合策略，其中每家企业都独立地选择立即投资的概率。考虑到另一家企业正在选择混合均衡，每家企业对投资或不投资都是无差异的。然而，在正概率（这两个单独的投资概率的产出物）条件下，两家企业一起投资并获得较低的价值。在连续时间里，我们愿意这种同时发生的概率趋于零。正确地做到这一点需要一些精巧的极限方面的考虑。我们忽略了这些细节，并推荐有兴趣的读者参看富登伯格和泰勒

尔 (Fudenberg and Tirole, 1985) 的著作。

我们仅仅简述导致连续时间均衡的结果。一家企业, 随机地选择立即获得投资, 并因此而得到领导者 (较大的) 价值。另一家企业等待, 直到 Y_2 达到临界值, 并因此获得追随者 (较低的) 价值。存在这样两种类型的均衡, 其中这两种角色在这两家企业之间是相互变化的。由于企业在经济学上是同一的, 这两种均衡对我们的目的而言是不能区分开来的。在实践中, 企业之间的一些微小的未能辨明的差别可能主导了哪一个企业会首先投资。

如果企业的领导者和追随者的角色是外生性预先指定的, 则结论就会不同。现在, 在领导者投资之前, 追随者不能投资。期权价值拥有通常的形式, 对于包括了零在内的 Y 的范围, 期权价值为 $A_1 Y^{\beta_1}$, 对既不包括零也不包括无穷的范围, 期权价值为 $B_1 Y^{\beta_1} + B_2 Y^{\beta_2}$, 其中参数中的 β_1 为一般二次式的正根, β_2 为二次式的负根。图 9—2 中平滑粘贴到立即投资的领导者价值的虚线显示了这些期权的价值。如图所示, 它们与后者在点 Y'_1, Y'_2 和 Y_3 相遇。如果 Y 在范围 (Y'_1, Y'_2) 内 (而追随者将等到 Y 到达 Y_2 时才投资) 及 Y 超过 Y_3 时 (当另一家企业立即追随时), 事先指定的领导者会立即投资。对于 Y 或者低于 Y'_1 , 或者在范围 (Y'_2, Y_3) 内时, 领导者将选择等待。对一定的参数值, 期权价值曲线全部位于 $V_1(Y)$ 之上, 那么领导者会在整个的范围 $(0, Y_3)$ 内等待。

9.4 文献导引

只要市场是完全的, 在动态不确定环境下的最优竞争性均衡的一般观念就回到了阿罗-德布鲁框架。卢卡斯和普雷斯科特 (Lucas and Prescott, 1971) 最早提供了明确说明这一点的详细的投资模型。转换资本或劳动力中的不可逆成本自身并不会导致市场失灵, 马萨 (Mussa, 1982) 在变化的国际贸易条件中经济调整的背景下过分强调了这种事实, 但是他仅仅考虑了针对单个未被预料到的冲击的确定性反应。

卢卡斯和普雷斯科特 (Lucas and Prescott, 1974) 研究了部门间劳动力流动成本很高的情形下的随机动态均衡模型。他们假定风险中性, 因此, 均衡再一次是社会最优的。迪克西特和罗布 (Dixit and Rob, 1993a, b) 引入了风险规避和不完全风险市场, 并在这种背景下考察了一些能够改善次优均衡的政策。

利希 (Leahy, 1992) 首先发现了这样一个事实, 即竞争性企业将作出最优进入决策, 即使它们短视地行动且忽略所有未来的进入时也是如此。

我们对价格控制的动态效应的处理沿着迪克西特 (Dixit, 1991b) 的论述而进行。对于农业中价格稳定政策的完整分析也可参见纽伯里和斯蒂格利茨 (Newbery and Stiglitz, 1981) 的论述。

315 我们对政策不确定性的处理以梅特卡夫和哈希特 (Mercafi and Hasset, 1993) 的理论为基础。其他从实物期权角度分析税收政策和投资的工作包括马伊德和迈尔斯 (Majd and Myers, 1986)、麦凯-梅森 (MacKie-Mason, 1990) 的论述。罗德里克 (Rodrik, 1991) 利用不同的技术手段考察了设计激励投资的政策改革 (如税收激励) 的不确定性的影响, 并指出如果每年政策倒退都有一定的概率, 最终的不确定性会抵消政策本来可以对投资产生的任何激励作用。埃泽恩曼和马里恩 (Aizenman and Marion, 1991) 发展了一个类似模型, 其中税率可能上升或下降, 并表明这种不确定性会减少对物质资本和人力资本的不可逆投资, 从而抑制了增长。

一些学者已经利用两阶段模型研究了在垄断条件下对赶早投资的策略性激励及面临不确定条件下价值的灵活性之间的权衡: 如阿佩鲍姆和利姆 (Appelbaum and Lim, 1985)、斯潘塞和布兰德 (Spencer and Brander, 1992) 及库拉蒂拉卡和裴罗蒂 (Kulatilaka and Perotti, 1992) 的论述。这些学者中的最后两位指出了非常有趣的一点。在数量固定的双头垄断中, 首先行动者得到较大的市场份额。因此, 作为需求冲击变量的函数的领导者利润比作为需求冲击变量的函数的追随者利润要凸得多。结果, 不确定性的提高增加了早期投资的相对价值。

双头垄断在连续时间框架下的模型非常少见, 因为支持连续时间随机博弈的理论自身还是一个正在研究的主题。达特阿和拉斯蒂奇尼 (Dutta and Rustichini, 1991) 的文章提供了有希望的框架, 斯梅特 (Smets, 1991) 利用它建立了双头垄断的模型。我们的处理就是沿着他的思路。

附录

一些预期现值

这里我们建立第 9.3 节中所介绍的公式:

$$E[e^{-rT}] \text{ 和 } E\left\{\int_0^T e^{-rt} Y dt\right\}$$

当 Y 服从几何布朗运动式 (9-2), T 是从一般初始位置 Y 开始到达固定水平 Y_2 时随机地第一时刻。关于这些计算表达式的更一般的方法, 参见哈里森 (Harrison, 1985, p.42) 或卡林和泰勒 (Karlin and Taylor, 1975, p.362) 的论述。

令 $f(Y)$ 为这些预期的第一个。只要 $Y < Y_2$, 则我们根本不可能选择一个充分小的 dt , 在下一个短时间段 dt 内 Y 达到了 Y_2 的水平。那么问题从新水平 ($Y + dY$) 重新开始。因此, 我们有类似于动态规划的递归表达式:

$$f(Y) = e^{-rdt} E[f(Y + dY)]$$

展开右边, 考虑到 Y 服从式 (9-2), 利用伊藤引理, 上式变成

$$f(Y) = [1 - rdt + o(dt)][f(Y) + \alpha Y f'(Y) dt + \frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 f''(Y) dt + o(dt)]$$

简化之, 并令 $dt \rightarrow 0$, 我们得到微分方程:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 f''(Y) + \alpha Y f'(Y) - r f(Y) = 0$$

通解为

$$f(Y) = A_1 Y^{\beta_1} + A_2 Y^{\beta_2}$$

式中, β_1 为标准二次式的正根; β_2 为其负根。

常数 A_1 和 A_2 利用一对边界条件来确定。当 Y 接近 Y_2 时, T 会很小, e^{-rT} 接近于 1; 因此, $f(Y_2) = 1$ 。当 Y 非常小时, T 为非常大, 而 e^{-rT} 接近于 0; 因此, $f(0) = 0$ 。利用这些条件, 我们得到 $A_2 = 0$ 且 $A_1 Y^{\beta_1} = 1$, 因此

$$f(Y) = \left(\frac{Y}{Y_2}\right)^{\beta_1}$$

这被用于前面的式 (9-24) 和式 (9-25) 中。

类似地, 定义

$$g(Y) = E\left\{\int_0^T Y_t e^{-rt} dt\right\}$$

上式满足微分方程:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 g''(Y) + \alpha Y g'(Y) - r g(Y) + Y = 0$$

通解为

$$g(Y) = B_1 Y^\beta + B_2 Y^{\beta_2} + \frac{Y}{r - \alpha}$$

且边界条件为 $g(Y_2) = 0, g(0) = 0$ 。因此

$$B_2 = 0$$

且

$$B_1 = -\frac{Y_2^{1-\beta_1}}{r - \alpha}$$

这用于前面的式 (9-25) 中。

【本章注释】

[1] 在阅读了第 11.1 节后，读者可能会发现，回到这一节来比较这些方法和结论是非常有用的。

[2] 由于 Q 作为参数进入了微分方程式 (9-4)，积分的常数也取决于 Q 。

[3] 我们几乎已经证明了特殊例子的均衡和优化之间的一致性。关于这一点的一般和严格的证明，参见卢卡斯和普雷斯科特 (Lucas and Prescott, 1971) 的著作。

[4] 如果 N 相对于 Q 较大，可能存在一个角点解，在这一点，拥有最高的初始边际成本 $c_q(0, n)$ 的一些企业为零产出。这会在不改变任何经济意义的条件下使计算问题复杂化，因此，我们忽略这种考虑。

[5] 当然，即使对未来市场条件没有不确定性，价格也会低于最小平均可变成本，如果企业沿着学习曲线中急转直下的部分向下移动。最后，价格可能会低于最小平均可变成本，由于灵活的经济条件及学习曲线的联合——例如，在半导体的情形下。

[6] 根据这种分析，具有讽刺意义是，政府经常追求一些实际上降低了劳动力流动性的政策，例如，有利于长期居住在一座城市里的居民的公共住房政策。那么，有必要采取各种能改善被卷入其中的个人所面临的较大的收入风险的社会保障措施。

[7] 实际上这正是我们在第 5 章中的式 (5-6) 的最先投资规则和价值公式的另一种推导方法和表达方式。

[8] 如果 β_1 足够大， $V_1(Y)$ 实际上最高可以达到 Y_2 的左边，然后以负的斜率来逼近 Y_2 ，但是这不会影响以后的定性结论。

金融学前沿译丛

不确定条件下的投资

第V篇

推广与应用



第10章 序列投资

319

在本章及后面两章中，我们考察单个企业的投资决策。在第5章、第6章和第7章，我们说明了一系列模型，其中包括企业必须决定何时（及是否）对一个单一项目进行投资。在第5章，我们假定那个项目的价值沿着一个外生的随机过程变化，而且推导出最优投资规则。在第6章，允许项目产出的价格以外生的随机过程变化，这样，给定产出的可变成本，推导出项目的价值及投资规则。最后，在第7章，进一步推广了该模型，允许项目的封存及随后的重新启动，还有项目的废弃。

在这三章中，我们考虑了单个、离散项目，因此，它们是单一的初始投资决策。然而，在许多情形下，投资决策是连续作出的，而且是以特

定的顺序作出的。例如，对新的石油生产能力的投资就是一个两阶段过程。第一，必须得到石油储备，或者通过开采，或者通过外购。第二，必须建立钻井和管道，这样石油可以从这些储备中生产出来。所有石油公司可能会在第一阶段投资（如通过购买已经探明的石油储备），但会采取等待的决策而不是立即投资于第二阶段。对新飞机生产线的投资也是一个多阶段过程，首先是工程设计，然后是样机的生产、检测，最后是生产投入前的机床安装阶段。制药公司对新药品的投资首先从新化合物诞生的研究和开发（有一定的概率）开始，接着是广泛的试验，直到获得生产批准，最后是生产设施的建设及产品的营销。飞机公司和制药公司都可以决定进行这些投资的第一阶段，然后等待以后阶段的投资决策。

即使是看起来仅有一次决策的投资也是连续性投资。理由是，许多项目（特别是较大的项目）花费了大量的时间来完成，可能会在中途停止或暂时地或永久地放弃。结果，我们可以认为这种项目由多个阶段组成；每1美元的花费都给予该企业一个期权（它可能会也可能不会执行），并继续支出下一美元。

连续投资的最主要特征如果是全部项目的价值下降，或如果完成投资的预期成本上升，具有暂时或永久停止投资的能力。（如果一家企业没有其他选择而只能完成该项目，那么一旦项目开始，投资将再次仅包括单一决策）。这种在中途停止的可能性使得这些投资与混合期权相类似；每一阶段的完成（或每1美元投资后）都赋予企业完成下一阶段投资的一种期权（或投资下一美元）。投资问题归结为找到一种作出这些连续（和不可逆）开支的或有计划。

在本章中，我们考察了连续投资问题的几个类型不同的例子。在每种情形下，我们都将试图描绘出金融期权的评价与执行的相似物，正如我们在整本书中所做的那样。我们从一些相当简单的两阶段和三阶段投资问题开始，并利用它们来阐述如何评价企业投资期权、找到最优投资规则的基本方法。下面，我们转到连续投资问题——企业每花费1美元的决策；完成项目需要耗费时间，根据市场状况的变化，企业可以适时选择暂停投资。在研究这些投资问题时，我们对已完成项目的价值的不确定性（例如项目产出价格的不确定性）与实际正在完成的项目成本的不确定性作出区分。

在所有这些投资问题中，企业直到项目完成后才能得到现金流。（对新飞机的工程设计和模型生产阶段进行投资并不足以保证企业销售飞机并获得利润。）我们还将考察企业沿着学习曲线向下移动时的相关问题。在这里，

当前的生产承担了两项功能：产生了瞬时利润流，而且降低了未来的成本。后者就像是一种投资。在第11章，我们讨论通常意义上的累加性投资模型，其中每单位资本的投入都将会对利润流有贡献。

本章及下一章的数学模型包括了两个状态变量。一个是完成的阶段数或资本配置量；另一个为价格或投资的其他一些利润指标。那么，来自动态规划或者或有债权分析的微分方程为偏微分方程，项目或者期权的价值为因变量，两种状态变量为自变量。这种方程的解一般需要数值方法。对于我们所考虑的此类模型，这样的解相对容易。在本章的附录中，我们简要讨论了数值方法，在正文中，我们把它应用于特殊的模型中。

10.1 开始和完成多阶段项目的决策

在第6章，我们采用回溯法找到了项目的价值及最优投资规则。给定项目产出价格 P 的一个随机过程，我们导出了项目价值 $V(P)$ 。然后，给定 $V(P)$ ，我们可能找到项目中投资期权的价值 $F(P)$ 及临界价值 P^* ，在这一点选择投资是最佳的。考虑到为找到 $F(P)$ 和 P^* ，我们需要 $V(P)$ ，因为 $V(P^*)$ 出现在与 $F(P)$ 相伴的两个边界条件中；同理，我们可以利用这种回溯法（向后求解）来解决连续投资问题，其中投资发生在两个或更多离散的阶段。

要了解如何利用这种方法进行投资决策，考虑新石油加工厂的一个两阶段投资。第一，必须得到石油储备，通过开采或购买，其成本为 I_1 。第二，必须建立开发井（也许还有管道），其成本为 I_2 。假定石油价格 P 服从特定的外生性随机过程，则企业开始于一个价值为 $F_1(P)$ 的期权，即投资于储备。作出这种投资给企业买来了另一个期权，价值为 $F_2(P)$ ，对开发井进行投资。作出第二阶段的投资产生了生产能力，价值为 $V(P)$ 。

继续采用回溯法来找到最优投资规则。首先，正如我们在第6章所证明的， $V(P)$ 是企业经营期权的价值，而且可以据此进行计算。接下来，实际上沿着与我们在第6章得到单个投资期权的价值时相同的方法就可以发现 $F_2(P)$ ，它满足这样一个微分方程：约束于端点（例如 $F_2(0) = 0$ ）的边界条件以及在企业应当作出投资开发油井的临界价格 $r = 0.02$ ， $\sigma = 0.20$ ， $\delta = 0.06$ 时的“价值匹配”和“平滑粘贴”的边界条件。最后，可以找到 $F_1(P)$ 。

322 它满足一个熟悉的微分方程和熟悉的边界条件，但是现在得到另一个临界价格 P_1^* ，在这一点应当作出第一阶段的投资。注意到由于来自第一阶段投资的回报为 $F_2(P)$ ，即在第二阶段投资的期权价值，为解出 $F_1(P)$ 和临界价格 P_1^* ，需要知道 $F_2(P)$ 。这就是为什么要采用回溯法来解决这个投资问题。

直观地，我们可以预期 $P_1^* > P_2^*$ 。正如在第 5 章和第 6 章所看到的，获得风险性回报所需的沉没成本越高，引起投资的回报的边际价值越高（在这种情形下为较高的临界价格）。因此，假定一个项目有两个阶段（例如，每一阶段的花费为 500 万美元），两个阶段都还没有完成的投资决策在继续投资时要比分阶段投资所需要的临界价格高，从而产生的剩余沉没成本亦较小。

三阶段项目的推广是很明显的。现在，令 $F_1(P)$ 表示在第一阶段投资的期权价值， $F_2(P)$ 表示在第二阶段投资的期权价值，而 $F_3(P)$ 表示在第三阶段投资的期权价值。我们像以前那样采用回溯法。首先，找到已经完成的项目的价值 $V(P)$ 。其次，利用这个值来找到 $F_3(P)$ 和临界价格 P_3^* 。再次，利用 $F_3(P)$ 找到 $F_2(P)$ 和临界价格 P_2^* 。最后，利用 $F_2(P)$ 找到 $F_1(P)$ 和在第一阶段最好是投资的临界价格 P_1^* 。

我们已经假定，产出价格 P 为（外生的）随机状态变量，因此， V ， F_1 ， F_2 等都是 P 的函数。然而，在一些情形下，除非在项目已经完成并开始产生产出流之后，并不存在这种实际的产出价格。某种东西在被出售前，例如家庭录像机或个人计算机，其实际价格并不能观察到。投资于此项技术和生产设施的企业通过一些可观察到的指标来估算这种产品的价格，例如用户愿意支付哪些相关服务费用，或者通过市场调查来获得相关信息。在我们的模型中，当相关价格不能直接观察到时，可将 P 假定为某种可观察到的指标或盈利能力。为简化起见，我们将继续把这种状态变量当做价格。

这样一来，在实际运算中，前面描述的计算方法可能没有整体算法更清晰明了。因此，我们将详细介绍两阶段项目的情形。

10.1.1 两阶段项目的投资规则

让我们更详细地考察两阶段项目。像第 6 章那样，假定该项目一旦完成会以运营成本 C 在每一产出阶段有 1 单位的产出。该产出可以按价格 P 售

323 出，该价格服从几何布朗运动：

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \quad (10-1)$$

假定这种价格不确定性由资本市场来描述,因此,我们可以使用或有债权方法。令 μ 表示应用于 P 的经风险调整的贴现率,并令 $\delta = \mu - \alpha$ 。正如在第6章所述,假定当 P 下降到低于 C 时,运营可以暂时地且无代价地推迟;当 P 上升到高于 C 时,可以无代价地恢复。因此,利润流由 $\pi(P) = \max[P - C, 0]$ 给出。

我们假定,在项目第一阶段投资需要沉没成本 I_1 ,在第二阶段投资需要沉没成本 I_2 。通过从后向前的计算,我们现在可以解决这个投资问题。首先找到完成项目的价值 $V(P)$,然后找到在第二阶段投资的期权价值 $F_2(P)$ 以及投资的临界价格 P_2^* ,最后找到在第一阶段投资的期权价值 $F_1(P)$ 及相应的临界价格 P_1^* 。

1. 项目的价值

我们已经知道如何找到 $V(P)$ 。在第6.2节中,我们详细地介绍了它的推导过程。在这里,仅仅总结一下这些步骤。

考虑到 $V(P)$ 必须满足下面的微分方程:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + (r - \delta)PV'(P) - rV(P) + \pi(P) = 0 \quad (10-2)$$

约束于 $V(0) = 0$ 且 $V(P)$ 和 $V_P(P)$ 在 $P = C$ 点连续。其解为

$$V(P) = \begin{cases} A_1 P^{\beta_1}, & P < C \\ B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}, & P > C \end{cases} \quad (10-3)$$

式中,常数 β_1 和 β_2 为基本二次方程的解,即

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} < 0$$

常数 A_1 和 B_2 可以从 $V(P)$ 和 $V'(P)$ 在 $P = C$ 点连续确定出来,且有

$$A_1 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta} \right) \quad (10-4)$$

$$B_2 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta} \right) \quad (10-5) \quad 924$$

式(10-3)、式(10-4)和式(10-5)对任意的 P 给出了已完成项目的价值 $V(P)$ 。

2. 第二阶段的投资

用第 6 章对单一阶段项目的投资问题的相同方法, 我们找到在项目的第二阶段投资的期权价值 $F_2(P)$, 以及最佳投资点所要求的临界价格 P_2^* 。期权价值必须满足微分方程:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 F_2''(P) + (r - \delta) P F_2'(P) - r F_2(P) = 0 \quad (10-6)$$

约束于

$$F_2(0) = 0 \quad (10-7)$$

$$F_2(P_2^*) = V(P_2^*) - I_2 \quad (10-8)$$

$$F_2'(P_2^*) = V'(P_2^*) \quad (10-9)$$

我们可以先猜测然后再确认 $P_2^* > C$, 因此, 我们在边界条件式 (10-8) 和式 (10-9) 中利用运营区域, 即 $P > C$ 时 $V(P)$ 的解。那么我们得到下面的解:

$$F_2(P) = D_2 P^{\beta_1} \quad (10-10)$$

从边界条件式 (10-8)、式 (10-9) 中, 我们确定出:

$$D_2 = \frac{\beta_2 B_2}{\beta_1} (P_2^*)^{(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{1}{\delta \beta_1} (P_2^*)^{(1 - \beta_1)} \quad (10-11)$$

式中, P_2^* 为下述方程的解:

$$(\beta_1 - \beta_2) B_2 (P_2^*)^{\beta_2} + (\beta_1 - 1) \frac{P_2^*}{\delta} - \beta_1 \left(\frac{C}{r} + I_2 \right) = 0 \quad (10-12)$$

回顾第 6 章必须通过数值方法才能解出式 (10-12) 的 P_2^* 。

由式 (10-10) 给出的解适应于 $P < P_2^*$ 。当 $P \geq P_2^*$ 时, 企业执行其投资期权, 且 $F_2(P) = V(P) - I_2$ 。这对于后来的步骤是非常重要的, 因此, 我们重新表述如下:

$$F_2(P) = \begin{cases} D_2 P^{\beta_1}, & P < P_2^* \\ V(P) - I_2, & P \geq P_2^* \end{cases} \quad (10-13)$$

3. 第一阶段的投资

325

给出 $F_2(P)$ 和 P_2^* , 现在我们可以回到项目的第一阶段并找到该阶段的投资期权价值 $F_1(P)$ 及临界价格 P_1^* 。通过进行通常的步骤, 我们可以确定 $F_1(P)$ 也满足微分方程式 (10-6), 但是现在受约束的边界条件变为

$$F_1(0) = 0 \quad (10-14)$$

$$F_1(P_1^*) = F_2(P_1^*) - I_1 \quad (10-15)$$

$$F'_1(P_1^*) = F'_2(P_1^*) \quad (10-16)$$

通解的形式为

$$F_1(P) = D_1 P^{\beta_1} \quad (10-17)$$

我们可以利用边界条件式(10-15)和式(10-16)来找到常数 D_1 ^①和临界价格 P_1^* 。然而,当把边界条件右边的 $F_2(P)$ 代入时,我们需要知道 P_1^* 是大于还是小于 P_2^* ;注意到从式(10-13)中,如果 $P_1^* < P_2^*$,则 $F_2(P_1^*) = D_2(P_1^*)^{\beta_2}$;但如果 $P_1^* > P_2^*$,则 $F_2(P_1^*) = V(P_1^*) - I_2$ 。

正如我们在前面所解释的,直觉上我们预期 P_1^* 大于 P_2^* ;现在我们正式地说明这一点。假定 $P_1^* \leq P_2^*$,那么 $F_2(P_1^*) = D_2(P_1^*)^{\beta_2}$,且边界条件式(10-16)隐含着 $D_2 = D_1$,这与边界条件式(10-15)相矛盾。因此,我们必须有 $P_1^* > P_2^*$ 。

由于 $P_1^* > P_2^*$,而且在这个模型中投资会被立即完成(在 P 有机会发生变化之前),我们知道,一旦 P 达到 P_1^* 且企业投资,它就会完成项目的这两个阶段。换句话说,企业永远不会先投资于第一阶段,然后宁愿等待也不进行第二阶段的投资。结论似乎有点虎头蛇尾的感觉,读者也许在想我们为什么要这么麻烦地解决这个两阶段问题?为什么不简单地联合这两个阶段,令 $I = I_1 + I_2$,然后利用第6章所推导出来的投资问题的解?我们这样做是基于两个相关的原因。第一,在现实世界中,投资需要花费时间,因此,企业确实一直先完成项目的早期阶段,然后在继续进行后面的阶段之前等待一段时间。第二,这两个阶段可能需要不同的技术和管理技能,或者在不同的国家获得的利益不同,或者它们可能受到不同税收政策的约束。由于这些原因,一家企业可能会把部分完成的项目出售给其他企业。我们的方法包括了对这种部分完成的项目的价格的计算。我们很快会回到这一点,但是首先记住完成我们的问题的解。

由于只要它投资,企业就应当在项目的这两个阶段都投资,我们把边界条件式(10-15)和式(10-16)重新写为

$$F_1(P_1^*) = V(P_1^*) - I_2 - I_1 \quad (10-18)$$

$$F'_1(P_1^*) = V'(P_1^*) \quad (10-19)$$

将运营区域中 $V(P)$ 的解代入,这些边界条件告诉我们:

① 原文为 b ,经过与迪克西特教授联系和讨论,知其有误。——译者注

$$D_1 = \frac{\beta_2 B_2}{\beta_1} (P_1^*)^{(\beta_2 - \beta_1)} + \frac{1}{\delta \beta_1} (P_1^*)^{(1 - \beta_1)} \quad (10-20)$$

式中, P_1^* 为下面方程式的解:

$$(\beta_1 - \beta_2) B_2 (P_1^*)^{\beta_2} + \frac{(\beta_1 - 1) P_1^*}{\delta} - \beta_1 \left(\frac{C}{r} + I_2 + I_1 \right) = 0 \quad (10-21)$$

注意到这些方程式与式(10-11)、式(10-12)是一样的,除了 P_1^* 代替了 P_2^* , $I_2 + I_1$ 代替了 I_2 外。可以证明这些方程式也隐含着 $P_1^* > P_2^*$, 且 $D_1 < D_2$ 。正如我们所预期的,在项目的第二阶段投资的期权价值(考虑到第一阶段早已被完成)要比在第一阶段投资的期权价值(其回报为第二阶段投资的期权价值)大一些。

我们已经发现,多阶段投资问题的解实际上与我们在第6章所解出的单阶段问题的解有相同的形式,惟一的差别在于投资的数量,第一阶段投资的求解用的是全部投资成本 $I_1 + I_2$, 第二阶段的求解用的是第二阶段的投资成本 I_2 。图10-1显示了针对我们在第6.2节所计算出来的例子的 $F_1(P)$ 和 $F_2(P)$, 以及临界价格 P_1^* 和 P_2^* , 但是总成本被分为两部分, $I_1 = I_2 = 50$ 和 $I = 100$ 。其他参数与第6章所用的相同,即 $\sigma = 0.20, r = \delta = 0.04$ 。

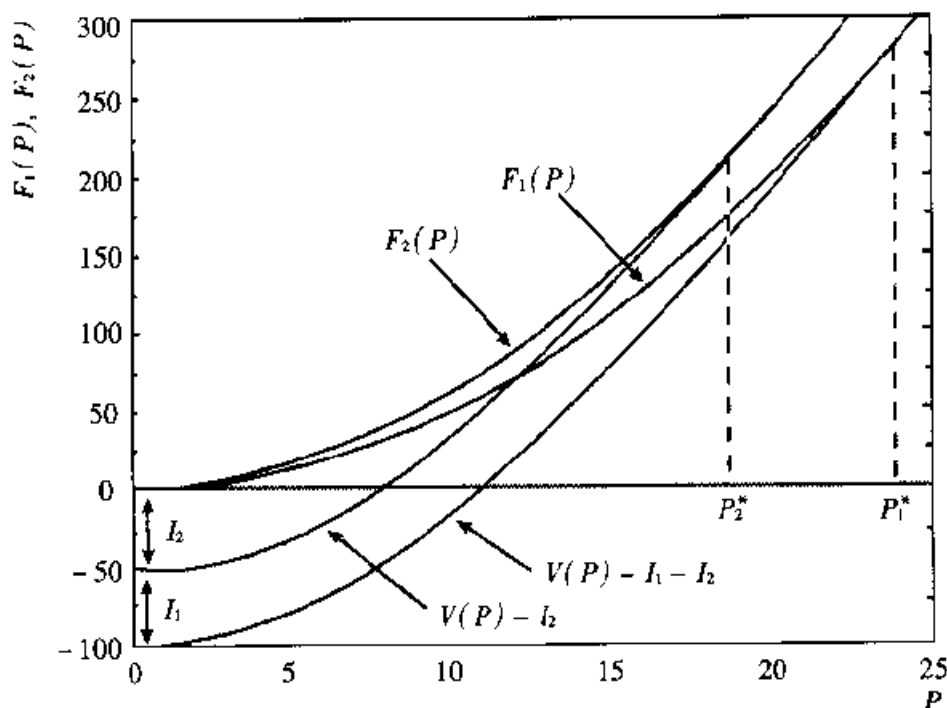


图 10—1 两阶段项目的临界价格与期权价值

(P_1^* 为第一阶段的投资临界价格; P_2^* 为第二阶段的投资临界价格)

10.1.2 总结与讨论

我们已经看到如何从后向前来确定一个多阶段项目的每一阶段的投资期权的价值以及引起投资的临界价格。把前面的步骤推广到三阶段或更多阶段的项目中是顺理成章的。从最后开始，然后从后向前，边界条件上的解就是前一阶段选择投资决策的依据。然而，注意这正好可以归结为在完成项目所需要的剩余沉没成本的不同价值时解出第6章的模型。在一个 N 阶段项目的任一阶段 j 的投资的期权价值为

$$F_j(P) = D_j P^{a_j}$$

通过对式 (10-11) 和式 (10-12) 求解，可以找到系数 D_j 和临界价格 P_j^* ，其中 P_j^* 代替了 P_2^* ， $I_j + I_{j+1} + \dots + I_N$ 代替了 I_2 。

然而，如果在第一阶段投资总是意味着在所有接下来的阶段投资的话，那么这个结论有什么用途呢？事实上，如果投资是同时发生的，且同时在所有阶段都没有对投资造成影响的其他障碍，就没有必要进行这些步骤，我们可以简单地利用总成本 I ，即不同阶段投资的总和，然后利用第6章的结论，或者等价地利用式 (10-11) 和式 (10-12)，并由 I 代替 I_2 。

在实践中，经常出现的情况是人们并非是在某个项目的某阶段一到就立即进行投资，这是不可能的，也是不合时宜的。

(1) 大多数多阶段项目的完成要耗费很多时间。（不论是对新的石油生产能力的投资，还是对新航线的投资或者新药的开发等都是如此，前面有例为证。）因此，价格可能高于引起第一阶段投资的临界水平，当第一阶段在进行时，价格下降到低于引起第二阶段投资所需要的临界水平。那么，企业宁愿等待，也不会继续项目的后续阶段。显然，了解每一阶段的临界价格是非常重要的。

(2) 即使投资可以非常快地进行，但是了解项目在后面阶段的投资决策的期权价值及临界价格也是同等重要的。原因是企业可能在早期阶段决定投资，然后把后面阶段的权利出售而不是自己投资。一个例子是小生物技术公司的新药开发。该公司可能在开发和获得药品专利而进行的研究和开发方面（项目的第一个阶段）非常在行，但是发现专利转让或出售给一家更有能力检验、生产和销售药品（项目后面的阶段）的大型制药公司是最佳选择。

(3) 可能还有导致公司在项目的第一阶段投资然后在后面的阶段推迟的其他考虑。例如，企业可能只有购买土地或开采权的惟一的机会（第一阶段），但是企业在开发土地或行使开采权之前可能想等待一段时间，或者，

政府管制可能迫使公司推迟投资的后续阶段（例如管制要求对新药进行检验）。

我们将集中于所有这些因素中的首要因素，即大多数多阶段投资的完成都耗费相当长的时间的事实。在下一节，我们将回到稍微复杂一点儿的模型，其中投资连续发生（企业每次投资 1 美元，因此，实际上项目有无穷多个阶段），而且每阶段的投资会在最短的时间内完成。

10.2 连续投资与建造时机

现在我们回到由马伊德和平迪克（Majd and Pindyck, 1987）所发展出的一个模型，其中直到项目完成前企业连续地投资（每 1 美元的花费购买到了花费下一美元的期权），而且投资可以无成本地储存并在以后无成本地重新启动，投入与建造要以最快增长率来完成（也就是说，发展是需要时间的）。因此，模型的解提供了解释实际上进行投资时所需要的时间的最优连续投资的规则。

329 在这个模型中，企业在项目完成之前没有任何收益。完成项目的回报为 V ，即该项目的运营成本。而且，它假定 V 服从外生的几何布朗运动过程，即

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \quad (10-22)$$

（后面我们将看到，如何扩展这个模型，使得项目产出的价格而不是 V 本身服从外生的随机过程。）我们将假定，资产复制仍然适用，而且我们令 μ 服从拥有并运营该项目所得到的经过市场风险调整的回报率。我们像通常假定的那样，假定 $\alpha < \mu$ ，并令 $\delta = \mu - \alpha$ 。

罗马不是一天建成的，这个项目也一样； k 为企业可以（生产性）投资的最大增长率。投资也是不可逆的，因此，投资的增长率 $I(t)$ 要满足这样的条件，即 $0 \leq I(t) \leq k$ 。如果没有作出投资，前期投入的资本不会锈蚀。如果 V 下降到足够低的水平，企业可以推迟投资；而如果 V 提高得慢，则企业在其储存的那一点重新恢复。由 K 来表示完成项目所需的剩余开支。动态的 K 由式（10-23）给出：

$$dK = -I dt \quad (10-23)$$

因此，我们有两个影响最优投资决策的状态变量。第一个是完成项目所需的剩余投资 K ，它服从式（10-23）；第二个为已完成项目的当前价值 V ，它

服从式(10-22) 问题是找到最优投资规则 $I^*(V, K)$ 。

因为不存在与改变投资的增长率相联系的调整成本或其他成本, 这个问题就有一种“砰砰”(bang-bang) 解——在时间的任意一点上, 投资的最优增长率将为 0 或者 k 。结果, 最优投资规则降低到已完成项目的临界终止价值 $V^*(K)$, 因此, 当 $V \geq V^*(K)$ 时, 企业以最大增长率 k 投资, 否则就没有投资。

与通常一样, 企业拥有投资期权, 它可能会执行, 也可能不执行。我们将用 $F(V, K)$ 来表示这种投资期权的价值, 假定该期权是最优执行的, 即假定当 $V \geq V^*$ 时, 企业投资, 否则就不投资, 从而来遵守最优投资规则。那么, 同前面的章节一样, 我们将找到 $F(V, K)$, 并得到作为解的一部分的临界价值 $V^*(K)$ 。我们可以利用动态规划来做到这一点, 或者如果复制存在, 利用或有债权分析法。我们假定资产复制成立, 利用或有债权分析来推导出一个必须由 $F(V, K)$ 满足的偏微分方程, 该方程的解将为我们给出 $V^*(K)$ 。 330

10.2.1 $F(V, K)$ 的一个方程

我们先来回顾关于 $F(V, K)$ 的微分方程的推导。考虑一个包括了投资期权和 V 的 F_V 单位空头 (或者 F_V 单位资产或完全与 V 相关的动态资产组合) 的资产组合。这种组合的价值为 $\Phi = F(V, K) - F_V V$, 这一值的瞬时变化为

$$\begin{aligned} d\Phi &= dF - F_V dV \\ &= F_V dV + \frac{1}{2} F_{VV} (dV)^2 + F_K dK - F_V dV \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F_{VV} dt + IF_K dt \end{aligned}$$

空头需要有 $\delta F_V V dt$ 的回报流, 在投资发生的地方, 还有一额外的流出量 $I dt$ 。因此, 投资组合的总回报为 $d\Phi - I dt - \delta F_V V dt$, 而且由于投资组合是无风险的, 这必须等于 $r\Phi dt$ 。替换 $d\Phi$, 并除以 dt , 重新整理, 给出了下面关于 $F(V, K)$ 的偏微分方程:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 F_{VV} - (r - \delta) V F_V - rF - IF_K - I = 0 \quad (10-24)$$

当贴现率为无风险利率 r 时, 式(10-24) 也就是来自动态规划的贝尔曼方程。作为练习, 通过利用动态规划重新推导出式(10-24), 读者可以证

实这一点。

注意式 (10-24) 关于 I 是线性的, 因此, 最优投资规则实际上是或者以最大增长率 k 投资, 或者根本就不投资。当没有投资时, 即 $I=0$ 时, 关于 F_K 的项消失了, 式 (10-24) 可以简化为常微分方程, 它可以通过分析来求解。然而, 当 $I=k$ 时, 方程式将不得不对 $F(V, K)$ 和临界边界 $V^*(K)$ 进行数值求解。

式 (10-24) 的解也必须满足下面的边界条件:

$$F(V, 0) = V \quad (10-25)$$

$$F(0, K) = 0 \quad (10-26)$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} F_V(V, K) = e^{-\frac{\delta K}{k}} \quad (10-27)$$

331 同时还得满足 $F(V, K)$ 和 $F_V(V, K)$ 在 $V = V^*$ 时连续的价值匹配条件和平滑粘贴条件。条件式 (10-25) 刚好是说, 当 K 达到 0 时, 项目就完成了, 而且企业得到回报 V 。此外, 当 V 相对于所需的总支出 K 变得非常大时, 投资在完成前中途储存是非常不可能的。然而, 项目仍然需要花费时间 $\frac{K}{k}$ 来完成, 而且在这段时间内, V 的预期增长率仅为 $\mu - \delta$ 。因此, 对非常大的 V , V 的 1 美元的增加所导致的 $F(V, K)$ 的增加等于

$$1 - \int_0^{\frac{K}{k}} \delta e^{(\mu-\delta)t} e^{-\mu t} dt = e^{-\frac{\delta K}{k}}$$

这正好是前面的条件式 (10-27)。

10.2.2 求解

当 $V < V^*$ 且 $I=0$ 时, 式 (10-24) 有解析解:

$$F(V, K) = AV^{\beta_1} \quad (10-28)$$

式中

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

这个解看起来似乎有点儿问题, 因为它好像不依赖于 K 。事实上, 它确实通过常数 A 而取决于 K 。正如我们将要看到的, 必须联合边界 $V^* = V^*(K)$ 来找到 A , 因此, A 随 K 的变化而变化。

当 $V > V^*$ 且 $I=k$ 时, 式 (10-24) 为必须通过数值来求解的抛物线的偏微分方程。为这样做, 我们首先利用式 (10-28) 及价值匹配条件和平

滑粘贴条件来消去 Λ ：

$$F(V^*, K) = \left(\frac{V^*}{\beta_1} \right) F_V(V^*, K) \quad (10-29)$$

然后数值式地解出式 (10-24) (令 $l=k$)，并利用有限微分方法解出式 (10-29) 和边界条件式 (10-25) 和式 (10-27)。这种过程将变量 V 和 K 转换为离散增量，而且将偏微分方程式 (10-24) 转换为有限微分方程。最后的方程可以利用代数求解，从最终条件 $K=0$ 开始，并且以增量 ΔK 从后向前进行，找到每一价值 K 、自由边界 $V^*(K)$ 及每个值 V 的 $F(V, K)$ 。这种数值过程的细节在本章附录中进行了讨论。^[1]

332

10.2.3 一个数值例子

作为例子，考虑一个总投资为 600 万美元 (K) 的项目，它可以在每年的增长率 (k) 不超过 100 万美元的条件下进行生产性开支。至于其他参数，令 $r=0.02$ ， $\delta=0.06$ 且 $\sigma=0.20$ (都为年率)。

正如在附录中所解释的，求解过程需要变量 V 和 K 的离散化。对于这个例子，我们将假定投资开支是按季度作出的，即 K 以离散单位 25 万美元来测度。(求解过程利用了 V 的对数而不是 V 本身，我们采用的 $\log V$ 的增量为 0.15。)

这种数值解总结在表 10—1 中。表中的每一项都对应于 V 和 K 的特定水平下的投资期权的价值 $F(V, K)$ 。(为节约空间，只有增量为 100 万美元的 K 值显示在表中。)带星号的项对应于临界价值 $V^*(K)$ 。如剩余投资支出为 400 万美元的一个项目的临界价值为 $V^*=703$ 万美元，企业投资期权的价值为 165 万美元。(注意它小于 $V-K=703$ 万美元 - 400 万美元 = 303 万美元。原因是企业只有在项目完成后才能得到 V ，而这至少在四年内是不可能发生的。)

表 10—1 可以用做项目建设进行时，即当 K 从 600 万美元下降到 0 美元时，进行最优连续投资决策。不像前一节中所讨论的简单模型，这里无法保证一旦项目投资开始就必须持续到项目结束。由于项目建设需要花费时间， V 可以在建造期间下降到这样一点，即投资至少将暂时储存。最后，注意本表可用于评价任何投资项目，不论总开支为 100 万美元、200 万美元……还是 600 万美元的任何项目，只要关于 r ， δ ， σ 和 k 的值保持不变。

333 表 10—1

最优投资规则的数值例子

单位：百万美元

全部项目 的价值 V	剩余的总投资 K						
	6	5	4	3	2	1	0
42.52	23.70	26.47	29.37	32.42	35.62	38.98	42.52
36.60	19.62	22.12	24.75	27.50	30.39	33.42	36.60
31.50	16.10	18.38	20.76	23.26	25.88	28.62	31.50
27.11	13.07	15.16	17.34	19.62	22.00	24.50	27.11
23.34	10.46	12.38	14.39	16.48	18.67	20.95	23.34
20.09	8.22	10.00	11.85	13.78	15.79	17.89	20.09
17.29	6.23	7.94	9.67	11.46	13.32	15.26	17.29
14.88	4.63	6.18	7.78	9.46	11.19	13.00	14.88
12.81	3.20	4.65	6.17	7.73	9.36	11.05	12.81
11.02	2.02*	3.34	4.77	6.25	7.79	9.37	11.02
9.49	1.22	2.23*	3.57	4.98	6.43	7.93	9.49
8.17	0.74	1.34	2.54	3.88	5.26	6.69	8.17
7.03	0.44	0.81	1.65*	2.93	4.26	5.62	7.03
6.05	0.27	0.49	1.00	2.12	3.39	4.70	6.05
5.21	0.18	0.29	0.60	1.42*	2.65	3.91	5.21
4.48	0.10	0.18	0.36	0.86	2.00	3.23	4.48
3.86	0.06	0.11	0.22	0.52	1.45	2.64	3.86
3.32	0.04	0.06	0.13	0.31	0.98*	2.13	3.32
2.86	0.02	0.04	0.08	0.19	0.59	1.70	2.86
2.46	0.01	0.02	0.05	0.11	0.36	1.32	2.46
2.12	0.01	0.01	0.03	0.07	0.21	1.00	2.12
1.82	0.00	0.01	0.02	0.04	0.13	0.73*	1.82
1.57	0.00	0.01	0.01	0.02	0.08	0.44	1.57
1.35	0.00	0.00	0.00	0.02	0.05	0.27	1.35
1.16	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.16	1.16
1.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.10	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00*

说明：项目显示投资期权 $F(V, K)$ 的价值。带星号的项目表示最优投资规则；对应于每一带星号的 V 值为临界值 $V^*(K)$ 。参数 $r=0.02$, $\sigma=0.20$, $\delta=0.06$, 每年最大的投资增量为 $k=100$ 万美元。

表 10—2 说明了该解如何取决于参数 σ 和 δ 。该表显示出了在 $\sigma=0.01$, 0.20 和 0.40 及 $\delta=0.02$, 0.06 和 0.12 时, 初始投资决策 (即当 $K=600$ 万美元时) 的临界终止值 $V^*(K)$ 。(本表中的中间项对应于表 10—1 中所显示

出的“基本情形”。) 观察到对任意的 δ 值, 当 σ 增加时 V^* 也增加, 而且当 σ 提高到超过 0.20 时, V^* 会大幅上涨。这与我们在第 5 章所提供的简单模型讨论中所得到的结论非常类似。^[2]

表 10—2 临界值对 σ 和 δ 的依赖

波动率 σ	临界值	回报不足率 δ		
		0.02	0.06	0.12
0.10	V^*	11.02	9.03	12.43
	V^{**}	9.77	6.30	6.05
0.20	V^*	20.09	11.02	12.81
	V^{**}	17.82	7.69	7.03
0.40	V^*	121.51	24.53	20.09
	V^{**}	107.77	17.11	9.78

说明: V^{**} 为假定以最大增长率每年 $k = 100$ 万美元进行投资时 V^* 的现值; V^* 和 V^{**} 都为 $K = 600$ 万美元。

然而, V^* 对 δ 的依赖并不太明显。在第 5 章的模型中, δ 的增加通常降低了临界价值 V^* , 提高了对投资而不是对等待的激励。注意关于这一点的理由是 δ 为持有投资期权而不是完成该项目自身的预期回报率的不足, 因此, 它代表了等待而不是现在就投资的机会成本。然而, 在表 10—2 中, 当 δ 从 0.02 上升到 0.06 时, V^* 首先下降, 然后 (当 $\sigma = 0.10$ 或 0.20) 随着 δ 进一步提高到 0.12, V^* 上升。理由是建造该项目需要时间, 这对投资激励具有相反的影响。回报 V 只有在项目完成后才能得到, 而且预期将仅以 $\mu - \delta$ 的增长率增加。因此, 建造时间降低了回报的现值, 并且当 δ 提高时, 把回报的现值降低了一个较大的数量。这反过来降低了投资的激励, 提高了当前的临界价值 V^* 。如表 10—2 所示, 对高的 δ 值, 这第二种效应可能会是主导, 因此, 当 δ 提高时, V^* 也增加。

我们可以通过计算现值 V^* 来提出第二种效应。假定投资支出以最大增长率 k 作出, 那么完成该项目需要花费的时间 $T = \frac{K}{k}$ 。贴现率为 μ , 但 V 有预期增长率 α , 因此, 现值 V^{**} 就可以简单地表示为

$$V^{**} = V^* e^{-(\mu - \alpha)\frac{K}{k}} = V^* e^{-\frac{\delta K}{k}} \quad (10-30)$$

表 10—2 还显示了 V^{**} 的值。注意到对 σ 任意值, 当 δ 提高时 V^{**} 通常下降。

不可逆性与推迟的能力在投资的回报与成本之间推动的楔子有多大？回答这个问题的一种途径是将 V^{**} 与完成该项目所需要的投资开支的现值进行比较。假定这些开支都是在时间周期 $T = \frac{K}{k}$ 上连续作出的，它们的现值为

$$K^* = \int_0^{\frac{K}{k}} k e^{-r\tau} d\tau = (1 - e^{-\frac{rK}{k}}) \frac{K}{r} \quad (10-31)$$

就我们的例子而言， $K^* = 565$ 万美元。这样如表 10—2 所示，对 σ 和 δ 的任意值， V^{**} 要稍微大于 K^* ，而且如果 σ 很大和/或 δ 很小时， V^{**} 要比 K^* 高得多。

我们还可以用这种方法来验证不确定性和建造时间的互动对投资的影响，针对不同 k 值来计算 V^* 。图 10—2 显示了对 $K = 600$ 万美元， $\delta = 0.03$ 和 0.12 时， V^* 作为 k 的函数。^[3] 观察到当 δ 很小时， k 的变化只对 V^* 有很小的影响。理由是 V 的预期增长率接近于经风险调整的市场利率 μ ，因此，加快建设的能力对投资期权的价值或投资决策几乎没有影响。然而，如果 δ 很大， V^* 可能对 k 非常敏感。那么，较低的 k 值（即更长的建设时间）隐含着完成的项目的现值回报较低，因此，导致更高的当前临界价值 V^* 。与前面一样，这第二种效应在考虑 V^{**} 时可能是微小的，我们把它留给读者。

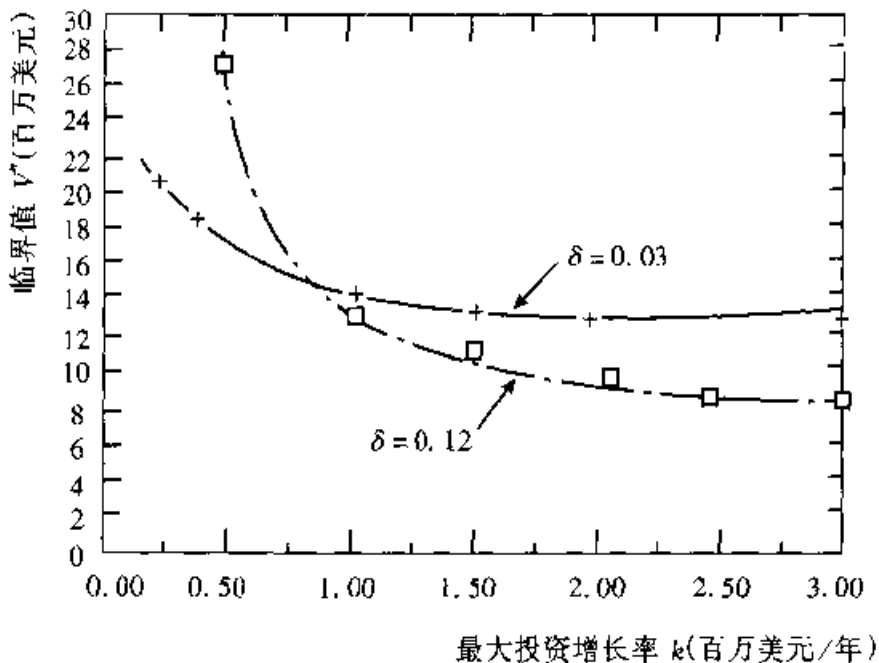


图 10—2 临界值 V^* 作为最大投资增长率 k 的函数

($r = 0.02$, $\sigma = 0.20$ 且 $K = 600$ 万美元)

我们已经假定, k 为常数, 这对一些项目来讲可能是不现实的, 其中投资的最大增长率可能取决于建设的阶段。然而, 这个模型可以很容易地被修正到考虑投资的最大增长率作为剩余总投资 K 的 (已知) 函数。这意味着在式 (10-24) 中代入的是 K 的函数而不是常数 I 。可以利用相同的数值过程来求解。同样地, 没有必要维持 $I \geq 0$ 的假定。对投资增长率可能有一些正范围的限制 (例如维持建设场地)。因此, 约束条件变为 $l \leq I \leq k$, 其中 l 和 k 可能都取决于 K 。这种限制可以通过下面两种方式来解释: 一旦它开始该项目, 不是企业被迫以最慢的增长率进行, 就是任何小的开支都跟放弃等价。因为如果得不到妥善的保管, 已经存在的阶段会“生锈”。最优决策规则在两种情形下是不同的: 初始的进入临界值将会更精确, 如果以后没有摆脱困境的办法。

10.2.4 建设时间灵活性的价值

加速一个项目的建设的能力有多大的价值? 许多工程项目可以利用其他建筑技术来建设, 这些技术可以改变建设增长率的灵活性。技术的灵活性含量越大, 成本也越高, 因此, 增加的成本可能必须由建设时间的灵活性上的较大价值来平衡。我们可以利用这些模型来确定较大灵活性的经济价值。由于较大的建设时间灵活性与更高的 k 相对应, 我们仅仅对不同的 k 来计算投资机会的价值 $F(V, K)$ 。对应于 k 的变化, F 的变化可以测定额外的灵活性所增加的价值。当然, 额外的灵活性的价值将取决于 V 和 K , 以及其他参数。^[4]

图 10—3 显示出参数值为 $r=0.02$, $\sigma=0.20$ 及 $\delta=0.06$ 时的基本情形下所做的计算。它在保持 V 为常数 (开始时为 1 000 万美元, 后来为 1 500 万美元) 及 K 为常数 (600 万美元) 条件下, 绘出了作为 k 的函数的 $F(V, K; k)$ 的图像。对每一个 V 值, 建设时间的灵活性所增加的价值由 $\frac{\Delta F}{\Delta k}$ 给出, 即由曲线的斜率给出。如图所示, 灵活性所增加的价值通常为正, 但是当 k 上升时灵活性增值量减少。此外, 图中的水平线显示了灵活性最大时的投资机会的价值, 即 $k \rightarrow \infty$; 当 $V=10$ 时, 这一值为 4.0, 当 $V=15$ 时, 该值为 9.0。^[5]

考虑两种不同的建设技术, 它们拥有相同的 $V=10$ 及相同的总成本 $K=6$, 但投资增长率不同: 第一个的 k 为 0.5, 第二个的 k 为 1.0。正如从

图中所看到的，更灵活的技术的增加值为 $\frac{\Delta F}{\Delta k} = \frac{0.98}{0.5} \approx 2$ 。因此，人们可能愿意支付高达 200 万美元以获得更灵活的技术。如果 V 更高，增加的价值就更高；如果 $V=15$ ，增加的价值大约为 5.5。当然，一般来讲，较大的灵活性可能总与不同总投资 K 相伴。在那种情形下，我们可以通过比较每一个 $F(V, K; k)$ 来对这些技术的灵活性进行排序。

338

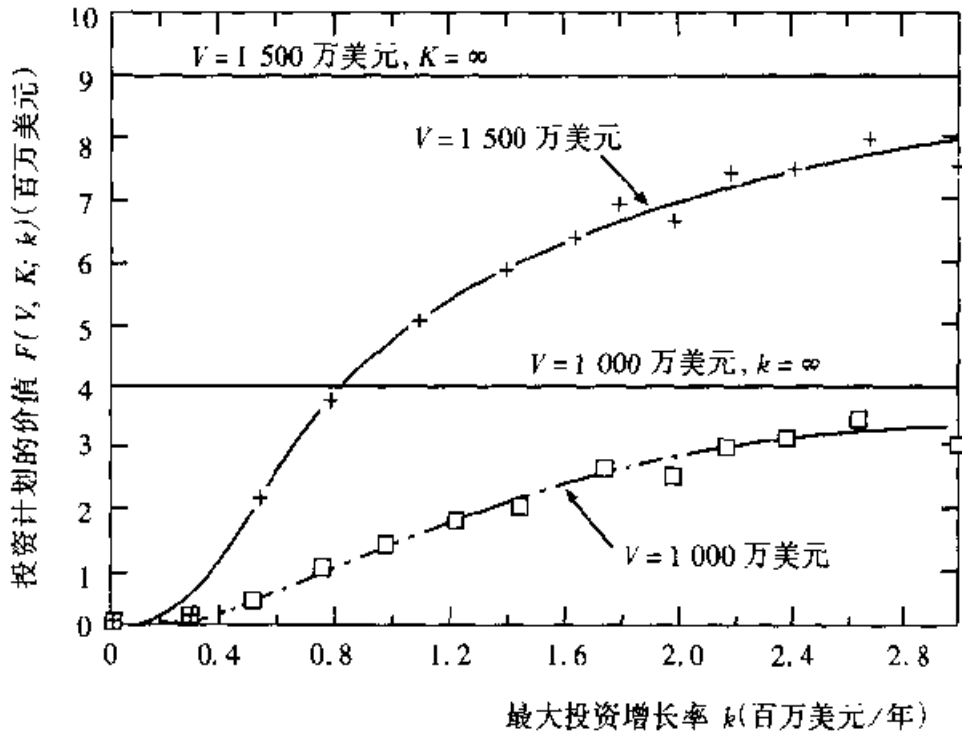


图 10—3 建造时机的灵活性的评价

图中，显示出 $F(V, K; k)$ 作为 k 的函数，其中 $r=0.02$ ， $\sigma=0.20$ 且 $K=600$ 万美元。

10.2.5 简单的推广

在第 6 章中，我们很自然地把项目的产出价格而不是项目的价值看做外生的随机过程。因为把价格作为随机变量的开始所具有的优势在于我们可以推断项目的价值如何取决于价格，以及项目价值（及投资决策）如何受价格不确定性的影响。

相同的论点也适用于需要建造时间的连续投资的模型。幸运的是，很容易修正这一模型，从而使产出价格为外生的随机状态变量。与以前一样，假定存在常数运营成本 C 。当 P 下降到低于 C 时，项目运营可以临时且无代

价地延缓；当 P 上升到超过 C 时，项目可以无代价地恢复。我们还将假定 P 服从式 (10-1) 的几何布朗运动。那么，正如第 6 章所表明的，而且在本章的开始也复习过，项目的价值 $V(P)$ 由方程 (10-3) 给出。

一旦知道了 $V(P)$ ，可以完全跟以前一样进行运算。我们把投资期权 339 的价值写作 $F(P, K)$ ，那么通过进行通常的步骤可得到下面的偏微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F_{PP} - (r - \delta)PF_P - rF - IF_K - I = 0 \quad (10-32)$$

注意到式 (10-32) 跟式 (10-24) 几乎一样，除了由 P 代替了 V 。边界条件式 (10-25) ~ 式 (10-27) 现在变为

$$F(P, 0) = V(P) \quad (10-33)$$

$$F(0, K) = 0 \quad (10-34)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} F_P(P, K) = \left(\frac{1}{\delta}\right)e^{-\frac{\delta K}{P}} \quad (10-35)$$

此外，价值匹配条件和平滑粘贴条件再次适用；点 $F(P, K)$ 和 $F_P(P, K)$ 必须在临界价格 $P = P^*(K)$ 处连续。

通过与以前相同的方法可以得到 $F(P, K)$ 和临界价格 $P^*(K)$ 数值解。主要的差别在于边界条件式 (10-33)。 $V(P)$ 的数值解必须对用于计算过程的 P 的全部范围进行计算。那么在最终边界上 ($K = 0$)，对每一个 P ， $F(P, 0)$ 被设定为 $V(P)$ 。当增量 Δk 从后向前移动，如前所述，对每一个 K 都有 $F(P, K)$ 和边界 $P^*(K)$ 与之相对应。其结论将会是类似于表 10-1 的表，表中最左边的一栏表示价格，最右边一栏表示与左侧价格相对应的项目价值 $V(P)$ 组成。

10.3 学习曲线与最优生产决策

我们在前面一节所考察的连续序列投资问题实际上是非常普遍的。与此关系非常紧密的问题是当企业面临学习曲线及未来需求不确定时如何进行生产决策。当存在学习曲线时，当前生产有两种收益。跟往常一样，它使得产出可以按某种市场价格出售，但当不确定性使得企业沿学习曲线向下移动时，则减少了其未来的生产成本。^[6]因此，在有学习曲线条件下，企业当前生产的部分成本实际上是一种投资，回报就是未来成本的减少。而且，这是 340

一种不可逆投资；如果企业对其生产决策感到后悔，它不能“不生产”或者收回其成本。最后，如果企业产出的价格随机地波动，来自这种投资的未来回报就是不确定的。

当企业面临学习曲线及产出价格的随机性变化时，生产决策正好跟我们所考察过的连续投资决策模型密切相关。在每一时刻，企业必须发现价格并决策是否生产（即是否对未来的生产成本降低投资），当价格下降得足够大时，企业可能在后来储存生产，而在价格上升时它可以重新恢复生产。为说明如何才能找到最优生产决策以及说明它与投资问题如何比较接近，我们使用马伊德和平迪克（Majd and Pindyck, 1989）最近的模型来阐明。

在这个模型中，企业以价格 P 出售其产出，价格服从式 (10-1) 的几何布朗运动。边际生产成本对于产出增长率 x 为一常数，接近于任意设定为 1 的生产能力限制。然而，由于学习曲线的存在，边际成本随着累加的产出 Q 下降，直到它达到最低的水平 \bar{c} 。令 c 表示初始的边际成本， Q_m 表示学习储存时的累加性产出，我们可以将边际成本的函数记作：

$$C(Q) = \begin{cases} ce^{-\gamma Q}, & Q < Q_m \\ ce^{-\gamma Q_m} = \bar{c}, & Q \geq Q_m \end{cases} \quad (10-36)$$

正如在第 6 章中所示，我们将假定，当 P 很低时，企业可以在没有额外成本的条件下停止；而当 P 上升到足够高时，企业可以恢复生产。但是与第 6 章不同的是，现在即使当前利润流为负，企业最好还是继续生产。理由是当前的生产价值取决于当前现金流及未来成本可能会降低的数量。（换句话说，当前的生产有一个影子价值，它用来测度沿学习曲线向下移动时的收益。）

我们将假定 P 的不确定性由经济中已经存在的资产来复制，而且 μ 为未来收益的经风险调整的贴现率。与以往一样，令 $\delta = \mu - \alpha$ 。现在我们可以利用标准的或有债权方法来评价企业并确定其最优（价值最大化的）运营策略。企业的价值将取决于 P 及它随着学习曲线（即累计的产出 Q ）向下移动的程度。正如在前一节模型中有两个状态变量，在这种情形下为 P 和 Q ，以及一个控制变量，在这种情形下为 x ，约束于 $0 \leq x \leq 1$ 。问题是找到企业的价值 $V(P, Q)$ ，以及最优产出规则 $x^*(P, Q)$ 。

读者可以很容易地证明 $V(P, Q)$ 必须满足下面的偏微分方程：

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 V_{PP} + (r - \delta) P V_P + x V_Q - r V + x [P - C(Q)] = 0 \quad (10-37)$$

由于 $V(P, Q)$ 对 x 是非线性的, 最优的 x 或者为 0 或者为 1。事实上, 有

$$x^*(P, Q) = \begin{cases} 1, & P + V_Q \geq C(Q) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10-38)$$

这把我们前面的直觉公式化了。当前的单位产出产生了瞬时收益 P , 以及以未来生产中下降的成本为形式的未来收益, 它包含在企业价值 V_Q 的增量中。如果这些收益的总和超过当前生产成本 $C(Q)$, 生产会被调整。

一旦解决了这个问题且知道了函数 $V(P, Q)$, 我们得到临界曲线或边界条件 $P^*(Q)$, 因此有

$$P > P^*(Q), \text{ 当且仅当 } P + V_Q(P, Q) > C(Q)$$

那么如果 $P \geq P^*(Q)$, 最优产出规则变为 $x = 1$; 如果 $P < P^*(Q)$, $x = 0$ 。而且, 由于成本随着 Q 的增加而下降, 我们有 $\frac{dP^*}{dQ} < 0$ 。我们现在推导出这个解。

式 (10-37) 的解必须满足下面的边界条件:

$$V(0, Q) = 0 \quad (10-39)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} V_P(P, Q) = \frac{1}{\delta} \quad (10-40)$$

$$P^*(Q) - C(Q) + V_Q(P, Q) = 0 \quad (10-41)$$

$$V(P, Q_m) = \bar{V}(P) \quad (10-42)$$

同时还有价值匹配条件, 即 $V(P, Q)$ 在点 $P = P^*$ 连续。

条件式 (10-39) 和式 (10-40) 都与前一节拥有建造时间下投资模型中的边界条件式 (10-26) 和式 (10-27) 相似。式 (10-39) 正好说明, 如果 $P = 0$, 它保持在 0, 因此, $V = 0$; 而式 (10-40) 说明, 如果 P 变得非常高, 企业很可能将永远生产, 那么价格中每 1 美元的增加值刚好是以后每一周期 1 美元的现值, 以 $\mu - \alpha = \delta$ 进行贴现。条件式 (10-41) 服从关于生产 x 的最大值; 它正好是前面 $P^*(Q)$ 的直观性定义, 而且代替了平滑粘贴条件。最后, 条件式 (10-42) 类似于建造时间的投资模型中的边界条件式 (10-25)。它说明, 一旦 Q 上升到 Q_m 且生产成本变为常数, 增加的生产可能不会再影响企业的价值, 因此, V 仅仅是 P 的函数。在这种情形下 V 是什么? 我们已经在第 6.2 节或前面的式 (10-3) 中推导出来了:

$$V(P) = \begin{cases} A_1 P^{\beta_1}, & P < \bar{c} \\ B_2 P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{\bar{c}}{r}, & P > \bar{c} \end{cases} \quad (10-43)$$

式中， β_1 和 β_2 分别为基本二次式的正根和负根； A_1 和 B_2 为前面式 (10-4) 和式 (10-5) 给出的常数。

当 $P < P^*$ 且 $x=0$ 时，式 (10-37) 的解析通解为

$$V(P, Q) = aP^{\beta_1} \quad (10-44)$$

当 $P > P^*$ 且 $x=1$ 时，式 (10-37) 确实没有解析解，而必须通过数值方法来求解。再次利用有限差分方程，将上面的偏微分方程转换为一个可以通过代数方式解出的差分方程。这种方法实质上与前一节在附录中加以使用的解析方法一样。

10.3.1 解的特征

表 10-3 显示了在下列参数下的解：初始边际成本 $c=40$ ，最后的边际成本 $\bar{c}=10$ ， $Q_m=20$ （因此， $\gamma=0.0693$ ）， $r=\delta=0.05$ ， $\sigma=0.20$ 。^[7] 该表显示出，对累加生产的不同数量，企业的价值为企业生产所需要投入的临界价格的函数。例如，当积累的产出为零（因此，边际成本为 40 美元）时，企业将生产，当价格为 25.53 美元或更多时，企业的价值为 178.53 美元。当价格低于 25.53 美元时，企业将不生产，但是仍然有价值，因为价格在未来可能会提高。随着 Q 的增加，企业的价值上升（因此，成本被降低了），而 P^* 却下降了。当 Q 达到 20 时，临界价格下降为长期成本 10 美元；在这一点，企业到达了学习曲线的最低点，累加的生产的影子价格为零。

343 表 10-3 企业的价值与最优生产规则 单位：美元

以美元计 的价格	以单位累积的生产 (当前的边际成本以美元计)					
	0.00 (40.00)	4.00 (30.32)	8.00 (22.98)	12.00 (17.41)	16.00 (13.20)	20.00 (10.00)
27.66	212.39	270.08	316.33	348.03	366.04	371.76
26.58	194.75	250.10	295.70	327.24	345.23	350.95
25.53	178.53*	231.15	276.00	307.36	325.31	331.03
24.53	163.76	213.24	257.21	288.33	306.25	311.98
23.57	150.22	196.35	239.29	270.15	288.03	293.75

续前表

以美元计 的价格	以单位累积的生产 (当前的边际成本以美元计)					
	0.00 (40.00)	4.00 (30.32)	8.00 (22.98)	12.00 (17.41)	16.00 (13.20)	20.00 (10.00)
22.65	137.79	180.50	222.24	252.78	270.61	276.32
21.76	126.40	165.70	206.03	236.20	253.96	259.67
20.91	115.94	151.97	190.65	220.39	238.06	243.77
20.09	106.35	139.32*	176.09	205.32	222.89	228.60
19.30	97.56	127.80	162.35	190.97	208.42	214.12
18.54	89.49	117.23	149.42	177.33	194.62	200.32
17.81	82.09	107.53	137.31	164.38	181.49	187.18
17.12	75.30	98.64	126.01	152.11	169.00	174.67
16.44	69.07	90.48	115.54	140.50	157.13	162.69
15.80	63.36	83.00	105.92*	129.55	145.86	151.50
15.18	58.12	76.13	97.16	119.26	135.19	140.79
14.59	53.31	69.83	89.12	109.61	125.09	130.65
14.01	48.90	64.06	81.75	100.62	115.55	121.06
13.46	44.86	58.76	74.99	92.29	106.57	112.00
12.94	41.15	53.90	68.79	84.61*	98.13	103.47
12.43	37.74	49.44	63.10	77.62	90.22	95.45
11.94	34.62	45.35	57.88	71.20	82.64	87.93
11.47	31.76	41.60	53.09	65.31	76.00	80.89
11.02	29.13	38.16	48.70	59.91	69.68*	74.33
10.59	26.72	35.00	44.67	54.95	63.92	68.24
10.18	24.51	32.11	40.98	50.41	58.63	62.61*
9.78	22.48	29.45	37.59	46.24	53.78	57.43
9.39	20.62	27.02	34.48	42.41	49.33	52.68

说明：项目显示企业的价值 $V(P, Q)$ ，带星号的每一项表示最优生产规则；对应于每一个带星号的项目的价格为临界价格 $P^*(V)$ 。参数为 $r = \delta = 0.05$ ， $c = 40$ ， $\bar{c} = 10$ ， $Q_m = 20$ 及 $\sigma = 0.20$ 。

当然，即使没有不确定性，当存在学习曲线时，一家企业应当在这样的价位上生产：由于累加的产出的影子价值的影响，该价格可能大大低于当前的边际成本。^[8]为弄清不确定性如何影响企业的生产决策，我们可以考察这个影子价值 V_Q ，及其对 P 和 σ 的依赖。图 10—4 显示出，对 $Q = 0$ ，在 $\sigma = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ 和 0.5 时， V_Q 是 P 的函数。直线 $C - P$ 也在图

10—4 中显示出来。我们注意到，从式 (10-41) 中有 P^* 满足 $P = C(Q) - V_Q$ 。因此，在 $Q=0$ 时， P^* 由这条线与曲线 V_Q 的交点给出。当 $\sigma=0$ ， $\alpha=r$ ， $\sigma=0$ 时， V_Q 为 0 到临界价格 19 美元（如果 P 低于这个价格，企业将永远不生产），然后为常数 21 美元。^[9] 注意在图 10—4 中， σ 越大， P^* 也越大。例如，当 $\sigma=0.5$ 时， P^* 大约为 31 美元。

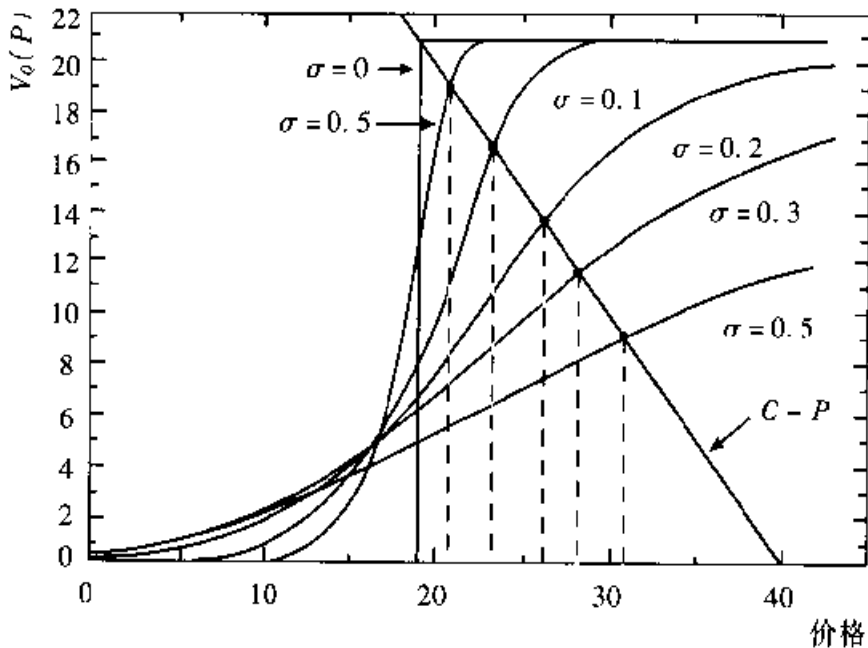


图 10—4 累积性投资的影子价格

($r = \delta = 0.05$ 及 $\sigma = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ 和 0.5)

不确定性对 V_Q 的影响取决于当前价格。未来价格上升的可能性提高了 V_Q ，而它下降的可能性则降低了 V_Q 。低价时，价格上升的可能性起主导作用，因此，不确定性刺激了 V_R 的增长。为说明这一点，注意到如果 $\sigma=0$ ，价格可能永远都不会上升（因为 $\delta=r$ ），因此，当价格很低时，未来的成本节约没有价值。然而，如果 $\sigma>0$ ，价格可能在后来会提高到足以调整产出，因此，未来成本的下降有一定的价值。 σ 越大，企业在一定的有限期限内开始的可能性也越大，未来成本减少的现值也越大。在很高的价格水平上，影响刚好是相反的。假定 P 很高，而企业正在进行生产。如果 $\sigma>0$ ，价格可能会下降到企业储存生产的那一点，因而 σ 越高，这种情形出现的也越快。因此，对于高价格， σ 越高意味着 V_Q 越低。

这一较高的价格区域与生产决策相关。因此，如图 10—4 所示， σ 的增加提高了 P^* 。考虑到在学习曲线条件下，企业的部分生产成本实际上是

一种降低未来成本的不可逆投资，也可以理解这种结论。当未来价格不确定时，投资的回报也是不确定的。与通常一样，这隐含着现在就投资而不是等待以发现价格变化中的机会成本。这种由 V_Q 来测度的投资的净收益因此而下降，并推动临界价格直到其在没有学习曲线时所应该在的位置上。

10.4 成本不确定性与学习

在我们已经考察过的大多数投资问题中，投资的未来预期回报都存在不确定性。然而，有时一项投资的成本比其回报更具不确定性。如核电厂就是一个例子，由于工程建设和管制方面的不确定性，其建设成本很难预测。尽管已经建成的核电厂的未来收益也是不确定的（由于电力需求和替代燃料的成本不确定），建设成本的不确定性比收益的不确定性要大得多，而且已经阻止了建造新厂的边际效益。其他的例子包括新航线的开发、城市建设项目以及许多研究开发项目，如制药公司的新药开发。

当完成项目需要花费时间时，企业面临一个序列投资问题，其中包括了 346 两类不同的成本不确定性，我们已在第2章对其进行过简要讨论。第一类是技术上的不确定性，并且与完成项目中的物质困难相关：假定建设投入品的价格是已知的，那么最终完成项目建设将花费多长时间、需要多大努力及消耗多少材料呢？技术上的不确定性只有通过项目的进展才能了解；实际成本及建设时间随着项目的进行逐步显现。如果出现障碍或者工作进展比计划进行得更快，这些成本可能大于或小于预期，但是投资的总成本只有当项目完成时才能知道。

第二类不确定性，我们称为投入成本的不确定性，对企业的所作所为而言是外在的。当建造项目的劳动力、土地及原材料的价格无法预期地波动时，或者当政府管制的不可预期的变化改变了建设成本时，这种不确定性就会上升。价格与管制的改变不考虑企业是否会投资，而且当人们从未来来看时会更加不确定。因此，投入成本的不确定性对需要花费时间才能完成的项目或者受限于自发的或非自发的推迟的项目来讲可能特别重要。

由于同样的原因，技术和投入成本的不确定性都提高了投资机会的价值，即未来现金流的不确定性提高了投资机会的价值——来自投资的净回报

为投资成本的凸函数。然而，正如我们在第 2 章中所看到的，这两种类型的不确定性以不同的方式影响着投资决策：技术上的不确定性使投资更有吸引力；一个项目可能拥有导致通常意义的净现值为负的预期成本，但开始投资仍然是一种经济的行为。原因是进行投资披露了关于成本的信息，而且因此获得了一个大于其对完成项目的直接贡献的影子价值；这一影子价值降低了投资的全部预期成本。（在第 2 章，我们以一个简单的两阶段例子说明了这一点。）

另外，投入成本的不确定性使现在就投资不太具有吸引力。拥有通常意义上为正的净现值的项目可能仍然是不经济的，因为不论投入是否会发生，建设的投入品成本会改变，因此在调拨资源前等待新信息是有价值的。而且，当建设成本的波动与整体经济有关时，或者在资本资产定价模型的背景下当成本的 β 值很高时这种影响有放大的能力。原因是较高的 β 值提高了适用于未来预期成本的贴现率，它提高了投资机会的价值，也提高了来自等待而不是现在投资的价值。

347 由于技术和投入品成本的不确定性对投资有不同的影响，在分析中将这两种影响合并起来可能是重要的。这里我们总结了由平迪克 (Pindyck, 1993b) 所发展出的一个模型，它推导出了成本不确定的两种类型下不可逆投资的决策规则。其基本原理是，问题中的项目完成时的实际成本为一个随机变量 \bar{K} ，只有预期成本 $K = E(\bar{K})$ 为已知的。正如第 10.2 节中的模型，完成项目需要花费时间——企业可以（生产性）投资的最大增长率为 k 。在完成时，企业获得一项价值为 V 的资产（例如，一家工厂或一种新药）是确定已知的。

为考虑技术的不确定性和要素成本的不确定性，假定预期成本 K 依下式变动：

$$dK = -I dt + v(IK)^{\frac{1}{2}} dz + \gamma K dw \quad (10-45)$$

式中， dz 和 dw 都是独立的维纳过程中的增量。^[10] 完成项目的技术困难不可能对整体经济状态有很大影响，但是对于建设成本变化的情形来讲就不是这样了。因此，我们假定，所有与 dz 相关的风险都被分散了（即 dz 与整体经济和股票市场无关），但是 dw 可以与市场相关。

注意到，式 (10-45) 右边的第二项描述了技术不确定性。如果 $\gamma = 0$ ，只有当企业投资时 K 才会改变，而且 $\frac{dK}{K}$ 的瞬时变化随 $\frac{I}{K}$ 线性增长。当企业

投资时, K 在时间区间 Δt 内的预期变化为 $-I\Delta t$, 但是实际的变化可能大于或者小于它, 而且 K 也能上升。当项目进行时, 进展有时会变得比预期慢, 有时会比预期快。当 K 下降时 \bar{K} 的变化下降, 但是只有当项目完成时, 其实际总成本 $\int_0^T I dt$ 才会被知道。式 (10-45) 右边的最后一项描述了投入品成本的不确定性。如果 $v = 0$, $\frac{dK}{K}$ 的瞬时变化为一常数, 而且独立于 I 。现在, 即使在没有投资时 K 也将波动; 无论企业做什么, 正在发生的劳动力成本和原材料成本的变化会改变 K 。

问题是找到最大化投资机会效益的投资政策, $F(K) = F(K; V, k)$:

$$F(K) = \max_{I(t)} E_0 \left[V e^{-\mu \bar{T}} - \int_0^{\bar{T}} I(t) e^{-\mu t} dt \right] \quad (10-46)$$

约束于式 (10-45), $0 \leq I(t) \leq k$, 而且 $K(\bar{T}) = 0$ 。这里 μ 为适当的经风险调整的贴现率, 而项目完成的时间 T 为随机的。

10.4.1 解决投资问题

我们假定复制仍然成立, 因此, μ 可以从问题中消去。令 x 为一种资产的价格或者与 w 完全相关的资产的动态组合, 因此, dx 服从式 (10-47):

$$dx = \alpha_x x dt + \sigma_x x dw \quad (10-47)$$

那么, 读者应当可以确认 $F(K)$ 必须满足下面的微分方程:

$$\frac{1}{2} v^2 I K F''(K) + \frac{1}{2} \gamma^2 K^2 F''(K) - I F'(K) - \phi_x \gamma K F'(K) - I = r F(K) \quad (10-48)$$

式中, $\phi_x \equiv \frac{r_x - r}{\sigma_x}$; r_x 为 x 上的经过风险调整的预期回报率, 即 $r_x = r + \phi \rho_{xm} \sigma_x$, 其中 ϕ 为风险的市场价格; ρ_{xm} 为 x 资产与市场组合间的相关系数。这样有 $\phi_x = \phi \rho_{xm}$ 。由于 ϕ 为经济规模参数, 确定 ϕ_x 所需要的特定项目的惟一参数就是 ρ_{xm} 。

由于式 (10-48) 关于 I 是线性的, 通常最大化 $F(K)$ 的投资增长率或者为零, 或者为最大增长率 k :

$$I = \begin{cases} k, & \frac{1}{2} v^2 K F''(K) - F'(K) - 1 \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10-49)$$

因此, 式 (10-48) 在点 K^* 有自由边界, 从而当 $K \leq K^*$ 时, $I(t) = k$; 否则 $I(t) = 0$ 。通过在下边的边界条件约束下对式 (10-48) 求解, 可得到 K^* 的值与 $F(K)$ 的值:

$$F(0) = V \quad (10-50)$$

$$349 \quad \lim_{K \rightarrow \infty} F(K) = 0 \quad (10-51)$$

$$\frac{1}{2} v^2 K^* F''(K^*) - F'(K^*) - 1 = 0 \quad (10-52)$$

以及 $F(K^*)$ 在点 K^* 连续的价值匹配条件。条件式 (10-50) 说明, 在项目完成时, 回报为 V 。条件式 (10-51) 说明, 当 K 非常大时, 在某一有限时间内 $F(K)$ 下降到足以开始项目的概率非常小。条件式 (10-52) 来自式 (10-49), 而且等价于 $F'(K)$ 在点 K^* 连续的平滑粘贴条件。

当 $I = 0$ 时, 式 (10-48) 有简单解析解:

$$F(K) = AK^{\beta_2} \quad (10-53)$$

式中, β_2 为 (来自边界条件式 (10-51) 的) 下述基本二次方程的负根:

$$\frac{1}{2} \gamma^2 \beta(\beta-1) - \phi_x \gamma \beta - r = 0$$

剩余的边界条件用于确定 A 和 K^* , 以及在 $K < K^*$ 时 $F(K)$ 的解。这得用数值方法来求解, 一旦式 (10-48) 被适当转换, 这并不是很难。^[11] 对于 $K < K^*$, 可以发现一组解, 每一个都满足条件式 (10-50), 但是从条件式 (10-52) 和 $F(K)$ 在点 K^* 的连续性可以确定出与 A 值相伴的惟一解。

10.4.2 解的特征

当只有技术性不确定性出现时, 式 (10-48) 退化为

$$\frac{1}{2} v^2 IKF''(K) - IF'(K) - I = rF(K) \quad (10-54)$$

则只有当投资发生时 K 才会改变, 因此, 如果 $K > K^*$ 且企业不投资, K 将永远不改变, 而且 $F(K) = 0$ 。当 $r = 0$ 时, 式 (10-54) 有解析解:

$$F(K) = V - K + v^2 \left(\frac{V}{2} \right)^{-\frac{2}{v^2}} \left(\frac{K}{v^2 + 2} \right)^{\frac{v^2 + 2}{v^2}} \quad (10-55)$$

350 而且临界值由下面的式子给出:

$$K^* = \left(1 + \frac{1}{2} v^2 \right) V$$

式 (10-55) 有简单的解释。当 $r = 0$ 时, $V - K$ 将会是没有放弃该项目可

能性条件下投资机会的价值。最后一项为看跌期权的价值，即如果生产成本比预期高，就放弃该项目的期权。注意到，对 $v > 0$ ，有 $K^* > V$ 且 K^* 对 v 递增。更加不确定的是，投资机会的价值越大，开始投资为经济的最大预期成本也越高。

让我们现在回到一般情形，它需要数值解。由于 v 和 γ 的增加对 K^* 有相反的影响，确定这些参数联合起来的净效应是非常有用的。表 10—4 显示了在 $\phi = 0$ ， $V = 10$ ， $k = 2$ 及 $r = 0.05$ 的条件下， K^* 作为 v 和 γ 两者的函数。注意到 K^* 随着 γ 递减，随着 v 递增，但是对 γ 的变化更敏感。无论 v 值如何， γ 为 0.5 时使 K^* 降低到 $\gamma = 0$ 时的 $\frac{1}{4}$ 。而且，如果有系统的投入成本的不确定性的成分， K^* 的这种下降将会更大。因此，对许多投资来讲，特别是投入成本波动的大产业项目来讲，正在增加的不确定性似乎会抑制投资。相反的情形是只对诸如研究开发计划投资，其中技术不确定性要重要得多。

表 10—4 完成的临界成本， K^* ，作为 v 和 γ 的函数

v	γ					
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.0	8.925 7	6.611 3	4.946 3	3.752 4	2.885 7	2.255 9
0.1	8.984 4	6.650 4	4.975 6	3.772 0	2.901 6	2.268 1
0.2	9.130 9	6.757 8	5.053 7	3.833 0	2.946 8	2.303 2
0.3	9.375 0	6.938 5	5.185 5	3.930 7	3.022 5	2.360 8
0.4	9.716 8	7.187 5	5.371 1	4.067 4	3.127 4	2.443 8
0.5	10.156 0	7.509 8	5.610 4	4.248 0	3.261 7	2.548 8
0.6	10.693 0	7.905 3	5.898 4	4.462 9	3.427 7	2.675 8
0.7	11.328 0	8.369 1	6.240 2	4.716 8	3.623 0	2.827 1
0.8	12.051 0	8.896 5	6.630 9	5.014 6	3.847 7	3.000 5
0.9	12.861 0	9.502 0	7.080 1	5.346 7	4.101 6	3.198 2
1.0	13.770 0	10.166 0	7.573 2	5.717 8	4.384 8	3.418 0

说明： K^* 通过求解式 (10-48) 及 $F(K)$ 的边界条件来找到。参数 v 和 γ 分别测度技术的程度和投资成本的不确定性。其他参数值为 $V = 10$ ， $k = 2$ ， $r = 0.05$ 及 $\phi = 0$ 。

这个模型的应用需要估计出 v 和 γ ，这需要估计每种不确定性来源下项目成本的置信区间。为了将成本的不确定性分为技术的不确定性和投入成本的不确定性，注意到，第一种独立于时间，而来自第二种成分的成本变化随

着时间线性增长。这样，假定在 T 之前没有投资发生，通过估计未来 T 内成本的标准差可以找到 γ 的值。这种估计 $\hat{\sigma}_T$ 可以来自建设成本的经验，或者来自结合了单个投入的变化估计的成本的会计模型。那么 $\hat{\gamma} = \frac{\hat{\sigma}_T}{\sqrt{T}}$ 。为估计出 v ，我们可以利用这样的事实，即如果 $\gamma = 0$ ，完全的成本变化由式 (10-56) 给出：^[12]

$$v(\bar{K}) = \left(\frac{v^2}{2 - v^2} \right) K^2 \quad (10-56)$$

这样，如果项目成本的标准差为预期成本的 25% (50%)， v 将为 0.343 (0.63)。利用式 (10-56) 和预期成本的初始估计值 $K(0)$ ， v 的值可以以 \bar{K} 的独立于时间的标准差的估计为基础。

10.5 文献导引

第 10.2 节所提供的拥有建造时间的连续投资的模型与其先行者一样，即来源于迈尔斯和马伊德 (Myers and Majd, 1984) 所发展出的放弃期权的模型。他们评价了建设可以及时在任何一点永久放弃的一个项目，并且利用了类似的数值解，找到了最优放弃规则。对拥有建造时间的投资的更近研究有巴-艾兰和斯特兰奇 (Bar-Ilan and Strange, 1992) 的著作。建造时间 (以及相关的推迟) 在投资的理论和实证模型中往往被忽略了，但是正如基兰德和普雷斯科特 (Kydlan and Prescott, 1982) 已经证明的，它可能具有重要的宏观经济意义。

第 10.4 节提供的成本不确定的模型与以前的几项研究有关。罗伯特和魏茨曼 (Roberts and Weitzman, 1981) 探讨了信息收集的价值，他们发展出了序列投资的类似模型，其中项目可以在中间储存，而且投资的过程降低了完成的预期成本及这一成本的方差。他们推导出了最优储存规则，并且证明，即使全部项目的净现值为负，可能也值得进行投资的早期阶段。然后，魏茨曼、纽伊和雷宾 (Weitzman, Newey and Rabin, 1981) 利用这个模型评价了合成燃油的示范车间，而且显示了成本会证明这些投资中的一些是正当的知识。通过考虑投资者 (他支付项目成本) 及管理者 (他决定是继续还是放弃项目) 间所存在利益冲突和信息不对称，麦凯-梅森 (MacKie-

Mason, 1991) 推广了罗伯特和魏茨曼的分析。他证明, 关于成本的不对称信息导致项目低效的过度放弃。

格罗斯曼和夏皮罗 (Grossman and Shapiro, 1986) 也研究了投资。其中得到回报所需要的总努力水平是未知的。他们将回报模型化为泊松过程, 其中特别指定达到率为长期积累的努力的函数。他们考虑提高的增长率为努力的凹函数, 并集中于投资的增长率, 而不是项目是否应当进行。与此相关的还有鲍德温 (Baldwin, 1982) 的工作, 她分析了当投资机会随机地到达, 而且企业只有有限的资源时的序列投资决策。她评价了机会的序列, 并证明简单的净现值规则导致过度投资, 即等待更好的机会是有价值的。同样地, 如果成本随机变化, 等待成本下降是值得的。最后, 蔡拉 (Zeira, 1978) 发展了一个模型, 其中企业随着它积累资本而学习其回报函数。

所有这些关于学习和成本不确定性的模型都属于由魏茨曼 (Weitzman, 1979) 所分析过的最优搜寻问题的一个宽泛的类型。在那里, 他把问题描述成“潘多拉的盒子”式的问题, 人们必须决定应当进行多少拥有不确定结果的投资机会, 以及应当以什么样的次序进行。在这种情形下, 花费在项目上的每1美元都是单一的投资机会, 而且不确定的结果是由其所导致的进展的数量。第10.4节所提供的模型是更一般的, 其中预期结果可以随机地变化, 即使在没有投资发生时(投入成本不确定性), 但是对于事先确定好的花费次序却更严格。 353

在附录中, 我们简要地解释了用于解出第10.2节的有建设时间的投资模型的偏微分方程的数值过程。希望提高解偏微分方程技巧的读者可以参考下面的著作: 哈伯曼 (Haberman, 1987)、冈瑟和李 (Guenther and Lee, 1988), 或者卡拉和皮尔逊 (Carrier and Pearson, 1976) 的著作。关于求解来自期权定价问题的偏微分方程的数值方法由布伦南和施瓦茨 (Brennan and Schwartz, 1978)、格斯奇和沙斯特里 (Geske and Shastri, 1985) 及霍尔和怀特 (Hull and White, 1990) 进行了讨论, 当然还有其他著作。

附录

偏微分方程的数值解

这个附录显示出具有建造时间的连续投资模型中的偏微分方程式(10-24)及与其相联系的边界条件如何通过数值方法求解。这里所用的过

程是有限差分方程显式的变形。也可以利用其他的数值过程，而且有些可能更有效或者更精确。这里我们的目标仅仅是说明一种方法。

为提高这种过程的精确度，并使得在 V 的充分大范围内计算 $F(V, K)$ 有可能，我们从作出下面的变换开始：

$$F(V, K) \equiv e^{-\frac{rK}{k}} G(X, K) \quad (10-57)$$

式中， $X \equiv \log V$ 。那么，偏微分方程（对 $V > V^*$ ）及边界条件变为

$$\frac{1}{2} \sigma^2 G_{XX} + (r - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2) G_X - k G_K - k e^{\frac{rK}{k}} = 0 \quad (10-58)$$

$$G(X, 0) = e^X \quad (10-59)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} [e^{-X} e^{-\frac{rK}{k}} G_X(X, K)] = e^{-\frac{\delta K}{k}} \quad (10-60)$$

$$G(X^*, K) = \left(\frac{1}{v} \right) G_X(X^*, K) \quad (10-61)$$

注意偏微分方程的系数不再是 V 的函数。

354

有限差分方法将连续的变量 V 和 K 变换为离散的变量，并且将偏微分方程中的偏微分替换为有限差分。这种方法的显式对应着这种替代的有限差分的特殊选择。令 $G(X, K) \equiv G(i\Delta X, j\Delta K) \equiv G_{i,j}$ ，其中 $-b \leq i \leq m$ ，且 $0 \leq j \leq n$ 。现在作出替换：

$$G_{XX} \approx \frac{G_{i+1,j} - 2G_{i,j} + G_{i-1,j}}{(\Delta X)^2}$$

$$G_X \approx \frac{G_{i+1,j} - G_{i-1,j}}{2\Delta X}$$

$$G_K \approx \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{\Delta K}$$

由偏微分方程变为差分方程：

$$G_{i,j} = p^+ G_{i+1,j-1} + p^0 G_{i,j-1} + p^- G_{i-1,j-1} - n_{j-1} \quad (10-62)$$

式中

$$p^+ = \frac{\Delta K}{2k\Delta X} \left(\frac{\sigma^2}{\Delta X} + r - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)$$

$$p^0 = 1 - \frac{\sigma^2 \Delta K}{k(\Delta X)^2}$$

$$p^- = \frac{\Delta K}{2k\Delta X} \left(\frac{\sigma^2}{\Delta X} - r + \delta + \frac{1}{2} \sigma^2 \right)$$

$$n_j = \Delta K e^{\frac{r\Delta K}{k}}$$

注意到 $P^+ + P^0 + P^- = 1$,^[13]那么,最终边界条件变为

$$G_{i,j=0} = e^{i\Delta X} \quad (10-63)$$

而且上边界条件变为

$$\lim_{X \rightarrow \infty} [e^{-X} \cdot \frac{rK}{k} G_X(X, K)] = e^{-\frac{\delta K}{k}}$$

或者

$$G_X(m\Delta X, K) = e^{m\Delta X + (r-\delta)j\frac{\Delta K}{k}}$$

利用上面关于 G_X 的有限差分近似,这变成:

$$\frac{G_{m+1,j} - G_{m-1,j}}{2\Delta X} = e^{m\Delta X + (r-\delta)j\frac{\Delta K}{k}}$$

或者

$$G_{m+1,j} = 2\Delta X e^{m\Delta X + (r-\delta)j\frac{\Delta K}{k}} + G_{m-1,j}$$

现在将 $G_{m+1,j}$ 代入式 (10-62) (令 $I = m$):

$$G_{m,j-1} = p^+ G_{m+1,j} + p^0 G_{m,j} + p^- G_{m-1,j} - n_j$$

或者

$$G_{m,j+1} = p^+ [2\Delta X e^{m\Delta X + (r-\delta)j\frac{\Delta K}{k}}] + p^0 G_{m,j} + (p^+ + p^-) G_{m-1,j} - n_j \quad (10-64)$$

最后,自由边界条件变为

$$G_{i^*,j} = \frac{1}{v\Delta X + 1} G_{i^*,j+1} \quad (10-65)$$

方程的解从终端边界开始自后向前进行,如图 10-5 所示。首先,利用式 (10-63) 计算沿着终端边界的 G 值 ($j=0$)。逐步向后,直到 $j=1$,式 (10-64) 用来计算 $G_{m,1}$,而式 (10-62) 用来对 $I = m-1, m-2$ 等计算 G 的值。每次计算出一个 G 值,式 (10-65) 是用来检验自由边界是否被达到。由于存在因离散化引起的数量误差,式 (10-65) 将永远不能严格成立,因此,人们可以检验对于某一指明的范围 ϵ ,它是否成立。

$$G_{i^*,j} - \frac{1}{v\Delta X + 1} G_{i^*,j+1} \leq \epsilon \quad (10-66)$$

式中, ϵ 为任意选定的。(令 $\epsilon = \frac{\Delta X}{2}$)。一旦这种检验识别出自由边界,式 (10-28) 就被用于确定系数 α 的值,以及在自由边界下方的 G 的值。

我们将这一过程总结如下:

(1) 首先,利用式 (10-63) 来填充终端边界。

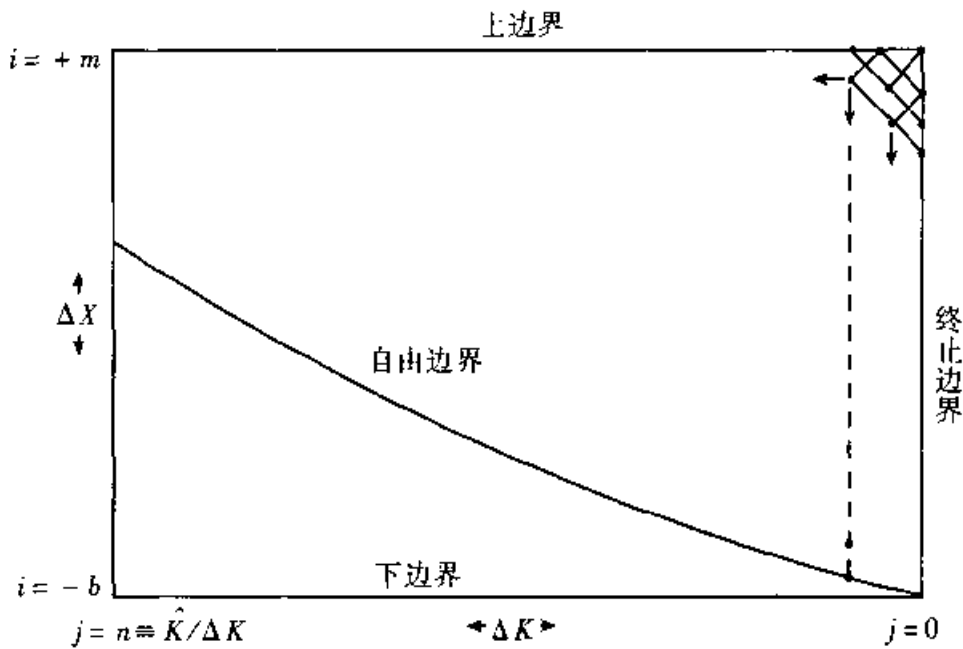


图 10—5 偏微分方程的数值解

(2) 然后, 对 $j=1$ 到 $j=n$, 利用式 (10-64) 来计算 $G_{m,j}$, 然后向下栏移动, 利用式 (10-62) 对 $i < m$ 来计算 $G_{i,j}$ 。

(3) 最后, 在自由边界, 利用式 (10-62) 来计算系数 α , 利用式 (10-28) 在更低的区域来填充 $G_{i,j}$ 的值。

注意, 由于有限差分近似, $V^*(K)$ 的解会受到一些数值误差的限制, 这就是为什么图 10—2 和图 10—3 中所画出来的点并不在光滑曲线上。一般地, 增量 ΔX 和 ΔK 越小, 这种数值误差会越小。

【本章注释】

[1] 霍金斯 (Hawkins, 1982) 发展出一个关于贷款周期协议的模型, 其结构与此相似, 但是却在两个区域都得到了解析解。

[2] 我们还应当提醒读者, 我们在第 5 章和第 6 章的讨论集中于参数 δ 。只要有人持有跟踪了 P 的风险的资产, 均衡条件 $\delta = \mu - \alpha$ 必须被满足。当 σ 变化时, 这种条件如何继续履行取决于关于这种资产的持有者行为的隐含假定。假定无风险利率 r 是外生的, 由政府政策或非常广泛的投资者的行为所决定, 这是合理的。那么, σ 的增加提高了 $\mu = r + \phi\sigma\rho_{pm}$, 其中 ϕ 为风险的市价价格, 而 ρ_{pm} 为跟踪 P 的资产和市场组合之间的相关系数。如果 P ——资产的持有者拥有一种保持不变的外生性的便利收益 δ , 则 α 必须

以某种方式改变以保持均衡。在这种情形下, σ 和 δ 可以被处理为独立参数, 这正是我们这里所采用的解释。然而, 如果 α 为外生固定的, 则为充分利用闲置资源, 便利收益 δ 必须改变。我们把这种情形留给有兴趣的读者。

[3] 正如在附录中所解释的那样, 由于有限的差分近似, V^* 的计算受到数值误差的影响。没有这些误差, 图 10—2 和图 10—3 中画出的点将位于光滑曲线上。

[4] 灵活性增加的价值的一种测度为对应于最短建设时间 $\frac{K}{k}$ 的变化的 $\frac{F(V, K; k)}{K}$ (所需的总成本中每 1 美元的投资机会的价值) 的变化。然而,

注意到 $F(V, K; k)$ 对 K 并不是线性齐次的, 因此, 这一测度也取决于 K 。

[5] 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 模型退化为我们第 5 章研究过的一个。利用第 5 章中的结论, 读者可以检验当 $r = 0.02$, $\sigma = 0.20$, $\delta = 0.06$ 且 $K = 6$ 时, 临界值为 $V^* = 8.6$ 。由于 $V = 10$ 和 15 都超过了这一点, 投资机会的价值正好是 $V - K$, 即 4.0 或 9.0 。

[6] 关于学习曲线的理论探讨及在确定性假定下在定价与生产中的应用, 参见斯潘塞 (Spence, 1981)、卡利什 (Kalish, 1983) 和平迪克 (Pindyck, 1985) 的论述。各类实验研究已经说明了学习曲线在非常宽泛的产业范围中的重要性, 例如参见利布曼 (Lieberman, 1984) 的论述。

[7] 回忆到 σ 为价格变化百分比的年标准差。如果这家企业的产出刚好是一种产业的商品 (例如, 铜、棉花或木材), 实际上 σ 将会远远大于 0.20 。而且, 注意到如果所有价格风险都被分散了, 因此, $\mu = r$, 那么令 $r = \delta$ 隐含着 $\alpha = 0$, 但是如果存在系统性风险, 因此, $\mu > r$, $\alpha > 0$ 。

[8] 正如斯潘塞 (Spence, 1981) 已经证明的, 如果贴现率为零 (而且不存在不确定性), 当价格超过长期边际成本时竞争性企业将生产, 当企业到达其学习曲线的底部时这是成功的。

[9] 当 $\sigma = 0$ 时, 通过对贴现利率流量的积分, 可能找到解析的 V_Q 和 P^* 。

[10] 这是下面的受控制的分叉过程的特殊情形:

$$dK = -I dt + g(I, K) dz$$

式中, $g_I \geq 0$, $g_{II} \leq 0$, 且 $g_K \geq 0$ 。为使该方程有经济意义, 需要满足一定的条件: (1) $F(K; V, k)$ 对 K , V 和 k 是次数为 1 的齐次式; (2) $F_K < 0$,

即一项投资的预期成本的上升经常降低其价值；(3) 当 $K \rightarrow 0$ 时，对所有有限的 K ， dK 的瞬时变化受到限制，而且 dK 趋于零；(4) 如果企业以最大增长率投资，直到项目完成， $E_0 \int_0^T k dt = K$ ，因此， K 实际上为完成时的预期成本。式 (10-45) 满足这些条件。

[11] 当 $I = k$ ，式 (10-48) 在 $K = 0$ 时有一次奇异点。为去掉这一点，作 $F(K) = f(y)$ 这样的替代，其中 $y = \log K$ ，则式 (10-48) 变为

$$f''(y) - f'(y) - \frac{2kf'(y)}{v^2k + \gamma^2e^y} = \frac{2k + 2rf(y)}{v^2ke^{-y} + \gamma^2}$$

而且边界条件式 (10-50) ~ 式 (10-52) 也作相应变换。

[12] 令 $G(K) = E_t \left[\int_0^T k d\tau \mid K \right]^2$ ，则 $G(K)$ 必须满足下面的柯尔莫哥洛夫方程：

$$\frac{1}{2} v^2 k K G''(K) - k G'(K) + 2kK = 0$$

约束于边界条件 $G(0) = 0$ 及 $G(\infty) \rightarrow \infty$ (参见卡林和泰勒 (Kallin and Tylor, 1981, p.203) 的论述)，该方程的解为 $G(K) = \frac{2K^2}{2 - v^2}$ ，因此，变化由式 (10-56) 给出。

[13] 这是关于 X 的布朗运动的三点随机游动，与我们在第 3 章及其他地方所用的二点形式类似。或者，如布伦南和施瓦茨 (Brennan and Schwartz, 1978) 已经证明的，人们可以分别根据概率和而向上和向下跳跃的跳跃过程来解释微分方程式 (10-62)。

第11章 累积投资与生产能力选择

357

第5章~第7章所论述的单个企业的投资决策模型以及第8章和第9章所阐述的产业均衡模型都是以投资的简单离散单位为基础的,即给出固定规模的单一项目。在第10章,继续考察了单一项目,但我们考虑了这样的事实,即项目的完成需要若干步骤,其中每一步都提高了与项目相关的沉没成本。在本章,我们在更一般的背景下考察企业的投资决策。我们允许每家企业持有并运营相当数量的项目、增加新项目,或者也许会终止旧项目。即使当企业试图增加新项目时,企业业已存在的项目仍持续地生产出产出流和利润流。换句话说,我们把企业考虑为选择投资政策以改变其资本存量。通过生产函数,企业当前的产出流取决于其已经投入的资本存量,可能还

有诸如劳动力和原材料等同时发生的可变投入的流量。

我们从考虑企业如何不可逆地投资于其资本存量出发。当生产函数显示出规模报酬递减时，我们可以概念性地把连续的单位资本根据其边际生产力递减的顺序把它们排列起来，并且把它们当做截然不同的投资项目。现在假定产出价格，或者一些可变投入的价格，或者影响生产力的其他一些参数为不确定的。对每一个概念性的离散项目，我们找到调整其投资的盈利临界值。这个结果有着通常意义上的期权价值解释：项目的边际贡献的预期现值必须为投资成本的乘数 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ ，其中 β_1 为包括了贴现率和价格过程的漂移系数和活动系数的基本二次式的通常的根。连续的资本单位，在连续下降的边际生产力条件下，需要越来越高的临界值。这样，我们找到一条将资本存量与随机状态变量的临界值联系起来的“临界值曲线”。当这个状态变量位于这条曲线下面时，没有投资会被作出；而当该变量上升到高于曲线时，刚好有足够的投资把我们拉到曲线上。

我们定义一种托宾 q 值，它以现在资本价值为基础，但应用于边际单位的资本。企业的最优投资政策就是当这一“边际 q ”上升到 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 时，增加边际单位的投资。

如果在生产函数中存在报酬递增的区域，那么证明1单位资本投资是合理的临界值可能也恰好可以证明拥有较高的边际产出的一些额外单位的投资也是合理的。这样，在资本存量穿过报酬递增的区域时，投资政策将产生一些突然的跃升。在第11.2节，我们将找到决定了这个临界值及这种跳跃的规模的实际条件。结果它是标准的期权价值乘数条件的自然近似，但现在却是根据资本的离散跳跃的平均产出来解释的，而不是下一个小单位的边际产出。

在前面的章节中，每家企业仅仅需要决定是否继续一个单一的项目，投资成本为一个数，至于我们是把它看做作出决策中的固定成本，或是代表不可逆投资中的沉没成本，还是当企业在较短的时间跨度内试图安装一个给定的资本存量的增量时的调整成本等，这些都没有影响。然而，现在企业正在选择其资本存量的时间路径，我们必须更详细地说明投资成本如何取决于投资规模和投资增长率，刚刚提到过的区别就变得非常重要了。最优投资政策采取了非常不同的形式，取决于成本的特征。

本章前两节所提供的模型是在决策制定中没有任何调整成本或固定成本

条件下来处理不可逆投资的。这样，资本存量的任何增加的沉没成本与所增加的规模成比例。在第 11.3 节，我们考虑了更一般的模型，其中包括了所有这三种成本。我们表明这些其他的成本如何影响投资决策，而且还说明了我们的方法与投资的传统 q 理论之间的联系与区别。

我们将讨论限定为单个企业。原则上讲，像我们在第 8 章和第 9 章中那样来分析竞争性均衡水平是没有困难的，但是代数的复杂性很快就会上升，而且似乎更重要的是集中于假定的最简单的可能下可变能力所引起的新问题。

11.1 报酬递减条件下生产能力的逐步扩张

我们由企业生产能力的扩张开始，以平迪克 (Pindyck, 1988b) 和伯特拉 (Bertola, 1989) 的理论为基础。它只不过是第 6 章中模型的一般化：与那里一样，我们假定企业拥有投资于该产业的垄断权。每一单位资本的成本为 k ，而且对该单位的投资是不可逆的。当企业已经有 K 单位资本时，产出 Q 的流量由生产函数 $Q = G(K)$ 给出。该产业的需求函数为 $P = YD(Q)$ ，其中转换变量 Y 服从几何布朗运动：

$$dY = \alpha Y dt + \sigma Y dz \quad (11-1)$$

为简化起见，我们假定不存在可变成本，因此，利润流为

$$\pi = YD(G(K))G(K) = YH(K) \quad (11-2)$$

资本产出的边际收益为 $YH'(K)$ 。在这一节，我们假定存在资本的边际报酬递减，即产出的边际收益对 K 是递减的，或者收入函数对 K 是凹的，因此， $H''(K) < 0$ ，由于生产中的物理性报酬递减 ($G''(K) < 0$)，或者产业需求曲线向下倾斜 ($D'(Q) < 0$)，或者这两种情形的混合等，这可能是实际情形。(实际上，即使存在物理性报酬递增，我们也会有产出的边际收益递减，只需需求曲线有充分大的负斜率。)

更一般地，我们可以把利润流看做瞬时最优问题的结果，其中诸如劳动力或原材料之类的可变投入是在保持资本水平固定的条件下选出的，惟一的新特征就是随机变量不需要成倍数地进入。在本节后面，我们将考虑这种推广，并指出其对投资不确定性影响的意义。

跟以往一样，从两种本质上等价的方法中的任何一种都可以考察投资决策，即动态规划和或有债权分析。我们利用第 5 章和第 6 章的两种方法来处

360 理单一项目决策，并揭示出它们的相似性。从那以后，我们或者用这种方法或者用另一种方法来适应表达的需要。然而，累加性生产能力选择的当前假定在一定程度上是新的，因此，我们将再次明确地讨论这两种方法。

11.1.1 通过动态规划的最优投资

给定初始资本存量 K 及随机需求转移变量 Y 的初始水平，企业将选择其资本存量 K_t 的路径，从而最大化其运营利润减去投资成本后的预期净现值。令 ρ 为未来利润的贴现率。将 $W(K, Y)$ 写成最大化的价值函数或者企业选择问题的贝尔曼函数。当然这个函数事先是未知的，但是必须作为解的一部分确定下来。^[1]

考虑一小的时间区间 dt 。实际决策是连续作出的，而且区间 dt 是任意构造出来的，因此，我们对 $dt \rightarrow 0$ 时的极限感兴趣。在这一时间段内的利润流为 πdt ；在这一时间段内的贴现效应的阶数为 dt^2 ，因此可以忽略不计。假定在这一时间段末，企业将其资本存量从 K 增加到 K' ，需求转换变量在该区间上由 Y 变为 $Y + dY$ 。当然，给定企业在时刻 t 的信息，企业并不知道 dY 会是什么，但是从式 (11-1) 中企业知道 dY 的概率分布，因此，它将资本存量的这种增加的期望值计算为

$$YH(K)dt + e^{-\rho dt} \{E[W(K', Y + dY)] - k(K' - K)\} \quad (11-3)$$

企业将选择 K' 以最大化这一表达式的右边。那么，作为最大化的结果正好是贝尔曼函数的初始值 $W(K, Y)$ 。

361 我们假定函数 $H(K)$ 为凹的。那么，容易说明贝尔曼函数 W 关于 K 也是凹的。为弄清为什么，考虑任意两个开始的资本存量，如 K_a 和 K_b ，并假定最优投资政策导致 $\{K_{at}\}$ 和 $\{K_{bt}\}$ 为对应于随机变量 $\{Y_t\}$ 的特定实现路径的相应生产能力扩张的路径。现在令 θ 为 0~1 之间的任意值，并考虑当资本存量为 $\theta K_a + (1 - \theta) K_b$ 时企业的投资问题。限定投资政策遵循下面的规则：如果随机变量沿着路径变化，生产能力沿着 θ 加权平均的路径 $\{\theta K_{at} + (1 - \theta) K_{bt}\}$ 扩张。假定被标为 a 和 b 的分离路径是可行的，在任何时间 t ，每个 K_{at} 和 K_{bt} 都不能利用比随机变量在时间 t 内的路径中所提示出信息还要多的信息。那么，对 θ 加权平均的路径也是如此，因此它也是可行的。

由于函数 H 为凹，前面所限定的政策产生了下面的收入流：

$$Y_t H[\theta K_{at} + (1 - \theta) K_{bt}] \geq \theta Y_t H(K_{at}) + (1 - \theta) Y_t H(K_{bt})$$

投资成本流正好是情形 a 和情形 b 下分离的政策成本流 θ 的加权平均。贴现并对可能实现的 $\{Y_t\}$ 求期望值, 我们有

$$W[\theta K_a + (1-\theta)K_b, Y] \geq \theta W(K_a, Y) + (1-\theta)W(K_b, Y)$$

或者 W 关于 K 是凹的。

凹性确保了式 (11-3) 的最大化可以由熟悉的库恩-塔克 (Kuhn-Tucker) 微积分条件来描述。表达式 (11-3) 关于 K' 的导数为

$$e^{-\rho dt} \{E[W_K(K', Y + dY)] - k\}$$

当 $dt \rightarrow 0$ 时, 上式趋于 $W_K(K', Y) - k$ 。不可逆性要求 $K' \geq K$ 。

如果 $W_K(K, Y) \leq k$, 在范围 $K' \geq K$ 内, 最大值关于 K' 是递减的。那么最优政策将是保持 $K' = K$, 即不对生产能力进行任何的增加。如果 $W_K(K, Y) > k$, 最优政策是把 K' 设定为通过瞬时安装 $(K' - K)$ 资本量的一阶条件 $W_K(K', Y) = k$ 所限定的水平上。

假定在某一时间内, 全部问题都得到解决, 而且函数 W 是已知的, 则前面所描述的投资政策可以如下显现。在 (K, Y) 空间内, 画出由式 (11-4) 所限定的曲线:

$$W_K(K, Y) = k \quad (11-4)$$

我们在图 11-1 中显示了结论。曲线显示为向上倾斜, 因为更高的 Y 提高了来自任意给定的资本水平下的利润, 并因此将调整更多的资本存量, 从而有更多的投资。现在我们把问题放在这种直觉水平上, 正式的证明将在后面, 而且图中的说明也预示着接下来的一些工作。

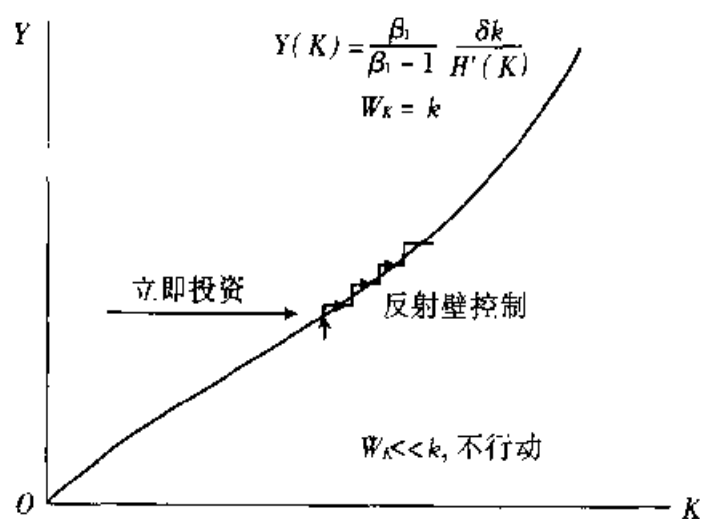


图 11-1 报酬递减下的投资决策

36.2 曲线下面或右边, 我们有 $W_K < k$ 且没有投资会被作出。随着 Y 的随机性波动, 点 (K, Y) 垂直地向上或向下移动。如果它曾经上升到遇到曲线并试图跨过它, 刚好会有足够的投资被作出来以终止它穿过曲线; 这在图 11-1 中被显示为表示逐步投资阶段的一系列小步骤的序列。从技术术语来讲, 这种政策有时被称为“壁控制”, 因为它阻止了代表受控系统点穿过 (K, Y) 空间中特定的壁曲线。如果在一个壁控制阶段之后, Y 下降到把我们带到低于壁曲线, 投资就会停止, 直到 Y 再次上升到击中壁曲线。

如果初始点位于曲线 $W_K = k$ 的上方或左边, 资本存量会立刻以足够大的离散数量增加, 并水平移动曲线上的点。从那以后, 壁控制就会接管。因此, 除非初始点时有可能, 点 (K, Y) 永远不可能高于曲线。^[2]相应地, 资本存量的离散跳跃只能发生在初始时刻。从那以后, 资本存量或者在整个时间内都为常数, 当 Y 低到足以把我们保持在曲线下面时; 或者当 Y 位于曲线上时它连续地对小的增量作出反应。

36.3 如果 K 关于 t 的导数是有限的, 我们把它称为投资 I 的流量或增长率。然而, 这对壁控制是有问题的。正如我们在第 3 章关于布朗运动的讨论中所解释过的, Y 的时间路径是不可微的。在壁上, Y 的任何向上的移动都将导致 K 相应的向右的移动, 因此, 在这种位置上 K 的时间路径也是没有微分的, 时间导数 $\frac{dK}{dt}$ 是无限的。这样, 壁控制政策在整个时间内不能复制投资的有限增长率, 而是当壁被击中时不时地发生投资的小爆发。当然, 从关于时间的更宏观的视角来看, 我们可以计算投资的平均增长率, 即资本在一个长的时间区间内的平均变化率。

现在开始以一定程度上更详细的方式来形成论点及最优政策。我们从曲线 $W_K = k$ 下面的不行动区域开始, 其中政策为投资为零的一种政策。这里必须对式 (11-3) 做 $K' = K$ 的替换, 以得到初始值 $W(K, Y)$ 。这样我们有

$$W(K, Y) = YH(K)dt + e^{-\rho dt} E[W(K, Y + dY)]$$

利用伊藤引理展开右边并按 dt 的次数排序, 我们得到

$$\begin{aligned} W(K, Y) &= YH(K)dt + (1 - \rho dt) [W(K, Y) + \alpha YW_Y(K, Y)dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 W_{YY}(K, Y)]dt \\ &= W(K, Y) + [YH(K) - \rho W(K, Y) + \alpha YW_Y(K, Y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 W_{YY}(K, Y)dt] \end{aligned}$$

因此, $W(K, Y)$ 满足微分方程:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 W_{YY}(K, Y) + \alpha Y W_Y(K, Y) - \rho W(K, Y) + YH(K) = 0 \quad (11-5)$$

由于 W 为两个变量的函数, 这实际上是一个偏微分方程。幸运的是, 它并没有包括任何关于 K 的导数。这样, 我们可以把它看做将 W 和 Y 联系起来的常微分方程, 并且把 K 看做改变了整个函数关系的一个参数。任意的常数积分也会受到 K 的影响, 因此, 它们应当被看做 K 的函数。

式 (11-5) 的一般解具有在第 6 章和第 7 章中熟悉的形式:

$$W(K, Y) = B_1(K) Y^{\beta_1} + B_2(K) Y^{\beta_2} + \frac{YH(K)}{\rho - \alpha}$$

式中, β_1 和 β_2 分别为下面的基本二次式的正根和负根:

$$Q \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta - 1) + \alpha\beta - \rho = 0$$

而 $B_1(K)$ 和 $B_2(K)$ 为需要确定的积分常数。

图 11-1 中的零投资区域包括当 $Y \rightarrow 0$ 时的极限。为保持 $W(K, Y)$ 在那里为有限, 我们必须舍掉解中 Y 的负根。因此, 令 $B_2(K) = 0$ 。我们还简化 $\rho - \alpha = \delta$ 。那么, 该解变为

$$W(K, Y) = B_1(K) Y^{\beta_1} + \frac{YH(K)}{\delta} \quad (11-6)$$

通过考虑零投资区域内的其他边界条件, 即 $W_K(K, Y) = k$, 就可以确定出剩余的常数 $B_1(K)$ 。求 Y 关于 K 的解, 并将这条曲线记做 $Y = Y(K)$, 那么

$$W_K[K, Y(K)] = B'_1(K) Y(K)^{\beta_1} + \frac{Y(K)H'(K)}{\delta} = k \quad (11-7)$$

式中, $B'_1(K)$ 为 $B_1(K)$ 关于 K 的导数。这正好是价值匹配条件。最优化的其他条件就是平滑粘贴条件, 它要求当 Y 提高到其临界值 $Y(K)$ 时, $W_K(K, Y)$ 关于 Y 的导数等于 k 关于 Y 的导数。由于 k 的导数为零, 我们有

$$W_{KY}[K, Y(K)] = \beta_1 B'_1(K) Y(K)^{\beta_1 - 1} + \frac{H'(K)}{\delta} = 0 \quad (11-8)$$

结合这两个条件, 不仅能确定 $B'_1(K)$, 而且还能确定投资临界值 $Y(K)$ 的位置, 即自由边界:

$$Y(K) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{\delta k}{H'(K)} \quad (11-9)$$

$$\text{及 } B'_1(K) = - \left(\frac{\beta_1 - 1}{k} \right)^{\beta_1 - 1} \left[\frac{H'(K)}{\beta_1 \delta} \right]^{\beta_1} \quad (11-10)$$

观察到当 K 上升时, $H'(K)$ 下降, 从而 $Y(K)$ 上升。这证明了我们前面的直觉, 即临界值应当是向上倾斜的。

临界值的公式是非常熟悉的。假定现有资本存量为 K 且随机冲击的值为 Y 时, 我们利用了资本的边际单位 dK 。这一边际单位对利润流的贡献为 $YH'(K)dK$ 。由于预期 Y 将以增长率 α 提高, 未来利润以贴现率 ρ 进行贴现, 这一贡献的预期现值为 $\frac{YH'(K)dK}{(\rho - \alpha)}$ 。边际单位资本的利用成本为

365 $k dK$ 。那么式 (11-9) 说明, 当预期现值超过成本的倍数为 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 时, 企业资本存量的边际增加是合理的。这实际上是在第 5 章单个离散投资的标准下保持状态不变时反映的期权价值的乘数。这里我们得到了该结论在现有生产能力上边际增加的情形下的自然一般化。

式 (11-6) 的解释现在应当是非常明显的。 $\frac{YH(K)}{\delta}$ 的项就是当企业把其资本存量永远保持在初始水平 K 上时所得到的利润的期望现值。那么其他的项 $B_1(K) Y^{\beta_1}$ 必然为企业未来生产能力最优扩张的价值, 即在未来扩张其生产能力的期权的当前价值。当企业执行利用第 $(K + dK)$ 单位的资本的期权时, 它放弃了边际期权价值, 这就是为什么式 (11-10) 中的 $B'_1(K)$ 为负。式 (11-7) 表明, 在调整增加的投资为 dK 的临界值上, 它对资本化的利润流的预期贡献应当等于其利用成本加上等待期权的机会成本。

利用关于 $B'_1(K)$ 的解, 通过积分可以找到 $B_1(K)$ 自身:

$$B_1(K) = \int_K^{\infty} [-B'_1(k)] dk = \left(\frac{\beta_1 - 1}{k} \right)^{\beta_1 - 1} \int_K^{\infty} \left[\frac{H'(K)}{\beta_1 \delta} \right]^{\beta_1} dk \quad (11-11)$$

为使这一积分收敛, $H'(K)$ 必须充分快地下降。柯布-道格拉斯情形将说明这一点:

$$H(K) = K^\theta, \quad H'(K) = \theta K^{\theta - 1}, \quad 0 < \theta < 1$$

现在积分项为一常数乘以 $K^{-\beta_1(1-\theta)}$ 。为了这一积分是收敛的, 幂的数值必须超过 1, 因此, 我们必须有 $\beta_1 > \frac{1}{1-\theta}$ 。换句话说, θ 必须充分小于 1, 这意味着资本回报必须充分快地下降。资本的这些回报都是关于收益的, 并且结合来自生产函数及需求曲线的效应, 见式 (11-2)。那么, 我们可以看

到,这种收敛要求具有非常好的经济意义。如果规模报酬为一常数,而不是递减的,使 1 单位投资为合意的漂移变量 Y 的临界水平将使得生产能力成比例地更大的扩张更受到期待,因此,对企业的最优生产能力没有最优解。

我们将继续假定收敛条件成立。如果在某一充分高的水平 \bar{K} 上,资本的边际产出下降为零,则积分的上限可以由 \bar{K} 来代替,而收敛也不成问题。例如,这正是由平迪克 (Pindyck, 1988b) 所发展出来的一个模型,其中假

定了线性需求曲线。对小的 K 的临界曲线的行为值得给予一定的关注。在增长理论中,假定当 $K \rightarrow 0$, $H'(K) \rightarrow \infty$ 是非常普遍的,这被称为伊那达 (Inada) 条件。如果这个条件对我们的企业成立,则 $Y(K) \rightarrow 0$ 。这正是图 11-1 中所显示出来的情形。然而,如果边际产出 $H'(K)$ 始终向小的 K 移动,则 $Y(K)$ 将保持为正;即使是第一个单位的资本的利用也要求随机变量的一个严格为正的临界水平。

这个解的最有价值的特征就是我们可以把资本的连续的边际增加看做分开的小项目,每个项目都与其他项目相互独立地贡献其边际产出。那么,利用标准的期权定价方法,我们可以找到每个项目的最优投资临界值,并且把它们连在一起得到全部生产能力扩张问题的解。为什么我们能够独立地处理每一单位的资本呢?

由于报酬递减,被标记为 K_2 的资本边际单位可以与另一个被标记为 $K_1 < K_2$ 的边际单位独立地处理。只有当所有前面的单位都已经存在时, K_2 单位的边际产品才会是 $H'(K_2)$ 。报酬递减确保了这一点: K_1 的临界值低于 K_2 的临界值,因此,被标记为 K_1 的单位在被标记为 K_2 的单位之前被利用。^[3]相反地,由于我们在第 9 章中所看到的两种影响之间的相互抵消,在 K_1 的单位可以与 $K_2 > K_1$ 的单位独立地处理。当在 K_1 的单位的决策是根据式 (11-9) 作出来的时候,企业就像在这是最后一个被利用的单位那样行动。因此,它忽略了两个事实:(1) 它忽略了未来扩张所可能引起的资本的生产能力的减少,这使得企业更愿意投资。(2) 它忽略了 K_1 单位的存在为下一单位的到来铺平了道路,因此,假定存在等待的更大的回旋余地。考虑到企业在执行 K_1 的单位时就好像没有了进一步扩张的机会,这两种影响实际上是相互抵消的。

尽管所有的有趣的行动都位于曲线 $Y(K)$ 的下方或其上方,为了完整性,

我们陈述了企业在曲线上方的动态规划问题的解。令沿着这条曲线 K 关于 Y 的解为 $K(Y)$ ，这刚好是函数 $Y(K)$ 的逆。那么企业从 (K, Y) 跳到了 $(K(Y), Y)$ ，而且有

$$W(K, Y) = W[K(Y), Y] - k[K(Y) - K] \quad (11-12)$$

这样实际上在曲线上方的任意一点，我们都有 $W_k = k$ 。

11.1.2 或有债权方法

现在让我们弄清这种投资问题如何能够利用或有债权方法求解。我们继续把资本存量看做连续的边际项目，每一项目都是贡献了边际利润流的资产。评价这些资产中的每一个以及得到它的期权所遵循的步骤在第 5 章～第 7 章已经非常熟悉了。

我们假定 Y 的随机波动可以由金融市场中交易的资产来复制，并且将复制资产组合的经风险调整的预期回报率记作 μ 。跟以前一样， Y 的回报不足或便利收益，即 $\mu - \alpha$ 用 δ 来表示。

现在考虑第 $(K + dK)$ 边际单位的投资。一旦利用了，这个单位将永远产生 $YH'(K)dK$ 的边际利润流。令 $v(K, Y)dK$ 表示这一已经利用的单位的价值。现在考虑由这一单位及跟踪 Y 的资产（或资产组合）的 n 单位空头所组成的投资组合。这一投资组合在每单位时间内产生了数量为 $[YH'(K) - n\delta Y]$ 的现金流。（现金流的第二项是空头持有者必须支付给相应的多头持有者的数量。）这个组合也会随着 Y 的波动而拥有预期资产收益或损失。利用伊藤引理，我们有

$$dv(K, Y) - n dY = \left[\alpha Y (v_Y - n) + \frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 v_{YY} \right] dt + Y (v_Y - n) dz$$

选择 $n = v_Y$ ，使得这个组合成为无风险的。当然，当 Y 和 K 在整个时间内变化时，空头中的单位 n 也必须持续地变化（即必须采用动态对冲策略）以保持这种特征。由于无风险资产必须获得无风险回报 r ，我们有

$$[YH'(K) - \delta Y] + \left[\alpha Y (v_Y - n) + \frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 v_{YY} \right] = rv$$

或者

$$\frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 v_{YY} + (r - \delta) Y v_Y - rv + YH'(K) = 0 \quad (11-13)$$

正如我们在第 6.1 节已经看到的，这个方程有一般解：

$$v(K, Y) = a_1(K) Y^{\beta_1} + a_2(K) Y^{\beta_2} + \frac{YH'(K)}{\delta}$$

惟一的新特征就是积分常数现在被指定为考虑中的资本单位，因此，它们是 K 的函数。正如在第 6 章中，我们排除掉对应于负根 β_2 的项，以确保当 $Y \rightarrow 0$ 时存在有限值；而当 $Y \rightarrow \infty$ 时，为排除泡沫应该排除掉对应于正根的项，而仅仅保留基本项，或者利润的贴现现值：

$$v(K, Y) = \frac{YH'(K)}{\delta} \quad (11-14)$$

下面我们评价投资于这一增加的资本单位的期权价值。令 $f(Y, K)$ 表示这一期权价值。回忆第 6 章中的步骤，我们构造了一个动态平衡的无风险投资组合，它由这个期权和跟踪 Y 的资产的 f_Y 单位的空头所组成。令其回报等于 r ，我们得到下面的方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 f_{YY} + (r - \delta) Y f_Y - r f = 0$$

它有一般解：

$$f(K, Y) = b_1(K) Y^{\beta_1} + b_2(K) Y^{\beta_2}$$

当 $Y \rightarrow 0$ 时，期权一直保持为活动的，而且必须具有有限值，因此，我们消去对应于负根 β_2 的项。然而，对某一有限的项 Y ，期权将会被执行；当 $Y \rightarrow \infty$ 时，期权的价值将不再是相关的，因此，我们不能推断其他的项。这剩下了下式：

$$f(K, Y) = b_1(K) Y^{\beta_1}$$

那么，常数 $b_1(K)$ 及最好执行期权的临界值 $Y(K)$ 一起由熟悉的价值匹配和平滑粘贴条件来决定：

$$f(K, Y) = v(K, Y) - k, \quad f_Y(K, Y) = v_Y(K, Y)$$

仅仅通过代数产生：

$$Y(K) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{\delta k}{H'(K)}$$

及

$$b_1(K) = - \left(\frac{\beta_1 - 1}{k} \right)^{\beta_1 - 1} \left[\frac{H'(K)}{\beta \delta} \right]^{\beta_1}$$

这正好是我们在前面利用动态规划方法所发现的投资临界函数和边际期权价值系数的表达式。事实上，贝尔曼价值函数导致第 $(K + dK)$ 单位投资的边际增加实际上等于在适当位置上的这个单位的基本价值减去当这个单位已经装备时放弃期权的价值：

$$W_K(K, Y) = v(K, Y) - f(K, Y)$$

因此，动态规划中的价值匹配和平滑粘贴条件， $W_K = k$ 和 $W_{KY} = 0$ ，与前面的期权定价的那些条件是一致的。^[4]

11.1.3 边际 q

我们把式(11-9)解释为资本的边际单位所贡献的利润的期望现值必须等于其购买成本的一个乘数以说明其利用是合理的，这可以解释为托宾 q 值。新特征是我们必须限定 q 代表生产能力的边际单位，或者“边际 q ”。回顾我们在第 5 章所做的区分，我们采用了“在适当位置上资产的价值”的概念。应用于边际单位，这正好是它贡献的利润的期望现值与其重置成本之比，或者

$$q(K) = \frac{YH'(K)}{\delta k}$$

那么 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 为在点 K 对边际单位的投资被证明合理之前 $q(K)$ 必须上升到的临界值。

在第 5.2.3 小节中，我们界定了另一种意义上的托宾 q 值，即一个以企业价值为基础并考虑了执行一个投资期权的机会成本的 q 。这里类似地，生产能力扩张对企业价值的边际影响为其所贡献的利润的期望现值 $v(K, Y)$ 减去投资期权的价值 $f(K, Y)$ 。那么，在企业价值意义上的边际 q 将被界定为 $\frac{v(K, Y) - f(K, Y)}{k}$ ，而其临界值将为 1。这实际上就是在第 5 章离散项目中的相应发现的一种类推。

11.1.4 不确定性的影响

让我们重新考察式(11-9)投资临界值的解。该公式显示出不确定性对投资的两种影响。

370 (1) 正如在第 5 章~第 7 章中所述，如果 σ 提高，根 β_1 会下降，期权价值乘数 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 会上升。对任一给定的 K ，这提高了 Y 的临界值。在这种意义上，不确定性程度越高意味着企业越不愿意投资。

理解该结论的确切意义是非常重要的。它只不过说明对一个小的 σ 值证明给定的生产能力的增加是合理的，对较大的 σ 值可能并不充分。但是当 Y 服从其随机过程时，这个结论对临界值多么迅速及多么经常达到没有任何说明。从某一给定的初始值开始，一个更灵活的过程要比一个更不灵活

的过程更快地达到给定的 Y 的目标水平。为找到提高的不确定性的全部影响，我们必须对比提高 Y 的临界值的影响及提高 Y 移动的灵活性的影响。下面，在一个容易处理的例子分析的背景下，我们将看到这些力量如何随着时间推移而相抵到平均水平。

(2) 在式 (11-9) 中出现的不确定性的第二种影响来自 δ 项。考虑到这是回报不足或便利收益 $\mu - \alpha$ ，而 μ 为无风险的贴现率：

$$\mu = r + \phi \rho_{YM} \sigma$$

这里我们利用第 5 章和第 6 章中的记号，因此， ϕ 为风险的市场价格，而 ρ_{YM} 为跟踪 Y 的资产及市场组合之间的相关系数。现在 σ 增加的影响取决于其他保持为常数的项。如果 r 和 α 都是基本的外生常数，则 σ 的增加也会提高 μ 和 δ 。另外，如果 r 和 δ 为基本常数，则 α 必须调整到抵消 σ 对 μ 的影响。在第一种情形下，式 (11-9) 中的临界值会受到影响，在第二种情形下，式 (11-9) 中的临界值将保持不变。

还有第三种不确定性影响，它在我们的公式中没有出现，因为我们已经使利润流函数对 Y 是线性的。更一般地，我们已经规定了一个函数 $\pi(K, Y)$ 。现在临界值的确定以与第 9 章中产业均衡扩张的一般模型一样来进行。为记号方便，我们将采用有一个外生固定的贴现率的动态规划方法，但是相应的结论可以通过利用第 4.3 节中等价的风险中性评估过程的或有债权方法得到。

生产能力扩张对利润流的边际影响为 $\pi_K(K, Y)$ 。保持 K 固定，令随机冲击沿着由初始价值 Y 开始的随机路径 $\{Y_t\}$ 来变化。计算这一边际利润流的贴现现值：

$$\Pi_K(K, Y) = E \int_0^{\infty} \pi_K(K, Y_t) e^{-\alpha t} dt$$

这将替代在企业价值计算中的边际贡献 $\frac{YH'(K)}{\delta}$ 。因此，价值匹配条件式 (11-7) 将变成

$$W_K[K, Y(K)] = B'_1(K) Y(K)^{\beta_1} + \Pi_K[K, Y(K)] = k$$

而平滑粘贴条件式 (11-8) 变为

$$W_{KY}[K, Y(K)] = \beta_1 B'_1(K) Y(K)^{\beta_1 - 1} + \Pi_{KY}[K, Y(K)] = 0$$

消去两个条件中的 $B'_1(K)$ ，临界值函数 $Y(K)$ 被隐性地限定为

$$\Pi_K[K, Y(K)] - \frac{Y(K)}{\beta_1} \Pi_{KY}[K, Y(K)] = k \quad (11-15)$$

利润流与随机变量 Y 正相关, 因此, Π_{KY} 为正。从而 $\Pi_K[K, Y(K)] > k$ 。换句话说, 为了使投资是合理的, 对利润流的边际贡献的期望现值将超过生产能力边际提高的成本, 需要的余额刚好为执行这种扩张的边际期权的机会成本。^[5]

由于 Y 在左边是非线性进入的, Y 的随机过程中的较高的不确定性有额外的影响。大致来说, 如果边际利润流 $\pi_K(K, Y)$ 为 Y 的凸函数, 不确定性程度越高意味着边际期望现值 $\Pi_K(K, Y)$ 也越大, 从而临界值越小, 因此, 不确定性程度的提高激励了投资。

这样的简单例子包括了一种封闭形式的解, 它更进一步地澄清了这一点。假定生产中包括了一种可以在每一时刻都最优选择的可变投入 (劳动力)。假定生产函数为柯布-道格拉斯生产函数。则

$$\pi(K, Y) = \max_L [YK^\theta L^\nu - \omega L]$$

式中, ω 为工资率; 而 $\theta + \nu < 1$ 以确保规模报酬递减。那么我们发现:

$$\pi(K, Y) = CY^{1-\nu} K^{1-\frac{\theta}{1-\nu}}$$

式中, C 为正的常数, 其确切值对我们当前的目的并不重要。因此

$$\pi_K(K, Y) = \frac{C\theta}{1-\nu} Y^{1-\nu} K^{-\frac{1-\theta-\nu}{1-\nu}}$$

372 由于 Y 的幂为 $\frac{1}{1-\nu} > 1$, 我们看到 $\pi_K(K, Y)$ 关于 Y 是凸的。实际上, 对这种情形, 我们可以明确地计算出临界值。伊藤引理的直接应用给出:

$$E\left[Y_t^{\frac{1}{1-\nu}}\right] = Y_0^{\frac{1}{1-\nu}} \exp\left\{\left[\frac{\alpha}{1-\nu} + \frac{\frac{1}{2}\sigma^2\nu}{(1-\nu)^2}\right]t\right\}$$

那么

$$\Pi_K(K, Y) = \frac{\frac{C\theta}{1-\nu}}{\rho - \frac{\alpha}{1-\nu} - \frac{\frac{1}{2}\sigma^2\nu}{(1-\nu)^2}} Y^{\frac{1}{1-\nu}} K^{-\frac{1-\theta-\nu}{1-\nu}}$$

利用公式 (11-15) 并求出临界值, 我们发现:

$$Y(K) = \left\{ \frac{\beta_1}{\beta_1 - \frac{1}{1-\nu}} \right\}^{1-\nu} \left[\frac{\partial k \left[\rho - \frac{\alpha}{1-\nu} - \frac{\frac{1}{2}\sigma^2\nu}{(1-\nu)^2} \right]}{\frac{C\theta}{1-\nu}} \right]^{1-\nu} K^{1-\theta-\nu}$$

我们看到, σ 的提高降低了右边第二个圆括号中表达式的数值, 从而对临界值的降低有贡献。当然, σ 的提高降低了根 β_1 , 并因此提高了期权价值乘数

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 - \frac{1}{1-\nu}}$$

这对提高临界值有贡献。其平衡取决于其他参数 ρ , α 和 ν 。

11.1.5 长期平均投资

沿着上面所推导出来的最优政策, 无论何时状态 (K, Y) 从下面击中临界值, 企业都会突然投资。尽管这样的击中在每一时刻都是随机的, 我们可以计算出企业的资本存量在很长的时间段内的平均增长率。这样做提供了观察不确定性对投资的影响的另一条有用的路径。

为做到这一点, 我们考虑柯布-道格拉斯生产函数的特定情形:

$$H(K) = K^\theta, \quad 0 < \theta < 1$$

在这种情形下, 关于临界值的式 (11-9) 可以写作:

$$YK^{-(1-\theta)} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{\delta k}{\theta}$$

我们将利用 M 来简化这个方程式的左边。方程式右边为一常数, 将它简写为 \bar{M} 。当 Y 波动时, M 也波动。最优政策是当 M 提到 \bar{M} 时增加 K , 而这样就防止了 M 的进一步提高。

在这一计算中, 我们将用相应的小写字母来表示所有这些变量的自然对数, 这样有 $y = \log Y$ 等。当 $m < \bar{m}$ 时, 没有投资会被作出, 因此, K 为常数, 而且 m 服从与 y 相同的布朗运动, 即漂移参数为 $\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$ 、波动参数为 σ 的绝对运动。然而, 当 m 等于 \bar{m} 时, 投资发生且 K 提高。利用布朗运动理论, 我们可以描述 m 长期分布的特征。我们将忽略其推导, 并推荐读者参阅哈里森 (Harrison, 1985, p.90) 或者迪克西特 (Dixit, 1993a, p.61) 的著作。只有当 $\alpha > \frac{1}{2}\sigma^2$ 时, 该分布才会存在, 因此, 我们对这种假定进行分析。那么, 该分布是指数分布, 其密度为

$$\alpha' \exp[-\alpha'(m - \bar{m})], \quad -\infty < m < \bar{m}$$

式中, $\alpha' = \frac{2\alpha}{\sigma^2} - 1 > 0$ 。我们对于当 m 非常接近于 \bar{m} 时的这部分分布感兴趣。

为确定 K 的长期增长率, 我们把 m 的布朗运动看做离散的随机游动。

以第 2.2.2 小节中所讨论的方法，将时间分成期限非常短的时间区间 dt ，把 m 的范围分成非常小的规模距离 $dh = \sigma \sqrt{dt}$ 。现在，考虑前面给出的 m 的指数分布，我们知道在长期均衡中， m 位于立即到达 \bar{m} 左边的概率为 $\alpha' dh$ 。假定 m 确实刚好位于 \bar{m} 的左边，并注意 y 可以向上或向下移动。 y 经历过以规模 dh 向上移动的概率由 $p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha' \sqrt{dt}}{\sigma} \right)$ 给出。如果那种情形发生了， k 的相互抵消的增长阻止了 m 击中 \bar{m} 。在那种情形下：

$$dh - (1 - \theta) dk = 0$$

或
$$\frac{dK}{K} = dk = \frac{dh}{1 - \theta}$$

因此，在一个长的时间跨度内，资本的平均增长率是由这些概率和增长率的结果所给定的： m 非常接近于 \bar{m} 的概率（为 $\alpha' dh$ ），乘以 y 向上移动的概率（ p ），再乘以当 y 的向上移动发生时 K 增长的百分比 $\left(dk = \frac{dh}{1 - \theta} \right)$ 。为得到增长率，我们用 dt 来分开产出。考虑到 $dh = \sigma \sqrt{dt}$ ，发现 K 的长期平均增长率为

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\frac{2\alpha}{\sigma^2} - 1}{1 - \theta} = \frac{\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2}{1 - \theta}$$

这样，在柯布-道格拉斯情形下，较大的 σ 意味着资本存量的较低的增长率，因此，平均来讲发生较少的投资。

874 11.1.6 折旧

现在我们考察如果企业已经利用的资本逐步腐蚀时会发生什么情况。为了分析的方便，大多数关于这个主题的理论处理都假定资本的腐蚀是如同泊松过程那样指数性发生的。因此，假定企业在时间 t 的资本存量为 K 。在下一个小时时间段 dt 内，这些已经存在的单位中的每一个都以概率 λdt 失去功能。不同单位的死亡是独立事件，因此，我们可以利用大数定律，并说明在这个时间段内，实际上有 $\lambda K dt$ 单位的死亡。如果企业利用了 dK_g 新单位（总投资），其资本存量的变化（净投资） dK 由式 (11-16) 给出：

$$dK = dK_g - \lambda K dt \quad (11-16)$$

这种折旧使我们把不同单位的资本看做是根据其利用次序排列的不同项目的概念变得复杂了。如果一些早期的单位腐蚀了的话，作为第 $(K + dK)$

个被利用的单位将具有不同的序号。幸运的是，这只不过是一种概念性工具，使我们能以一种清楚的方式来引入边际单位的期权价值概念。资本的所有单位在物质上都是同一的，而且它们的潜在生产力是可以互换的，因此，放弃它们的排序不会对结论有什么影响。

如果每单位的资本都有给定的有限寿命，则会产生更高的复杂性，正如我们在前面对突然死亡的单一离散项目的处理。那么，为描述企业的状态，我们不仅必须保持企业的资本总存量，而且也必须保持每一单位的寿命。然而，这只是一个计算问题，而不是一个概念问题，而且我们关于潜在经济观点的说明可以在没有这种增加的复杂性条件下作出。

我们像以往一样开始，找到企业初始利用的资本 K 的价值。首先利用动态规划方法。如果企业没有作出新投资，当 $dK = -\lambda K dt$ 或者 $K_t = Ke^{-\lambda t}$ 时，已有存量将腐蚀。在时间 t 的利润流将会是 $Y_t H(Ke^{-\lambda t})$ ，而利用贴现率 ρ 计算出的预期现值为

$$V(K, Y) = E \int_0^{\infty} Y_t H(Ke^{-\lambda t}) e^{-\rho t} dt \quad (11-17)$$

我们可以对式 (11-17) 微分，得到初始边际单位资本的价值：

$$V_K(K, Y) = E \int_0^{\infty} Y_t H'(Ke^{-\lambda t}) e^{-(\rho+\lambda)t} dt \quad (11-18)$$

这有非常有趣的解释。首先，假定当边际单位资本仍然活动时，只有较早以前的资本会腐蚀。那么，其次序从 K 到 $Ke^{-\lambda t}$ 向下降，而其边际产出上升到 $H'(Ke^{-\lambda t})$ 。其次，认识到边际单位自身死亡的概率，这把贴现率从 ρ 提高到 $\rho + \lambda$ 。那么式 (11-18) 给我们提供了考虑这两种影响所计算出的期望现值。

另外，我们可以利用或有债权方法。这里我们将把资本的腐蚀看做资本的负分红。除此以外，我们沿着通常的步骤得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma^2 Y^2 V_{YY}(K, Y) + (r - \delta) Y V_Y(K, Y) - \lambda K V_K(K, Y) \\ & - r V(K, Y) + Y H(K) = 0 \end{aligned} \quad (11-19)$$

那么当我们利用适当的经风险调整的贴现率 μ 代替 ρ 时，式 (11-17) 就是这个方程的解。

下面我们考虑当企业当前资本存量为 K 且随机漂移变量当前价值为 Y 时，企业投资于额外资本的期权价值。我们将利用 $F(K, Y)$ 表示这些期权的价值，只要这些期权一直不被执行，已利用的资本就会一直腐蚀下去。这样，在后来的一时间区间 dt 内，企业将获得投资边际为 $\lambda K dt$ 单位的资本

的期权，其价值为 $-\lambda KF_K(K, Y)$ 。考虑到 $F(K, Y)$ 为未来扩张期权的价值，因此， K 的增加意味着在边际上牺牲这样一些期权，从而 F_K 为负。现在我们可以建立通常的无风险投资组合来确定 $F(K, Y)$ ：持有 1 单位的期权并卖空 F_Y 单位的用来复制 Y 的资产。这导致

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 F_{YY} + (r - \delta) Y F_Y - \lambda K F_K - rF = 0$$

对 K 进行微分，我们得到边际期权的价值 $f(K, Y) = -F_K(K, Y)$ 的一个方程：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 f_{YY}(K, Y) + (r - \delta) Y f_Y(K, Y) - \lambda K f_K(K, Y) \\ - (r + \lambda) f(K, Y) = 0 \end{aligned} \quad (11-20)$$

376 这是一个偏微分方程，一般需要数值解。然而，对一种有趣的特殊情形，我们可以调用经济学中的同质性论点来把这个偏微分方程简化为常微分方程并解析性地为它求解。假定利润流对资本存量的依赖采取特殊的柯布-道格拉斯形式：

$$H(K) = K^\theta, \quad 0 < \theta < 1$$

现在考虑来自第 $(K + dK)$ 边际单位资本的利润流的预期现值 $v(K, Y)$ 。利用前面的式 (11-18)，这就是

$$E \int_0^\infty Y_t^\theta (K e^{-\lambda t})^{\theta-1} e^{-(\rho+\lambda)t} dt = \frac{YK^{\theta-1}}{\rho + \lambda\theta - \alpha}$$

现在考虑任意两种情形，它们的初始 K 和 Y 值不同，但是却有相同的价值 $YK^{\theta-1}$ 。那么上面的公式将产生实际上相同的值。在两种情形下，投资边际单位资本的机会的价值也应当是相同的。换句话说，期权价值 $f(K, Y)$ 应当仅仅取决于单个复合变量 $y = YK^{\theta-1}$ ，记 $f(K, Y) = g(y)$ 。

那么我们可以将 $f_K(K, Y) = K^{\theta-1} g'(y)$ 代入式 (11-20)，得到

$$\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 g''(y) + \{r - [\delta + \lambda(\theta - 1)]\} y g'(y) - (r + \lambda) g(y) = 0 \quad (11-21)$$

这个方程有我们熟悉的形式，而且产生了下面的解：

$$g(y) = B y^{\beta_1} \quad (11-22)$$

式中， β_1 为与式 (11-21) 相联系的标准二次式的正根，即

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + \{r - [\delta + \lambda(\theta - 1)]\} \beta - (r + \lambda) = 0$$

利用当 $y \rightarrow 0$ 时通常的极限考虑，我们已经消去了对应于负根的项。如果

$r + \lambda > r - [\delta + \lambda(\theta - 1)]$ 或者 $\delta + \lambda\theta > 0$, 我们将有 $\beta_1 > 1$, 因为我们假定 $\delta > 0$ 是有保证的。

我们已经得到了一旦边际单位被利用时的价值 $v(K, Y)$, 那么, 调整资本利用的临界值 (期权的执行) $Y(K)$ 由价值匹配条件和平滑粘贴条件决定:

$$f(K, Y) = v(K, Y) - k, \quad f_Y(K, Y) = v_Y(K, Y)$$

这产生了

$$Y(K) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \frac{(\delta + \lambda\theta)k}{\theta K^{\theta-1}} \quad (11-23)$$

它具有通常的解释, 修正仅仅为了考虑折旧。它需要当前的边际产出的价值 $\theta Y K^{\theta-1}$ 为成本流 $(\delta + \lambda\theta)k$ 的一个倍数 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 。注意成本不再是 δk , 而是增加的以便反映边际单位腐蚀的可能性。乘数也被修正了, 以便考虑边际单位及其前面已利用单位的折旧。特别地, 在界定 β_1 的二次式中, 利率从 r 上升到 $r + \lambda$, 这有提高 β_1 从而降低 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 的效应。这两种影响实际上都与单一离散折旧项目的情形类似, 即第 6.4 节中的式 (6-27)。

11.2 报酬递增与生产能力的集中增加

当企业扩张其生产能力时, 如果除了由于企业内部的组织和协作的限制外没有其他原因, 我们应当预期它最终会到达报酬递减。然而, 对企业来说, 遇到初始阶段或报酬递增阶段是非常普遍的。例如, 在任何产出可以被生产出来之前可能需要相当大规模的资本, 而之后, 生产能力的扩张可能不得不对应于最小的有效车间规模的离散单位发生。有时几何定律规定了报酬递增, 例如, 当制造容器的铁皮的量随着其面积而线性变化时, 其容积却是随着立方变化的。由于所有这些原因, 把递增的生产能力扩张的理论推广到包括报酬递增的情形是非常重要的。为保持复杂性的可处理性及所引入的新特征在概念上的清楚, 我们将在尽可能简单的结构上工作。因此, 现在我们将忽略折旧。

假定 $H'(K)$ 在某一范围内递增, 考虑位于这一范围内的点 K_1 和点 K_2 的两个单位投资。对它们进行分类, 因此, $K_1 < K_2$, 从而 $H'(K_1) < H'(K_2)$ 。

如果我们利用式 (11-9) 来推测调整利用这些单位资产的临界值 Y_1 和 Y_2 , 可以发现 $Y_1 > Y_2$ 。如果 Y 正处于从某一很低的初始水平上开始上升的路径上, 这说明 K_2 单位将在 K_1 单位之前就能得到利用。然而, 假定所有以前的单位都已经排好顺序。我们在单位 K_2 的序号, 以及指定给它的边际产品 $H'(K_2)$, 这样, 我们以式 (11-9) 为基础对临界值的推测在报酬递增的范围内肯定是错的。

从另一个角度来考察这种情形, 调整在 K_1 的单位的利用的 Y 的临界值也足以高到调整在点 K_2 的装备, 而且实际上在整个范围内都是如此。因此, 投资应当是集中的。当公共临界值达到时, 我们标记的单位的整个集合应当立即被装备。我们仍然需要确定集中的规模, 以及推动生产能力的这种大型扩张的适当的临界值。^[6]

最优投资决策的严格推导在数学上是非常复杂的, 但是基本的结论可以从直觉上理解。因此, 我们仅仅陈述其结论并解释它; 正式的证明参见迪克西特 (Dixit, 1993c) 的论述, 我们把它留给有兴趣的读者。

考虑教科书中最简单的报酬递增形式, 其中边际产出递增的初始范围之后就是边际产出递减的范围。图 11-2 (a) 显示了生产函数为 $H(K)$ 的这样一种情形。注意, 当 K 在拐点时, 即标记为 K^* 的点, 边际产出达到其最大值。当 $K = K^*$ 时, 由一条通过原点的直线在该点与这条曲线相切, 此时平均产出达到其最大值。

如果企业的初始资本存量碰巧超过了 K^* , 之后进一步扩张的回报是递减的。在这种情形下, 第 11.1 节中所发展出来的基本理论适用, 临界值由式 (11-9) 给出。我们把当前状态称为投资临界值函数的边分支, 并用 $Y_R(K)$ 来表示。

接下来, 假定初始资本存量为 $K_0 < K^*$, 因此, 生产能力扩张是报酬递增的。现在, 从对应于 K_0 的 $H(K)$ 上的点画一条直线, 并与生产函数在 $K_1 > K^*$ 相切, 如图 11-2 (a) 所示。当 K_1 是以这样的方式选择时, 从 K_0 到 K_1 的生产能力增加具有最大化其贡献的平均产出的特征。因此, 值得把它考虑为集中生产能力扩张的最优数量的候选方案。事实上, 这确实被证明是最优数量。理由是 Y 在点 K_1 调整边际单位的临界值, 即 $Y_R(K_1)$, 也是在离散地集中情形下同时把生产能力从 K_0 扩张到 K_1 水平的实际水平。

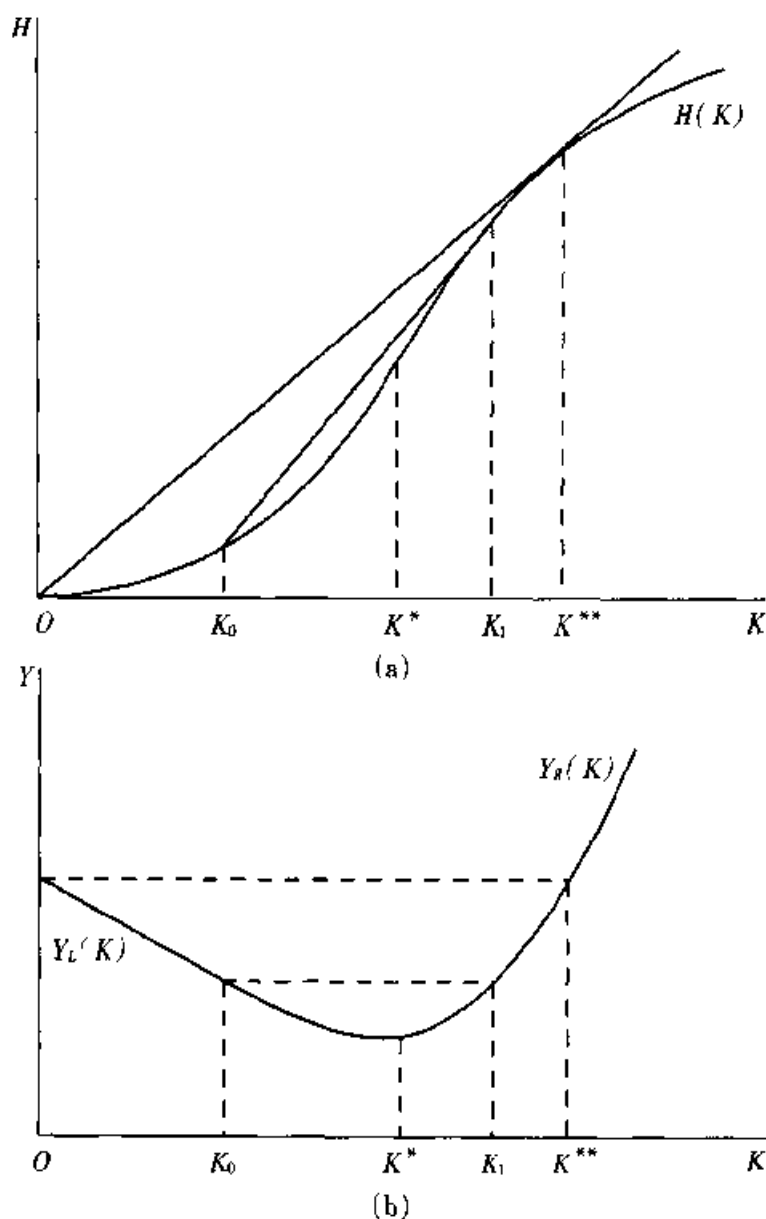


图 11-2 报酬递增下的生产能力扩张

注意,通过构造,增加的生产能力的平均产出刚好是最后单位的边际产出:

$$\frac{H(K_1) - H(K_0)}{K_1 - K_0} = H'(K_1)$$

代入式 (11-9), 我们有

$$Y_R(K_1)[H(K_1) - H(K_0)] = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta k (K_1 - K_0) \quad (11-24)$$

换言之,在进行生产能力扩张那一刻,新增产出的价值等于 $\frac{\delta \beta_1}{\beta_1 - 1}$ 乘以利用

成本。将上面的式子与式(11-9)进行比较,方程式给我们提供了报酬递减条件下单位投资的边际条件;现在我们实际上拥有了适用于报酬递增条件下集中资本投资的类似的全部条件。

现在全面的观点应当变得很清楚了。给定位于 $(0, K^*)$ 的任意点 K_0 ,我们可以根据这一相切的过程来找到对应的 K_1 ,并通过限定 $Y_L(K_0) = Y_R(K_1)$ 来构造临界值函数 $Y_L(K)$ 的边分支。结论如图11-2(b)所示。当 K_0 刚好从 K^* 的左边开始逐渐减少时,对应的 K_1 则逐渐提高,并由此到达其临界值 $Y_R(K_1)$ 。因此,曲线 $Y_L(K)$ 为向下倾斜的。最后,当 K_0 下降到0, K_1 提高到 K^{**} 时, $Y_L(0) = Y_R(K^{**})$ 。

两个分支 $Y_L(K)$ 和 $Y_R(K)$ 一起组成了投资临界值曲线。这条曲线下方,最优投资政策为零投资。若初始资本存量 K_0 小于 K^* ,且 Y 提高到在 $Y_L(K_0) = Y_R(K_1)$ 击中曲线时,生产能力立即会增加到 K_1 。在 K_1 右边,投资政策像是第11.1节中的壁控制下的一种渐进形式。如果初始位置高于曲线,则向曲线的右分支移动的瞬时的集中生产能力扩张就是最优的。

如果企业在没有任何初始资本的条件下开始,它会一直等到 Y 上升到 $Y_L(0) = Y_R(K^{**})$,然后立即利用生产能力 K^{**} ;在整个递增的平均产品范围内跳跃是最优的。因此,我们将观察到,资本存量在这个范围内的企业只是由于前面的非最优政策才把它留在了那里。

我们考虑报酬递增的一种非常特殊的情形,即边际产出递增的单一初始区域,接着是边际产出递减的一个区域。这允许我们以熟悉的教科书假定的背景来讨论我们的观点。然而,这种观点自身是非常一般的。无论生产函数 $H(K)$ 为哪种形式,给定初始 K_0 ,我们将找到一个在它右边的值 K_1 ,在这一点最大化了平均增加的产出 $\frac{H(K_1) - H(K_0)}{K_1 - K_0}$ 。在更技术化的语言中,我们试图找到凸类的生产函数,但是仅仅在初始资本存量的右边找,因为投资是不可逆的。由定义可知,在点 K_1 的回报一定是递减的。可以利用第11.1节的过程来找到调整点 K_1 的资本边际增加的临界值 Y ,而且同样的临界值也适用于从 K_0 到 K_1 的全部离散跳跃,即使当生产函数不可微时这种观点也是成立的。例如,如果生产任何产出需要一些最小数量的资本,它可能拥有的初始位置为 $H(K) = 0$,其后,它可能随着最小有效规模的连续的离散规模的车间逐步上升。我们所需要的只是报酬递减最终会盛行,而这一般是由企业内部不断上升的组织成本所保证的。

我们考虑了来自产出方面的报酬递增。然而，集中生产能力扩张也可能是由于成本方面的原因而是最优的。假定成本与新增加的生产能力的数量不成比例，但是其增长少于成比例的增长。在作出任何改变之前可能存在一次性支付的固定成本，或者在更一般的形式上存在规模经济。在下一节中，我们将考虑与生产能力扩张相联系的一次性成本及其他类型的成本。

11.3 调整成本

关于企业如何作出跨时选择的理论给我们提供了决定在每一时刻企业期望或最优的资本存量的规则。任何一个时间周期内的投资总需求都可以计算出来：总投资等于每一周期末期望的资本存量，减去开始时的实际资本存量，加上在这一周期内发生的资本折旧。任何冲击的发生，例如需求转移或利率改变，都将改变期望的资本存量。在理论上，投资需求应当立即反映出这种冲击。在实践中，发现这种冲击对投资的影响是非常缓慢的，而且在许多未来的周期内展开。经济学家通过假定调整成本（过快改变资本存量的成本）的存在并修正他们的投资理论以考虑这种成本，从而使之合理化。

事实上，我们不仅仅需要调整成本的存在来解释为什么企业的投资选择会对冲击反应这么慢，具体地，我们需要牺牲投资增长率为严格凸函数的假定。换言之，可能会有投资的边际成本为投资增长率的递增函数的情形。那么最优投资增长率是在这样的点确定的，即把资本调整到其合意的水平上时所增加的边际成本刚好等于它这样做时的边际收益。

调整成本严格为凸的假定在投资的理论和实证文献中变得非常普遍，但在早期却没有受到批评。关于这个问题，罗思柴尔德（Rothschild, 1971）的论述值得详细引证：

“至于为什么调整成本应当为凸的论点是非常脆弱的。埃斯纳和苏茨³⁸²（Eisner and Strotz, 1963）给出了两种解释。（1）当企业在单个阶段提高其对投资品的需求时，将会对投资品的供给产生压力。我们的模型是，在要素市场中企业是一个价格接受者；对它来讲，这样的考虑是不合适的。（2）‘把新设备整合成正在运营的公司中相关联的递增成本：生产线重组、工人培训等’这仅仅是一种断言，而且仅仅是一种强制性的断言。递减的成本与递增的成本一样是合理的……没有理由认为为什么培训工人必然承担递增

的成本。培训包括信息的利用，这是成本递减的经典案例……类似地，生产线重组包括信息及生产要素……还有个人能力的利用等。”

我们也提供了考察投资对经济条件变化的渐进反应的其他解释。在本书背景下特别感兴趣的是企业水平的投资决策观测值与在总体水平上几乎不变的数据之间的区别。当冲击根据其概率达到已经算出的一个临界值时，假定每家企业都调整其资本存量。不同企业有不同的技术和管理能力、当地要素市场条件以及许多其他因素，因此不同的企业有不同的行动临界值。即使是拥有相同临界值的企业也可能拥有相对于这个临界值水平上由不同的历史条件下所确定的初始条件。总冲击会立刻把一些企业推到其临界值水平，这些企业将投资，而其他企业在不跨过其临界值的条件下仅仅更接近于其临界值。随着时间的推移，这些企业中的一些会经历特殊的企业冲击，这将把它们带过它们自己的临界值，并引起它们的投资反应。这样，冲击对总投资的影响将会随时间而展开，即使每家企业的行动在某一时间点上是集成的。

对一个简单模型进行计算，这种观点会更加复杂，因为投资的总反应取决于总冲击与特殊企业冲击两者之间的联系，以及企业相对于它们的行动临界值的初始位置。在这个领域已经开始了有趣的理论和实证工作，特别是伯特拉和卡巴利罗（Bertola and Caballero, 1990, 1992）的工作。

383 下面我们将在一个非常一般的模型中发展出严格为凸的调整成本的观点，它显示出这种观点与我们在本书中所采用的方法之间的联系。

11.3.1 调整成本分类

令 K 表示企业资本存量， Y 表示影响企业利润的随机漂移变量。令 $\pi(K, Y)$ 表示作为这些状态变量的函数的利润流。假定存在以 λ 为折旧率的资本折旧，可以增加新资本，而且旧资本可以被移走（通过折旧或者超过自然损失），但是这些行动都会承受一定成本。

我们将把时间分成小的时间长度 Δt 。假定在这一时间段内，企业采取谨慎的行动以数量 ΔK 来改变其资本存量。换言之，在这一时间段内全部的总投资（作为合适的包括正的和负的）为 ΔK ，因此，在期末的资本存量为 $(K - \lambda K \Delta t + \Delta K)$ 。与这种行动相联系的成本有三种。

首先，在采取任何行动之前可能会产生一次性成本，这些成本可能是管理的决策成本、订货的固定成本或者其他成本，把这些称为“存量”固定成

本。在采取行动的时间区间 Δt 内可能还存在以给定的流动速度增加的成本，把这些称为“流量”固定成本。每一种都可能是不同的，取决于资本存量是增加的还是减少的。很一般地，我们令这些成本为

$$\begin{cases} \phi_+ + \phi_+ \Delta t, & \Delta K > 0 \\ \phi_- + \phi_- \Delta t, & \Delta K < 0 \end{cases}$$

接下来，成本可能会随着资本存量的变化数量而线性地变化，但是并不取决于这种变化实现中的（小的）时间区间的长度。它们主要包括支付给购买资本品的实际成本，但也还有其他成分。我们把这些称为“线性”成本，并记做：

$$\begin{cases} k_+ + \Delta K, & \Delta K > 0 \\ k_- + \Delta K, & \Delta K < 0 \end{cases}$$

注意到其中的不对称性，它抓住了本书中我们所关注的不可逆性。如果 $k_- < 0$ ，则已经利用的资本可以通过在每单位的价格 $-k_-$ 出售而减少。如果 $k_- = -k_+$ ，则购买的全部成本可以通过再转让而恢复，而投资也是完全可逆的。如果 $k_+ + k_- > 0$ ，或者 $-k_- < k_+$ ，则恢复是部分恢复，存在一定的不可逆性。我们排除了 $k_+ + k_- < 0$ 的可能性；否则，企业将通过迅速和重复的购买及销售大量的资本而获得数量无限的货币。当然，我们可以考虑 $k_- > 0$ ；这里企业必须为得到减少资本存量的许可而支付，例如，矿山关闭时的场地恢复成本，或者与退休的机器相联系的工人的解雇费。

最后，可能还有调整成本依赖于资本存量的变化增长率，即取决于 $I = \frac{\Delta K}{\Delta t}$ ，这是“凸调整成本”的传统类型。令 $\Psi(I)$ 表示产生这些成本的每单位时间的变化增长率或者流量。那么，在我们的长度为 Δt 的时间区间内的调整成本为

$$\Delta t \Psi\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)$$

函数 Ψ 为凸的，且满足 $\Psi(0) = 0$ 及 $\Psi(I) > 0$ ($I \neq 0$)。如果函数 Ψ 在点 0 可微，那么我们必须有 $\Psi'(0) = 0$ 。这在经常用到的二次型调整成本中是真实的；图 11—3 (a) 说明了这种情形。然而，函数在点 0 可能有一个节点，正如图 11—3 (b) 所说明的。 Ψ 在这里的右导数，表示为 $\Psi'(0+)$ ，不同于其左导数，表示为 $\Psi'(0-)$ 。在 $\Psi(I)$ 的形式中，对于正的或负的 I 可能还有其他的更一般的不对称性。

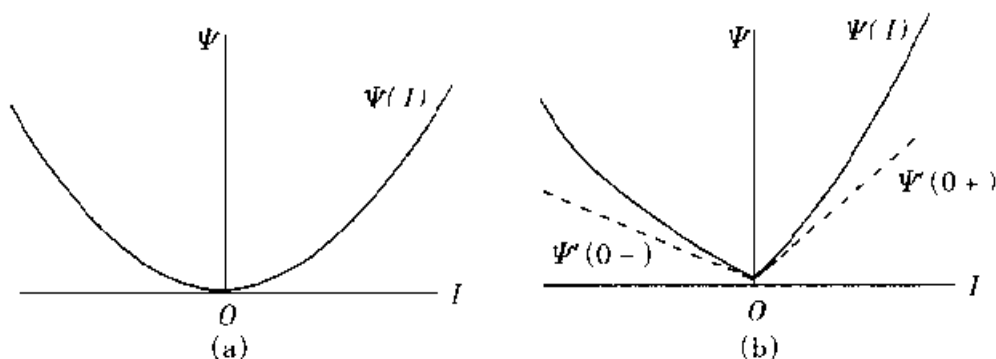


图 11—3 凸调整成本

现在，考虑这些成本的特征。这些成本的流动速度，即 $\Psi(I)$ 为总投资 I 的流动速度的非线性函数。然而，在长度为 Δt 的时间区间所产生的总成本与这一长度成比例。为说明资本存量改变得越快其成本也越高，保持 ΔK 固定并改变 Δt 。成本关于 Δt 的导数为

$$\Psi\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right) - \frac{\Delta K}{\Delta t} \Psi'\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)$$

由于 Ψ 为凸而且满足 $\Psi(0) = 0$ ，所以上面的导数为负。这样降低 Δt 就提高了成本。

投资的大部分文献经常仅仅处理这些成本中的一种。在这一点上，使得比较以不同的假定为基础的不同结论变得非常困难。最近，艾贝尔和埃伯利 (Abel and Eberly, 1993) 已经构造了一个非常一般的模型，其中包括了几乎所有的成本 (除固定成本 Φ_+ 和 Φ_- 外)，因而推动了这种比较，并提供了对该问题的一种改善了的理解。我们的处理遵循他们的方法。

11.3.2 贝尔曼方程

现在我们准备考察企业的最优投资政策。为了代数上的简化，我们将假定风险中性或一个外生指定的贴现率 ρ ，并利用动态规划方法。令 $W(K, Y)$ 表示作为状态变量函数的企业价值。在下一个短的时间区间 Δt 内，企业选择 ΔK 并以新资本存量 $(K - \lambda K \Delta t + \Delta K)$ 及随机变量的新的随机值即 $(Y + \Delta Y)$ 而重新开始。将行动的成本记做 $C(\Delta K, \Delta t)$ ，其中包括了前面所讨论过的任一或全部的成分。为清楚地说明这一点：

$$C(\Delta K, \Delta t) = \begin{cases} \Phi_+ + \phi_+ \Delta t + k_+ \Delta K + \Delta t \Psi\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right), & \Delta K > 0 \\ 0, & \Delta K = 0 \\ \Phi_- + \phi_- \Delta t - k_- \Delta K + \Delta t \Psi\left(\frac{\Psi K}{\Delta t}\right), & \Delta K < 0 \end{cases} \quad (11-25)$$

那么, 贝尔曼方程可以写为

$$W(K, Y) = \max_{\Delta K} \{ \pi(K, Y) \Delta t + e^{-\rho \Delta t} \cdot E[W(K - \lambda K \Delta t + \Delta K, Y + \Delta Y)] - C(\Delta K, \Delta t) \} \quad (11-26)$$

正如在艾贝尔和埃伯利 (Abel and Eberly, 1993) 的著作中, 根据对 ΔK 为正、为零及为负时是否能最大化右边来区分这三种情形是很重要的。

首先, 假定最优的 ΔK 为正, 即企业作出正的总投资。一阶条件为

$$E[W_K(K - \lambda K \Delta t + \Delta K, Y + \Delta Y)] - k_+ - \Psi'(\Delta K / \Delta t) = 0$$

离散时间段 Δt 只是为了分析的方便才引入的, 而我们真正的兴趣在于连续时间模型。因此, 我们对 $\Delta t \rightarrow 0$ 时求极限。我们暂时假定总的投资增长率

$I = \frac{\Delta K}{\Delta t}$ 是有限的, 很快我们会检验这种假定是否有效及何时有效。在这种假定下, K 的时间路径是连续的; 由于 Y 服从几何布朗运动, 其时间路径也是连续的。因此, 在极限条件下上述一阶条件变为

$$W_K(K, Y) = k_+ + \Psi'(I) \quad (11-27)$$

这确定了作为状态变量函数的投资增长率。

由于已经有各类固定成本, 我们还必须考虑确保局部一阶条件的解的整体最优的全部条件。为实现这一点, 我们需要比较在 $\Delta K = I \Delta t$ 的假设下的结论与在 $\Delta K = 0$ 的假设下的结论。其中 I 是由前面的式 (11-27) 所限定的。我们要求:

$$E[W(K + (I - \lambda K) \Delta t, Y + \Delta Y)] - \Phi_+ - \phi_+ \Delta t - k_+ I \Delta t - \Delta t \Psi(I) > E[W(K - \lambda K \Delta t, Y + \Delta Y)]$$

我们的兴趣仍是 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限。

要注意的第一点是, 如果存在投资固定成本的存量 ($\Phi_+ > 0$), 它们就构成了全部条件中的主要项, 而且在极限条件下, 我们需要 $-\Phi_+ > 0$ 。这是直接矛盾的。因此, 如果存在固定成本存量, 即对存量资本作出任何正的总增量的一次性成本, 那么, 总投资的有限增长率就不可能是最优的。这产生了很好的直觉感受, 这样一种政策将需要在投资增长率为正的每一时间区间都承担存量固定成本, 这将是无限昂贵的。最优政策将是允许资本存量在分开的时刻以离散步骤跳跃。利用与第 11.2 节中类似的方法可以描述其特征。

这里, 让我们假定 $\Phi_+ = 0$, 然后继续前进。在这种情形下, 全部条件的两边都有关于 Δt 的主要项。因此, 我们必须利用伊藤引理来展开 W 的值并简化之, 有

$$W_K(K, Y) I > \phi_+ + k_+ I + \Psi(I) \quad (11-28)$$

为解释这一点，我们利用托宾 q 值的概念。在任意时刻，当前状态 (K, Y) 是已知的，因此，可以评价 $W_K(K, Y)$ 。这正好是提供额外的边际资本单位时可能导致的企业价值的边际增加。在企业价值的意义上，我们可以称之为托宾的边际 q 。惟一的差别是现在在一定程度上更方便了，不再是用比例的形式来解释它，而是保持它为一个绝对数量，而且把它跟生产能力的边际单位购买成本进行比较（包括调整成本）。

现在来解释式 (11-27) 和式 (11-28)。在很小的时间区间内保持总投资 I 的一定增长，它对资本存量贡献了边际数量 $I\Delta t$ 。一阶条件式 (11-27) 设定这种行动的边际收益（提高了企业的价值）等于其边际成本，而总条件式 (11-28) 确保了其总收益超过其总成本。

利用熟悉的中级微观经济学理论中的图表，这是艾贝尔和埃伯利著作中的图形的一种修正，我们可以说明并澄清这些关系。在图 11-4 中，我们显示出作为投资增长的函数的边际成本，对于正的总投资（纵轴的右边）正好是式 (11-27) 的右边。临界值 \bar{q} 表示这样一点，即位于纵轴与高度为 q 的水平线之间的区域，边际成本曲线实际上等于流量的固定成本 ϕ_+ 。当 $q = \bar{q}$ 时， I 被限定为沿着边际条件和全部条件的等式都满足的边际成本曲线。对 $q > \bar{q}$ ，全部条件作为一个不等式得到满足。因此，边际成本曲线的这部分可以看做企业的投资需求曲线，如图中的粗线所示。

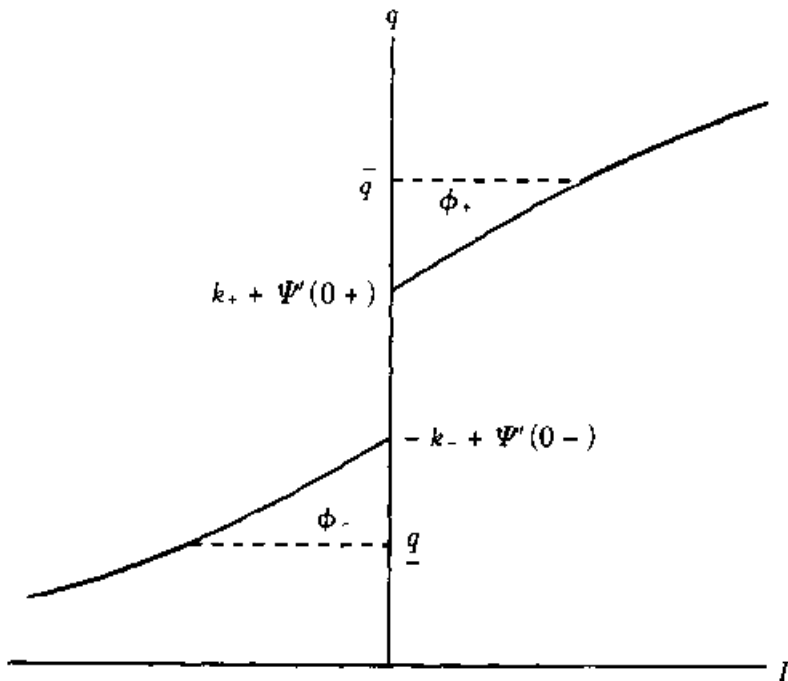


图 11-4 投资的 q 模型

对负的总投资，一阶条件为

$$W_K(K, Y) = -k_- + \Psi'(I) \quad (11-29)$$

考虑到当 I 为负时， $\Psi'(I)$ 也为负。令 \underline{q} 表示临界值，区域包围在水平线及位于竖轴左边的边际成本曲线之间，等于负的总投资的流量固定成本 ϕ_- 。那么，对 $q < \underline{q}$ ，边际成本曲线成为企业对负的总投资的决策规则。如果 q 位于两个临界水平 \underline{q} 和 \bar{q} 之间，零投资是最优的。

我们现在继续考察这种分析的各种含义，并将它与我们以前的工作联系起来。

11.3.3 不行动的范围

在上面的分析中，在 $q = W_K(K, Y)$ 的一个范围内，从而在潜在状态变量 (K, Y) 空间的相应区域内，总投资为零是最优的。这有三个原因，而且在艾贝尔和埃伯利的一般模型中，每一种都被解释为不同的调整成本。

注意一阶条件式(11-27)和式(11-29)的右边，它们分别对应于正的总投资和负的总投资，当 $I \rightarrow 0$ 时两者并不趋向于相同的极限，而且图 11-4 中的边际成本曲线在纵轴上也有不连续的。这有两个原因：(1) $k_+ > -k_-$ ，这是我们在全书中所强调的不可逆条件。(2) 流量调整成本函数中的节点 $\Psi'(0+) > \Psi'(0-)$ ，也对这种不连续有贡献。这里的要点是，即使是最初的少量投资的边际成本也为正；因此，正的总投资不会作出，直到 Y 上升到相对于来自额外的资本所产生的正补偿性边际收益的 K 的充分高的水平。对于总的投资，类似的情形也成立。

对于正的流量固定成本 ϕ_+ ，临界值 \bar{q} 超过了边际成本曲线与纵轴的交点。类似地，正的 ϕ_- 使得 \underline{q} 小于左边的交点。这两种效应都加大了不行动的范围。

只要这三种力量中有一种在起作用，不行动的范围就会存在；这三者在相同方向起作用而且是相互加强的，直到总投资为零的最优情形被考虑。

最后，注意到我们是由设定存量固定成本 ϕ_+ 和 ϕ_- 都为零的条件下开始的。如果这些成本为正，它们是大多数企业不采取任何行动的更有力的理由，并且仅仅选择当资本存量在离散时间内是递增或递减的分离的时间段。

当零投资为最优时，贝尔曼方程以特别简单的形式出现。利用伊藤引理

展开式 (11-26) 的右边并简化, 我们得到

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 W_{YY}(K, Y) + \alpha Y W_Y(K, Y) - \lambda K W_K(K, Y) - \rho W(K, Y) + \pi(K, Y) = 0$$

把上式转换为 $q(K, Y) = W_K(K, Y)$ 的方程更加方便; 考虑到这是企业的边际价值以及托宾 q 的绝对值概念 (而不是比例)。对上式就 K 进行微分, 我们得到

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 q_{YY}(K, Y) + \alpha Y q_Y(K, Y) - \lambda K q_K(K, Y) - (\rho + \lambda) q(K, Y) + \pi_K(K, Y) = 0 \quad (11-30)$$

这在 (K, Y) 空间中的不行动区域是成立的, 但是区域本身也必须作为解的一部分来决定。因此, 这是一个自由边界问题。边界条件在一个模型与另一个模型之间有一定程度的变化。例如, 当仅有的调整成本为线性时, 这种形势就像是第 11.1 节那样。那么, 这种条件下上边界 (其中 I 即将变为正值, 实际上是无限的) 为 $q = k_+$ (价值匹配) 和 $q_Y = 0$ (平滑粘贴)。类似地, 在下边界上我们有 $q = k_-$ 及 $q_Y = 0$ 。

11.3.4 壁控制

如果凸调整成本相对不重要, 那么 $\Psi'(I)$ 对所有的 I 来讲都是非常小的, 则图 11-4 中的边际成本曲线近乎水平。临界值 q 近似地由下面的式子给出:

$$\bar{q} = k_+, \quad \underline{q} = -k$$

这正是来自我们在本章前面对完全不可逆分析中 $W_K(K, Y)$ 的极限。此外, 当 q 到达 \bar{q} 时, 总投资的最优增长率非常大, 在 \underline{q} 总投资的增长率也一样大。如果没有凸调整成本同时只剩下线性成本, 则在极限条件下会发生什么?

答案是无限的投资增长率生效, 以小却快的突然爆发来增加或减少资本存量, 以防止 q 上升到超过 \bar{q} 或下降到低于 \underline{q} 。这正是我们从考虑不可逆自身的纯粹模型中所得到的“壁控制”政策。^[7] 试图在这里对极限过程进行严格的证明在数学上非常困难而且非常冗长, 但是我们希望这种结论在直观上是明显的, 而且它澄清了我们详细处理过的不可逆方法与在早期的大多数投资文献中非常普遍的调整成本观点之间的联系。

11.3.5 动态 q

当总投资以非零的增长率发生时，作为近似，最优增长由一阶条件式 (11-27) 和式 (11-29) 来限定。每一个条件都限定 I 为 q 的函数，影响这种关系的参数为 k_+ 和 k_- ，以及 Ψ 的函数形式。换句话说，对于给定的 q ，投资的最优增长率全部由调整成本的特征来决定。

表面上看来，令人惊奇的事情是不确定性，由随机过程 Y 的参数 σ 来描述根本就没有进入视野， Y 的趋势以及贴现率 ρ 也一样没有进入。实际上，如果这些方面与投资无关那才真是令人惊奇的。然而，这种惊奇只是表像的，因为在保持 q 固定时这是合理的， q 的变化深受这些参数的影响。例如，假定 (K, Y) 位于投资增长率为正的区域，令投资函数为 $I = I(q)$ 。像以往那样展开贝尔曼方程式 (11-26) 的右边并简化，我们有

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 W_{YY} + \alpha Y W_Y + (I - \lambda K) W_K - \rho W - \phi_+ \cdot k_+ I - \Psi(I) + \pi = 0$$

式中，为节约记号，我们略去了函数的自变量。我们可以对上式求 K 的微分，得到关于 q 的一个方程，即

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 q_{YY} + \alpha Y q_Y + (I - \lambda K) q_K - (\rho + \lambda) q + [I - k_+ - \Psi'(I)] I'(q) q_K + \pi_K = 0$$

一阶条件将上式简化为

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 q_{YY} + \alpha Y q_Y + (I - \lambda K) q_K - (\rho + \lambda) q + \pi_K = 0 \quad (11-31)$$

$q(K, Y)$ 的解受到所有相关参数的影响。

11.3.6 二次成本的情形

391

我们将对一个完全的简单的特殊情形完成调整成本模型的解。^[8] 这里我们忽略了其他方面的成本，并假定调整成本函数是对称的二次型， $\Psi(I) = \frac{1}{2}I^2$ ，则对所有的 q ，不存在不行动的范围且投资需求函数简化为 $I = q$ 。我们还假定，流量利润函数是资本存量的线性关系，为冲击的乘数关系，因此， $\pi(K, Y) = hKY$ 。那么动态 q 的方程变成：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 q_{YY} + \alpha Y q_Y + (q - \lambda K) q_K - (\rho + \lambda) q + hY = 0$$

这看起来非常复杂，但是经济直觉表明了解的形式。由于利润流与资本存量

成比例，而调整成本不依赖于这个存量， $W(K, Y)$ 的最大化应当是 K 的线性表达式，因此， $W_K = q$ 应当单独地取决于 Y 。那么我们有常微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 q_{YY} + \alpha Y q_Y - (\rho + \lambda)q + hY = 0$$

其解为

$$q(Y) = \frac{hY}{\rho + \lambda - \alpha} \quad (11-32)$$

直觉是，当资本存量以常数规模报酬产生利润流，而调整成本不取决于已利用的资本存量时，我们可以把每一个已利用的资本单位看做是与其他的单位相互独立的。它产生了利润流 hY ，但是以参数为 λ 的泊松过程进行折旧。那么，式 (11-32) 正好给出了这一不确定的利润流的期望现值。它必须是这一单位资本对企业的边际价值。

一旦 q 是已知的，最优投资政策就会立即得到，而这正是我们在本部分主要关注的问题。然而，如果渴望得到，价值函数自身的解可以相当容易地获得；它不过是 qK 加上扩张期权的价值。关于这一点以及这个模型的更一般的形式，我们推荐读者参阅艾贝尔 (Abel, 1983) 的著作。

11.4 文献导引

本章的模型在某些观点上与标准的新古典投资理论有非常紧密的联系。
392 在新古典理论中，由假定竞争条件开始，忽略了不确定性和不可逆性。其结论好像是企业在—个周期内可以选择租用任何期望的资本存量。最优化条件与它对任何可变投入的条件—样：资本存量的边际产品收益等于利率加上折旧（或减去资本收益，如果有的话）。乔根森 (Jorgenson, 1963) 的模型可能是此类模型中最突出的及应用最广泛的一个。

这些模型隐含着投资对变化着的经济条件非常迅速的反应，尽管在现实中这种反应是更加渐进性的。人们提出了新古典模型的一些修正的建议，以应对这种观察；这些建议中最著名的也许是调整成本的引入了。采用这种方法的早期模型包括卢卡斯 (Lucas, 1967) 和古尔德 (Gould, 1968) 的工作。

使模型更现实而被引入的另一个特征是不可逆性。这出现在阿罗 (Arrow, 1968) 早期比较著名的著作中。在确定性及完全预见的背景下, 不可逆意味着在到达潜在盈利能力最高点之前一定时间的投资终止, 记住即将到来的恶劣时间。

最后, 不确定性被以一种相对简单的方式引入。在仅仅知道随机变量的概率分布时不得不选择资本存量, 而诸如劳动力的其他投入可以在其实际价值实现之后再来选择。哈特曼 (Hartman, 1972) 的一个简单模型带来了实质性的观点: 资本的边际产品往往是随机变量的凸函数。因此, 不确定程度越高隐含的预期边际产品也越多, 从而投资也越大。动态和随机背景下的类似结论也出现在艾贝尔 (Abel, 1984) 和克雷恩 (Craine, 1989) 的著作中。

这些早期发展都由尼克尔 (Nickell, 1978) 在一本优秀的教科书中进行了总结和说明。

结合了不确定性和调整成本的更完全的动态模型是由艾贝尔 (Abel, 1983) 和林文雄 (Hayashi, 1982) 引入的。艾贝尔 (Abel, 1990) 提供了关于这些内容的更近工作的一个优秀综述。艾贝尔和埃伯利 (Abel and Eberly, 1993) 最近的一个模型整合了以前的处理方法的许多特色, 我们关于调整成本的说明就是以它为基础的。

分析存在不可逆性和不确定性时可变生产能力选择的模型可以说是从平迪克 (Pindyck, 1988b) 和伯特拉 (Bertola, 1988, Chap. 1; 1989) 的著作开始的, 尽管在布伦南和施瓦茨 (Brennan and Schwartz, 1985) 的著作中能找到这种观点的一种萌芽。伯特拉和卡巴利罗 (Bertola and Caballero, 1990) 在这种背景下考虑了企业的集合体。伯特拉 (Bertola, 1988, Chap. 2) 讨论了它与托宾 q 值的联系。

报酬递增条件下的生产能力扩张在 20 世纪 60 年代的国民经济计划背景 393 中得到了广泛研究。魏茨曼 (Weitzman, 1970) 是这类模型中最突出的一个。其中大部分关注的焦点是在满足考虑需求时间路径条件下找到成本最小化的路径, 而不是企业价值最大化的路径。这些工作中的大多数还假定了确定性和完全预见性; 曼伊 (Manne, 1961) 是少有的一个例外。

在本章中我们所遇到的一些动态规划问题具有特殊的特征, 使得对它们的严格数学证明变得非常困难。或者投资增长率是无限的, 从而资本存量的路径是不可微的; 或者资本存量自身进行离散跳跃, 从而在时间上是不连续的。用数学术语来讲, 它们是“奇异的”控制问题。我们把它们处理为与普

通的动态规划没有什么区别。我们借助于直觉启发式地进行分析，并使结论以合理的方式出现。我们希望能满足大多数读者的要求，但是有些读者还需要更严格的证明。我们所能做到的最好办法是推荐给他们两篇经典的文献，哈里森和塔格萨（Harrison and Taksar, 1983）的文献，处理了不可微的情形（壁控制或即时控制）；哈里森、塞尔奇和泰勒（Harrison, Sellke and Taylor, 1983）的文献，是关于不连续情形的（脉冲控制）。杜马斯（Dumas, 1991）也提供了有关壁控制的很有洞察力的另一种视角。在中级严格水平上，迪克西特（Dixit, 1991c）的文献可能值得参考。迪克西特（Dixit, 1993a）的文献是与本书具有相同标准的启发式的说明，但是以十分详细的方式提供了这些技巧和结论的一种紧凑说明。

【本章注释】

[1] 我们考虑一个在数学上非常类似于第 9.1.1 小节中从社会计划者角度产生的问题。在那里，我们关注的是构建社会最优与竞争性产业均衡间的对应关系。我们以最快的启发方式来发展出实现这种目的模型。现在我们想更详细地描述企业投资政策的特征，而且将以适当的更详细的方式来考察这个模型。通过回顾我们在第 9 章所发展出的一些直觉，然后再回来重新考察现在所出现的详细模型，读者会更快地掌握这种模型及其结论。

[2] 在初始时刻，点 (K, Y) 可能高于曲线，或者是因为过去没有遵循最优政策，或者因为一些没有预期到的冲击使曲线移动。

[3] 在第 9 章的社会计划者问题中，在产业的生产能力扩张方面存在不变的回报，这是一种向下倾斜的需求曲线，因此计划者的目标函数（社会剩余）具有递减的回报。

[4] 也可以比较第 9.1.1 中的社会最优模型对这个问题的简单讨论。

[5] 比较第 9 章社会最优框架下（式 (11-11)）类似的一般结论。

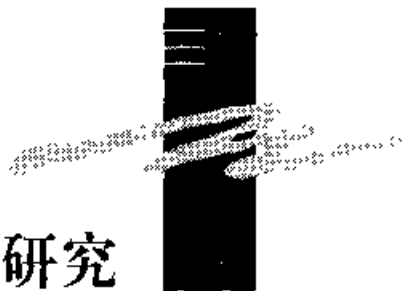
[6] 在第 2.5 节，我们考虑了一个展示了规模与灵活性之间的权衡的一个例子。这里并没有产生这样的问题，因为规模经济在生产函数中附属子资本存量。如果 K_1 早已退出，那么就有 $(K_2 - K_1)$ 被利用，只要全部的 K_2 立即被全部利用，则会产生相同的产出流量。这并不是第 2 章中的例子中的情形：两个小车间并不等价于一个大车间。

[7] 壁控制利用了总测度为零的时间上某一时刻投资的无限增长，即它

如何在有限的时间区间内复制资本存量的有限增加。有关细节参见哈里森和塔格萨 (Harrison and Taksar, 1983) 的文献。这也是固定成本流 ϕ_+ 和 ϕ 在这种情形下无关的原因；应用于总测度为零的时间段，它们有零效应。

[8] 这是艾贝尔和埃伯利 (Abel and Eberly, 1993) 文献中的情形 II，也可参见艾贝尔 (Abel, 1983) 的论述。

第12章 应用及实证研究



到这里，我们希望下面这一点已经非常明确了，即本书所提供的“期权”方法适用于非常广泛范围内的投资问题。我们的数值计算是由一些具体产业的典型数据来推导的，如第7章和第8章中的铜矿业，以及第7章中的油轮业。然而，模型中的大部分都是简单的且符合一定的模式。在本章，我们提供一些例子用来说明这些技巧的实际应用以及它们在其他问题方面的推广。

我们从探讨从事资源产业中的企业经常要面临的问题出发——如何评价未开发的资源储备，如何决定何时投资于资源开发和储备的生产。正如我们在本书前面所解释过的，未开发的资源储备最好理解为一种期权，即投资于储备开发的期权，然后再生产出资源。通过评价期权，我们可

以评价资源储备并决定何时开发资源储备为宜。我们将集中于近海石油储备的特例。石油公司经常对由美国政府所拍卖的近海原油区域出资数亿美元来投标，因此很明显，有能力正确地评价这些储备并决定最好如何开发利用它们是非常重要的。

评价与投资时机问题对电力产业也非常重要。电力企业在新建电厂方面作出大型的且不可逆的投资，并且面临着来自这种投资的未来回报的相当大的不确定性。例如，未来燃料价格、未来的电力需求、限制电厂的未来环境管制以及适应这种管制的替代技术的未来成本等都存在不确定性。在第12.2节，我们集中于燃煤火力发电厂所面临的特殊问题。《空气清洁法》要求减少二氧化硫（ SO_2 ）的整体排放量，但是为了最小化这种减少的成本，它给了电厂一种选择。电厂可以投资于昂贵的除硫器以便企业的排放减少到要求的水平，或者可以购买允许它们污染的可交易的许可证。（为减少排放的成本，电厂获得了购买许可证的激励，这种制度降低了减少空气污染的社会总成本。）如果许可证的未来价格是已知的，这就成为一个非常简单明了的问题。然而，许可证的未来价格存在相当大的不确定性，而且对除硫器的投资也是不可逆的。电厂必须决定是购买许可证以保持灵活性，还是投资于除硫器。我们将会看到这个问题如何能利用本书中的期权方法得到解决。

本书中详细说明的原理和分析工具所具有的适用性已经超出了企业投资决策。作为一个例子，在第12.3节，我们揭示了这些工具如何应用于环境政策设计中的一般问题——政府应当在何时对已经察觉到的威胁环境的现象采取政策、作出反应？经济学家用来评价环境政策的标准框架是成本—收益分析。例如，考虑旨在减少全球预警的碳税（a carbon tax）。通过扭曲相对价格，这种政策将对社会施加一种超过了它所产生的政府税收收益的预期成本流。对此进行推测，它也可以对社会产生一个预期的收益流。家庭和企业将使用更少的燃料，排放到大气中的二氧化碳（ CO_2 ）会更少，全球平均气温将不会升得这么高，由气温升高所带来的危害也会相应地变得更小。如果预期收益流的现值超过预期成本流的现值，标准框架会推荐采取这种政策。

这种标准框架忽略了大部分环境问题以及对它们作出反应的政策设计中的三个重要特征。（1）采纳某一项特定政策的未来成本和收益存在相当大的不确定性。例如，在全球预警条件下，减少 CO_2 排放和不减少 CO_2 排放全球平均气温到底会上升多少是不确定的，对于气温升高所造成的经济影响也

存在不确定性。(2) 经常会有与环境政策相关的重要的不可逆性。这些不可逆性可能是由环境危机自身所引发的,也可能是降低这些危害的政策适应成本所引致的。(3) 环境政策很少采取要么现在、要么永不的选择方式。这样,我们用于决定最优投资时机的相同技巧可以用于决定环境政策的最优时机的确定。

在本章结尾,我们讨论了产业或政府投资决策的不可逆性和不确定性的实证意义。尽管存在相当多的轶闻式的证据证明企业作出投资决策的方式至少与本书中所说明的理论大体一致(例如,最低预期资本回报率的用处要比由CAPM所预测的资本的机会成本要大得多),更系统的计量经济学检验及其应用仍然还没有成熟。我们评述了已有的一些工作,指出了它所遇到的困难,并提出了未来研究的主题。

12.1 近海石油储备的投资

我们从由帕多克、西格尔和史密斯(Paddock, Siegel and Smith, 1988)所发展出的近海石油租约的一个模型出发,来考察近海石油储备的投资。美国政府经常拍卖近海土地的租约,作为其投标过程的一部分,石油公司特别要对此类土地进行评估。由于近海土地租约的标的可能达到上亿美元,对其价值而言,精确地作出这些评估就很重要。此外,石油公司必须决定在成功获得租约后如何处理这些土地。在它们投入上亿美元或更多资金开发近海石油储备并开始生产之前,石油价格能有多高?这些因素都要考虑进去。

很明显,若对一个具有期权特征的石油储备有错误的认识,那么,对其价值进行评估时将发生严重错误。例如,假定有人试图利用标准的净现值方法来评价石油储备。依据当前石油价格、石油价格的预期变化率及开发储备的成本等,人们有可能设想出开发时机的前景、来自生产的未来年现金流的时间(和规模)。那么,有人会通过向前贴现这些数据并加总来评价这种储备。此外,由于石油价格不确定性不完全是可分的,石油价格中观察到的波动越大、贴现率越大,未开发的储备的估算价值越小。然而,这会低估储备的价值,而且可能是很大的数量。^[1]原因是它忽略了当真正开发储备时,其所有者失去了灵活性,即储备的期权价值。还要注意,由于这种期权价值的存在,石油价格的波动越大,储备的价值也越大——正好与标准的净现值

计算告诉我们的结论相反。

正如我们在第10章讨论过的，近海油田的评估与开发利用可以看做一个多阶段投资问题。第一个阶段包括勘测—勘探与钻井活动，勘测石油的储量为多少，抽取它要耗费多少资本。第二个阶段（只有当勘测结论是有利时才会发生）包括开发—抽出石油所需要的钻井平台的搭建以及产油井的建成需要的成本投入。最后一个阶段是在一定年限内石油的抽取。正是由于在开发阶段包括了最大的资本开支，它也正是期权价值最重要的阶段。^[2]因此，我们集中于未开发的（但是详细描述过的）储备的价值估算，以及何时开发它的决策问题。要完成这个决策，我们必须考虑下面的事实，即开发储备的期权不是一个永久性的期权；近海租约经常受到放弃规定的限制，这限制了公司在开发储备之前掌握油田的时间。

未开发储备的价值与存量的看涨期权之间的密切联系如表12—1所示。^[3]在这种情形下看涨期权的标的资产为股票价格；对于一个未开发的储备的期权的标的资产就是已经开发的储备的价值（正如我们看到的，它是石油价格的函数）。未开发储备的执行价格为开发成本，到期时间就是放弃规定；看涨期权的价值及最优执行规则取决于股票的股息率；股息率越高，持有期权而不是执行它的机会成本（过去的股息）也越高。对已开发储备的类似变量就是减去损耗率的净产出收益，人们通过推迟开发而放弃这些。

398

表 12—1 看涨期权与未开发石油储备的比较

看涨期权	未开发储备
股票价格	已开发储备的价值
执行价格	开发成本
到期时间	放弃规定
股票价格波动	已开发储备价值的波动
股票的股息	开发储备减去损耗的净产出收益

12.1.1 已开发储备的价值

我们从描述已开发储备的价值开始。令 B_t 为已开发储备中的产油量， V_t 为已开发储备中每桶油的价值，并且令 R_t 为已开发储备在某一时刻给所有者带来的回报。这一回报由两种成分构成——来自生产的利润流及剩余油量的资本收益。作为合理的近似，我们可以把来自已开发储备的产品解释为指数下降。^[4]因此

$$dB_t = -\omega B_t dt \quad (12-1)$$

也就是每年生产石油中的一小部分 ω 。那么，回报 R_t 可以写为

$$\begin{aligned} R_t dt &= \omega B_t \Pi_t dt + d(B_t V_t) \\ &= \omega B_t \Pi_t dt + B_t dV_t - \omega V_t B_t dt \end{aligned} \quad (12-2)$$

式中， Π_t 为来自生产和销售石油的税后利润。

399 我们也可以假定，已开发储备的回报率服从布朗运动过程：

$$\frac{R_t dt}{B_t V_t} = \mu_v dt + \sigma_v dz \quad (12-3)$$

式中， μ_v 为竞争性资本市场中所要求的风险调整后的预期回报率。把式 (12-2) 和式 (12-3) 结合起来，给出了关于已开发储备的单位价值 V 的动态方程：

$$dV = (\mu_v - \delta_t) V dt + \sigma_v V dz \quad (12-4)$$

式中，生产单位已开发储备的支出率 δ_t 由下面的式子给出：

$$\delta_t = \frac{\omega(\Pi_t - V_t)}{V_t} \quad (12-5)$$

注意，这里最接近的类似模型是第 5 章中的投资模型，其中项目的价值服从几何布朗运动。在第 5 章中，项目的价值由 $dV = \alpha V dt + \sigma V dz$ 给出，其中 $\alpha = \mu - \delta$ ， μ 为经风险调整的预期回报率。我们把 δ 称为回报不足率，并解释到它可能反映来自运营中的项目的现金流。除了现在的支出率为净损耗率外，同样的结论在这里也是正确的。事实上，这个模型与第 5 章中的模型的明显差别在于这里的投资期权（即开发储备）不会永远持续；因此，存在放弃规定的机会。另外，由于生产的边际成本很小（大部分生产成本为开发的沉没成本），而且由于石油只能缓慢地抽取（典型的 ω 大约为每年 10%）， $\Pi_t > V_t$ ，因此， $\delta > 0$ ，从而已开发的储备将一直被生产。

在进行下一步之前，粗略地估计一下支出率 δ 是非常有用的。已开发储备的每桶价值一般等于石油市场价格的 1/3 左右，每桶的生产成本大约为市场价格的 30%，除去折旧补助后的公司税率大约为 34%，因此，每桶油的税后利润大约为其价格的 46%。利用 $\omega = 0.1$ ，并令 P 表示一桶油的市场价格，有

$$\delta = \frac{0.1(0.46P - 0.33P)}{0.33P} \approx 0.04$$

这样，持有已开发的储备就像是持有了股息分红为4%的股票。

12.1.2 未开发储备的价值及最优开发规则

给出关于已开发储备的价值的公式(12-4)，我们现在可以确定未开发储备的价值及其开发的最优开发规则。由于存在种类繁多的金融工具可用于复制石油价格的波动(例如，期货合约、远期合约以及石油公司的股票)，复制明显成立，或有债权方法可以用于评价未开发储备。令 $F(V, t)$ 表示未开发储备的1单位油的价值。利用式(12-4)并重复以往的步骤，读者可以证明 $F(V, t)$ 必须满足下式：

$$\frac{1}{2}\sigma_v^2 V^2 F_{VV} + (r - \delta)VF_V - rF = -F_t \quad (12-6)$$

注意式(12-6)是一个偏微分方程；由于开发储备的期权在时间 T 期满，期权价值取决于当前时间 t 。

式(12-6)必须在约束于边界条件下求解。令 D 为开发储备的每桶成本(即期权的“执行价格”)，这些条件就是：

$$F(0, t) = 0 \quad (12-7)$$

$$F(V, T) = \max[V_T - D, 0] \quad (12-8)$$

$$F(V^*, t) = V^* - D \quad (12-9)$$

$$FV(V^*, t) = 1 \quad (12-10)$$

条件式(12-8)正好说明，在到期日，如果 $V_T > D$ ，开发期权将执行。其他边界条件都是标准的。

式(12-6)不能被解析地解出来，但是利用有限差分方法获得一个数值解并不困难。(参见第10章，特别是其附录。)图12-1和表12-2显示了来自西格尔、史密斯和帕多克(Siegel, Smith and Paddock, 1987)模型的解，它是以前面所讨论过的支出率 $\delta = 0.04$ 、税后实际的无风险利率 r 为0.0125，以及 σ_v 的不同值为例。在这个模型中， σ_v 的值是一个重要的投入，而且可以通过不同的方式进行估计。估计或者以历史数据为基础，或者从石油产业的专家的评估中得到，这样就可获得未来某一段时间内石油价格的90%的置信区间。以过去30年的数据为基础的估计将把 σ_v 固定在0.15，但是如果用产业发展规划预测的观点来估算， σ_v 可能会高一些。 σ_v 的一个合理的范围介于0.15~0.25之间。

图12—1显示了 $\sigma_v = 0.15$ 和 0.25 时作为到期年限的函数的临界比率 $\frac{V^*}{D}$ 。

注意在到期日， $\frac{V^*}{D} = 1$ （它来自边界条件式(12-8)），因此，标准的净现值规则仍然适用。然而，当企业在决定是否开发储备之前至少要等待若干年，则临界比率会上升到2甚至更多。这一结论与第5章中“永久”投资期权的简化模型中所得到的结论很相似。我们还注意到，即便等待的时间超过1年或2年，临界比率对到期日并不是非常敏感的。因此，对大部分诸如石油储备开发投资问题来讲，仅仅把它处理为永久性的开发期权并完全忽略放弃规定是一种合理的近似。^[5]那么，式(12-6)中的项 F_t 消失了，方程式可以通过解析的方法来求解。（其解与我们在第5章中所得到的结果一样。）

402

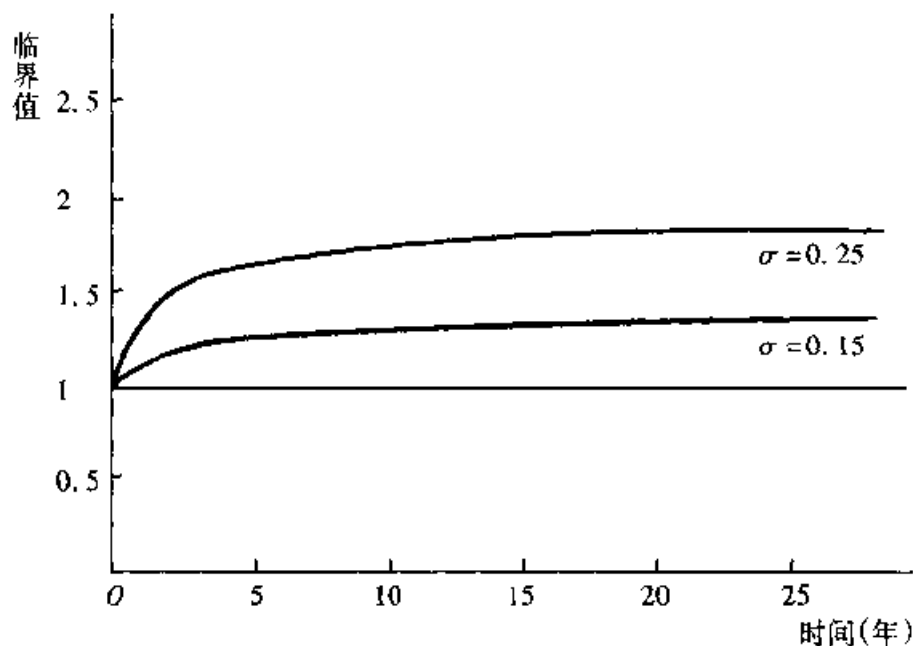


图 12—1 石油储备开发的临界值

图中，所示为 $\delta = 0.04$ 且 $r = 0.0125$ 时的 $\frac{V^*}{D}$ ，其中 D 为开发成本。

表12—2显示了 $\sigma_v = 0.142$ 以及 $\sigma_v = 0.25$ 时未开发储备（即开发期权的价值）每1美元的开发成本的价值（帕多克、西格尔和史密斯（Paddock, Siegel and Smith, 1988）所得到的估计值）。当 $\frac{V}{D}$ 小于1，即已开发储备的价值小于开发成本时，我们将不会开发储备，即使用标准的净现值判断尺度也是如此。（用金融期权的说法，开发期权是“虚值”。）如果 $\frac{V}{D}$ 超过了1（此时

开发期权为“实值”),标准的净现值判断尺度建议我们去投资,但是正如图12—1^①所示,除非 $\frac{V}{D}$ 明显大于1,否则不是最优决策。表中各项显示了单位开发成本的期权价值,即 $\frac{F(V,t)}{D}$ 。例如,当 $\sigma_v = 0.142$, $T = 10$ 且 $\frac{V}{D} = 1$ 时,对应于每1美元的开发成本的期权价值大约为9美分。

表 12—2 每1美元开发成本的期权价值

V/D	$\sigma_v = 0.142$			$\sigma_v = 0.25$	
	T=5	T=10	T=15	T=5	T=10
0.80	0.018 10	0.028 12	0.033 09	0.073 94	0.103 92
0.85	0.027 61	0.038 94	0.044 30	0.091 74	0.123 05
0.90	0.040 24	0.052 45	0.058 03	0.111 69	0.143 90
0.95	0.056 43	0.068 99	0.074 58	0.133 80	0.166 46
1.00	0.076 61	0.088 90	0.094 31	0.158 04	0.190 71
1.05	0.101 16	0.112 53	0.117 54	0.184 38	0.216 64
1.10	0.130 42	0.140 25	0.144 64	0.212 78	0.244 24
1.15	0.164 72	0.172 42	0.175 99	0.243 21	0.273 49

说明:因期权价值在开发成本上是均值的,所以期权总价值为本表项目乘以总开发成本。

一个简单的例子有助于说明这些结论如何得到利用。^[6]考虑一个未开发的储备,如果开发它,预期将得到1亿桶油,而且有10年的放弃规定。假定已开发储备的价值为每桶12美元,支出率(即净生产收益减去储备价值部分的损耗率)为4个百分点,储备的开发需要3年(特别是墨西哥湾的近海储备开发),开发成本的现值为每桶11.79美元。那么,我们将如下所示来评价未开发的储备。

1. 由于开发需要三年时间,我们必须计算已开发储备的现值。合适的贴现率为支出率 δ (即经风险调整的利率 μ 与储备价值预期增长率 $\mu - \delta$ 之间的差异)。由于 $\delta = 0.04$,已开发储备的现值为 $V' = e^{-0.12} (12 \text{ 美元}) = 10.64 \text{ 美元}$ 。

2. 接着算出已开发储备的价值与其开发成本的现值之比。即 $\frac{V'}{D} = \frac{10.64 \text{ 美元}}{11.79 \text{ 美元}} = 0.90$ 。它小于1,因此,开发期权实际上为虚值。

① 疑有误,应为表12—2。——译者注

3. 我们现在可以利用表 12—2 来计算未开发储备的价值。假定 σ_v 的标准差为 0.142, 每 1 美元开发成本的期权价值为 0.052 45, 总开发成本为 (11.79 美元) \times (1 亿) = 11.79 亿美元。因此, 未开发储备的总价值为 (0.052 45) \times (11.79 亿美元) = 0.618 4 亿美元。

这样, 尽管在给定的当前石油价格水平上开发这一尚未开发的储备不可能有利润, 由于期权价值, 它仍然是有价值的, 大约为 6 200 万美元。此外, 如果世界石油市场发生如下变化, 即已察觉到的石油价格波动更厉害了, 这一期权价值也会大幅度提高。例如, 正如我们从表 12—2 中所看到的, 如果 σ_v 上升到 0.25, 未开发储备的价值将上升到 (0.143 90) \times (11.79 亿美元) = 1.696 6 亿美元。

12.1.3 石油价格的均值回归

我们已经假定, 已开发石油储备的价值 (如石油价格) 服从几何布朗运动。然而, 正如我们在本书前面已经提到过的, 有人可能会认为, 石油价格, 进而储备价值, 服从某些不同随机过程。例如, 有人可能认为, 在很长的时间周期中, 石油价格 (及其他商品的价格) 可能会回到长期边际成本, 因而是均值回归的。或者, 有人可能认为石油价格最好以泊松跳跃过程来代表, 而不是连续的伊藤过程。

不幸的是, 由于数据有限, 确定价格过程实际上是均值回归的还是具有跳跃成分是很困难的。例如, 在原则上, 人们可以进行“单根检验”来检验价格序列是均值回归还是随机游动。然而, 这是针对短的时间序列 (例如 30 年或更少) 的弱检验, 不能否决随机游动假说, 即使时间序列实际上就是均值回归的。^[7]原因是任何均值回归过程一般都非常缓慢, 因此, 在短的时间序列内很难看清楚。在这种情形下, 有人可能会认为, 分析的结论是否会发生非常大的变化, 取决于人们是不是从潜在的随机状态变量的均值回归 (或泊松) 过程开始的。

关于均值回归过程, 我们在第 5 章中所发展出来的数值例子提供了一些指引。关于这一部分的石油储备例子的更多的数值结论在韦 (Wey, 1993) 的书中可以得到。正如人们所期望的, 答案变化的程度取决于均值回归的速度以及回归过程的具体水平。

对已开发石油储备的价值考虑下面的均值回归过程, 我们在第 5 章中已经考察过:

$$dV = \eta(\bar{V} - V)Vdt + \sigma Vdz \quad (12-11)$$

则关于未开发储备的价值的偏微分方程式 (12-6) 中 $F(V, t)$ 就变成:

$$\frac{1}{2}\sigma_v^2 V^2 F_{VV} + [r - \mu + \eta(\bar{V} - V)]VF_V - rF = -F_t \quad (12-12)$$

如果直到放弃的时间足够长 (超过 5 年), 我们可以忽略 $F(V, t)$ 对时间的依赖, 因此, 式 (12-12) 中的 $-F_t$ 项消失了, 我们拥有了一个与第 5.1 节中相同的常微分方程。正如我们在那里所看到的, 其解可以记做合流超几何函数, 它拥有一系列表达式。人们可以利用这个解来确定均值回归过程对未开发储备的评估及最优开发规则的影响有多深, 其中 η 和 V 有不同的值。

韦 (Wey, 1993) 已经证明, 利用石油实际价格 100 年的序列, 对 η 的合理估计大约为 0.3, 利用这个值 (以及 $\sigma_v = 0.20$), 均值回归过程影响的程度取决于 V 返回的值 \bar{V} 相对于开发成本 D 的比。正如有人所预期的, 如果 \bar{V} 比 D 要大得多, 当 $V < D$ 时, 由于预期 V 将随着时间的推移而上升, 这说明了均值回归过程给未开发的储备提供了更高的价值。韦证明, 如果 \bar{V} 是 D 的 2 倍, 忽略均值回归过程会导致对储备价值低估 40%, 甚至更多。另外, 如果 \bar{V} 跟 D 一样大, 忽略均值回归过程的影响非常小。

帕多克、西格尔和史密斯 (Paddock, Siegel and Smith, 1988) 的原创性研究旨在说明未开发石油储备具有类似期权的性质, 并表明标准净现值方法的利用会导致对储备和未成熟开发的大幅度低估。无论是否考虑均值回归过程, 结论都是成立的。当然, 对于准备对近海租赁投标 5 亿美元的石油公司来讲, 10% 的评估错误增加了大量的货币, 因此, 很值得仔细分析说明均值回归过程及其他任何被认为是有关的价格特征或已开发储备的价格过程的特征。

12.2 电厂对《空气清洁法》的遵守

在 1990 年的《空气清洁法》修正案的要求下, 美国的电厂受到了排放 SO_2 的限制。然而, 它们可以通过不同的途径来遵守管制。首先, 它们可以从其他工厂购买可交易的排放许可证, 那么, 在这些许可证的帮助下, 继续排放跟它们以前所排放的一样多的 SO_2 。其次, 通过充分降低 SO_2 的排放,

它们可以避免购买许可证的成本。这也可以通过不同方式来完成。一种可能是支付翻新改进厂房的沉没成本,然后从高硫煤转换到低硫煤(更昂贵)。第二种可能是作出对除硫器的(沉没)投资,即在排放前消除 SO_2 的装置。^[8]

406 每种方案都包括了在时间上未预料的成本变化。特别地,排放许可证可以在现货和期货市场中交易^[9],将会随着电力需求的波动、更廉价更有效地消除硫的新技术的到来,以及政府管制自身的变化等而波动。同样地,低硫煤与高硫煤之间的成本差距也会随着煤炭市场中供给与需求的变化而随时间波动。由于转换到低硫煤及投资于除硫器都包括了沉没成本,电厂面临着一种不可逆投资问题,现在我们已经有了很好的装备来解决它。

最近,赫尔伯罗特(Herbelot, 1992)利用期权方法详细考察了这个问题。他表明,由于它们所提供的灵活性,购买排放许可证可能是首选的方案,即使许可的预期执行成本的现值高于通过安装除硫器或转换到低硫燃料的成本时也是如此。他还表明,人们可以计算安装除硫器或转换燃料的期权价值,以及这些期权价值如何降低了电厂的实际执行成本。在这一部分,我们利用赫尔伯罗特的例子来说明这个投资问题的解。

在《空气清洁法》修正案实施的第二阶段,电厂燃烧每百万英国热量单位(MMBTU)只能排放1.2磅(lbs) SO_2 。^[10]一家每百万英国热量单位的排放不到1.2磅 SO_2 的电厂就可以把其差额作为许可证出售给其他电厂,而一家每百万英国热量单位的排放超过1.2磅 SO_2 的电厂必须购买许可证以弥补差额。当然,这家工厂也可以通过安装除硫器或转换燃料(而不是购买许可证)来减少其排放。电厂必须决定何时安装除硫器或改变燃料是最优的,而且还必须决定其执行的预期成本的现值,把这些期权考虑进来。

12.2.1 模型

我们考虑两个随机状态变量,许可证的价格 A ,以每吨美元来测量,和低硫煤对高硫煤每百万英国热量单位的价格贴息 D 。我们假定,这些变量服从(相关的)几何布朗运动:

$$dA = \alpha_A A dt + \sigma_A A dz_A \quad (12-13)$$

$$dD = \alpha_D D dt + \sigma_D D dz_D \quad (12-14)$$

407 式中, $E(dz_A dz_D) = \rho dt$ 。令 μ_A 和 μ_D 分别为许可证的经风险调整的预期回报及价格贴息,并令回报“空头”表示为 $\delta_A \equiv \mu_A - \alpha_A$ 和 $\delta_D \equiv \mu_D - \alpha_D$ 。赫尔伯罗特表明,合理的“基本情形”下的参数值为(以年为基础): $\sigma_A =$

0.12, $\sigma_D = 0.14$, $\delta_A = \delta_D = 0.05$, 以及 $\rho = 0.8$ 。每一许可证允许一家电厂排放1吨的 SO_2 。在1992年, 许可证的交易还没有开始, 但是预期在该产业中每张许可证的价值为500美元。当1993年交易开始时, 许可证的价格下降到200美元。至于煤炭的价格贴息 D , 在1992年及1993年早期, 平均每百万英国热量单位大约为0.45美元。

我们假定每百万英国热量单位的高硫煤排放的 SO_2 为 $x_H = 3.3$ 磅, 而低硫煤排放的 SO_2 为 $x_L = 1.0$ 磅。^[11] 我们考虑一家燃烧高硫煤的现存火力发电厂, 预期它还会持续20年, 装机容量为536 000千瓦, 生产容量为装机容量的80%, 每千瓦小时电力的热率为0.008 98百万英国热量单位。因此, 电厂每年燃烧的能量总百万英国热量单位的数量由下面的式子给出:

$$\begin{aligned} B &= 536\,000 \times 0.80 \times 365 \times 24 \times 0.008\,98 \\ &= 3.76 \times 10^6 \text{ (百万英国热量单位/年)} \end{aligned} \quad (12-15)$$

首先, 假定这家电厂没有转换为低硫煤或安装除硫器的选择。那么其执行每百万英国热量单位排放1.2磅的年成本为 $B \left[\frac{(x_H - 1.2)}{2000} \right] A_t = 35\,385 A_t$ /年。^[12] 电厂20年的寿命中这一成本流的预期现值为

$$PV_0 = \int_0^{20} 35\,385 A_0 e^{-\delta t} dt = 447\,351 A_0 \quad (12-16)$$

这是“基本情形”下的执行成本, 我们将它与当电厂拥有改变燃料或安装除硫器的选择时的成本进行比较。

如果电厂转换到低硫煤, 它不得不支付一次性沉没翻新成本, 每千瓦的生产能力为25美元, 对于536 000千瓦的电厂来讲, 沉没成本总计为 $K_{sw} = 13\,400\,000$ 美元。另外, 电厂对每百万英国热量单位将不得不支付的煤价贴息 D , 以及非燃料性的运营成本0.50美元。然而, 每年电厂将节约购买许可证的费用为 $\frac{B(x_H - 1.2)}{2\,000}$ 美元, 另外, 它也有能力出售 $\frac{B(1.2 - x_L)}{2\,000}$ 美元的许可证, 因此, 每年的成本节约为 $\frac{AB(x_H - x_L)}{2\,000}$ 美元。

如果企业安装除硫器, 它不得不支付的一次性沉没成本为每千瓦生产能力 200 美元, 对于一家 536 000 千瓦的电厂, 沉没成本总计为 $K_{sw} = 107\,200\,000$ 美元。此外, 运营除硫器需要能源和维护。运营成本为每千瓦小时 0.73 美分, 它意味着除硫器每年的运营成本为 27 421 000 美元。节约的成本流可以像上面一样进行计算。除硫器为 90% 有效, 因此, $x_L = 0.1x_H$,

每年的成本节约为 $\frac{0.9ABx_H}{2000}$ 美元。

尽管原则上电厂可以不止一次地改变燃料，但在实践中，这是不可能的，因此，我们将仅仅考虑从高硫煤向低硫煤的单一转换的可能性。而且，一旦电厂已经转换为低硫煤，就不存在投资于除硫器的意向。结果，我们可以像以往那样进行。首先，我们决定燃烧高硫煤且具有换到低硫煤的选择的电厂的执行成本的现值。然后，假定改变燃料的这种选择权并没有执行，我们评价安装除硫器的选择权并决定关于这个期权的执行成本的现值。

12.2.2 改变燃料的期权

在任何时刻 t ，其中 $0 \leq t \leq T$ ($T = 20$ 年)，电厂都可以转换到低硫煤。如果电厂在时刻 t 转换，回报即从 $t \sim T$ 的成本节约的现值为

$$\begin{aligned} \Phi^{SW} = & \int_t^T B \frac{x_H - x_L}{2000} A_t e^{-\delta_A(\tau-t)} d\tau - \int_t^T BD_t c \delta_D(\tau-t) d\tau \\ & - \int_t^T 0.5B e^{-r(\tau-t)} d\tau \end{aligned} \quad (12-17)$$

分别把前面列出的 B ， x_L ， x_H ， δ_A 和 δ_D 的值代入，并令无风险利率 $r = 0.05$ ，我们得到

$$\begin{aligned} \Phi^{SW}(D_t, A_t, t) = & [1 - e^{0.05(T-t)}] (775100A_t - 674000000D_t \\ & - 337000000) \end{aligned} \quad (12-18)$$

1992—1993 年，每百万英国热量单位 D_t 大约为 0.45 美元，而 A_t 的一个合理的范围为每吨 200 美元～500 美元。在这一值域内， $\Phi^{SW}(D_t, A_t, t)$ 为负，因此，改变燃料的期权明显为“虚值”。然而，如果 A 上升而 D 充分下降，它也可以变为“实值”，而我们想确定其价值。

409

为评价转换燃料的期权，我们假定复制成立并利用或有债权方法。在这种情形下，复制的假定是非常合理的，因为排放许可证是（或很快将）在期货市场中交易，而煤则是在各种非正式的远期市场中交易的，其价格部分地与其他燃料的价格相关。通过重复通常的步骤，读者应当有能力证明，转换燃料期权的价值，我们用 $F^{SW}(A_t, D_t, t)$ 来表示，必须满足下面的偏微分方程：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_A^2 A^2 F_{AA}^{SW} + \frac{1}{2} \sigma_D^2 D^2 F_{DD}^{SW} + \rho \sigma_A \sigma_D A D F_{AD}^{SW} + (r - \delta_A) A F_A^{SW} \\ + (r - \delta_D) D F_D^{SW} + F_t^{SW} - r F^{SW} = 0 \end{aligned} \quad (12-19)$$

它约束于边界条件:

$$F^{SW}(A, D, T) = 0 \quad (12-20)$$

$$F^{SW}(0, D, t) = 0 \quad (12-21)$$

$$F^{SW}(A^*(D, t), D, t) = \Phi^{SW}(A^*(D, t), D, t) - K_{SW} \quad (12-22)$$

$$F_A^{SW}(A^*(D, t), D, t) = \Phi_A^{SW}(A^*(D, t), D, t) \quad (12-23)$$

注意式(12-19)与我们在第10章中所考察过的偏微分方程的相似性。与那些方程相似,式(12-19)必须通过数值方法来求解。^[13]在那里必须找到作为解的一部分的临界边界 $A^*(D, t)$, 当 $A > A^*$ 时, 最优投资规则是改变燃料。在这种情形下, 我们有 $\frac{\partial A^*(D, t)}{\partial D} > 0$ 和 $-\frac{\partial A^*(D, t)}{\partial t} > 0$ 。(如果低硫煤的贴息上升, 许可证的价格也必须提高以使得改变燃料是经济的。同样地, 随着时间推移, 电厂的剩余寿命的减少, 许可证的价格必须上升以调整改变燃料的资本成本。)

在式(12-16)中, 假定电厂不改变燃料或安装除硫器, 我们发现了电厂期望的执行成本的现值。如果我们包括了电厂改变燃料的期权价值, 在时刻 $t=0$ 的现值变为

$$PV_0^{SW} = 447\,351A_0 - F^{SW}(A_0, D_0, 0) \quad (12-24)$$

赫尔伯罗特 (Herbelot, 1992) 已经得出了 F^{SW} 并表明在参数值的合理范围内, 它是非常小的 (最多为几百万美元)。这并不奇怪; 正如我们在前面所看到的, 改变燃料的期权很可能是“虚值”, 即使是许可证价格 A 低到 200 美元也是一样。

12.2.3 安装除硫器的期权

现在考虑安装除硫器的期权。电厂可以在任何时刻 t ($0 \leq t \leq T$) 安装除硫器。如果电厂在时刻 t 安装除硫器, 其回报即从 $t \sim T$ 内节约的成本的现值为

$$\begin{aligned} \Phi^{sr} &= \int_t^T B \frac{0.9x_H}{2\,000} A_t e^{-\delta_A(\tau-t)} d\tau - \int_t^T 27\,421\,000 e^{-r(\tau-t)} d\tau \\ &= [1 - e^{j.05(T-t)}](1\,001\,000A_t - 548\,420\,000) \end{aligned} \quad (12-25)$$

注意除硫器需要的维修成本为每年 27 421 000 美元——这是确定的, 因此, 以无风险利率进行贴现——它需要每年支付。如果电厂安装除硫器, 它也将不得不支付资本成本 $K_{sr} = 107\,200\,000$ 美元, 而且要放弃改变燃料的

期权。如果 $t=0, T=20$ 且 $A=500$ 美元, 净成本节约为负, 大约为 -155 000 000 美元(小于改变燃料期权的价值 $F^{SW}(A, D, t)$, 该值相当小)。就像改变燃料的期权一样, 安装除硫器的期权在我们所考虑的许可证价格范围内为“虚值”; 只有当许可证价格上升到 655 美元时, 它才能变成“实值”。

为确定安装除硫器期权的价值以及最优执行规则, 我们用 F^{sr} 来表示, 除硫器期权的价值我们可以与前面一样进行计算。只要我们继续说明改变燃料的可能性, 来自安装除硫器的净回报取决于 D_t , 以及 A_t 和 t , F^{sr} 也是一样取决于这些参数。结果, F^{sr} 满足与关于 F^{SW} 的式(12-19)相似的偏微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_A^2 A^2 F_{AA}^{sr} + \frac{1}{2} \sigma_D^2 F_{DD}^{sr} + \rho \sigma_A \sigma_D A D F_{AD}^{sr} + (r - \delta_A) A F_A^{sr} \\ + (r - \delta_D) D F_D^{sr} + F_t^{sr} - r F^{sr} = 0 \end{aligned} \quad (12-26)$$

边界条件也是类似的:

$$F^{sr}(A, D, T) = 0 \quad (12-27)$$

$$F^{sr}(0, D, t) = 0 \quad (12-28)$$

$$F^{sr}(A^*(D, t), D, t)$$

$$= \Phi^{sr}(A^*(D, t), D, t) - K_{sr} - F^{SW}(A^*(D, t), D, t) \quad (12-29)$$

$$F_A^{sr}(A^*(D, t), D, t)$$

$$= \Phi_A^{sr}(A^*(D, t), D, t) - F_A^{SW}(A^*(D, t), D, t) \quad (12-30)$$

赫尔罗伯特求出了 F^{sr} 的数值解, 并表明在基本情形的参数值条件下它大概为 1 500 万美元。这看起来似乎很小, 但不要忘记期权正好为“虚值”。一旦我们考虑到这一期权价值, 以及改变燃料期权的价值, 电厂在 $t=0$ 时执行的预期成本变成

$$PV_0^{tot} = 447\,351 A_0 - F^{SW}(A_0, D_0, 0) - F^{sr}(A_0, D_0, 0) \quad (12-31)$$

赫尔罗伯特也说明了这一现值及其期权价值成分如何取决于问题中的各种参数。

12.2.4 留给读者的练习

我们已经说过, 改变燃料的期权价值非常小, 因此, 忽略燃料改变的可能性是一种合理的近似。此外, 一家有 20 年寿命的工厂改变燃料的期权价值及其临界的投资阈值与一家 15 年或 25 年寿命的工厂并没有很大的不同, 因此我们也可以通过忽略时间来简化问题。如果我们把变量中的 D_t 和 t 去

掉，除硫器期权价值的偏微分方程式(12-26)就变成了可用解析方法来求解的常微分方程。作为练习，读者可以作出这些简化，然后计算出安装除硫器的期权价值以及引起安装的临界阈值 A^* 。读者还应当考察这一期权价值和临界值如何随 σ_A 和 δ_A 等参数的变化而变化。

12.2.5 家庭的能源保护

住户的能源保护在20世纪70年代变成了一个重要问题，1978—1985年，美国的所得税法为推动这一目的的投资，如更好的阁楼隔热材料、双层玻璃及一些结构性变化等，提供了税收扣除。经验研究发现，消费者对这些政策的反应非常低。如果消费者是以传统的净现值计算为基础来作出其决策，那么他们必然利用了非常高的贴现率。关于这个“能源悖论”有各种各样的解释，例如燃料价格扭曲或信息匮乏等。

412

期权方法提供了不同的解释。这些投资的大多数都是不可逆的，供暖系统的燃料价格(因而来自这些投资的节约)随时间而随机地波动。因此，消费者应当理性地等到他们的投资回报充分高于他们的资金的机会成本。哈西特和麦特考夫(Hassett and Metcalf, 1992)找到了这种解释的支持。投资理论是前面第5章中的基本模型。他们考虑了15%的课税扣除的影响。对燃料价格过程的参数和能源保护的技术，他们发现期权乘数为4.23。因此，在家庭作出节约能源的投资之前，当前的回报率必须超过资本成本的4倍。他们允许家庭间的异质性，所以家庭对政策和价格变化的反应是时间的分布。

通过对1000个复制序列中不同的价格实现途径的模拟，他们计算出了投资的平均增长。如果价格过程中的不确定性被忽略，并应用传统的马歇尔标准，课税扣除的影响是巨大的。投资从大约27%的家庭立即提高到43%的家庭，五年后从40%提高到60%。然而，当关于未来燃料价格的不确定性被考虑进来时($\sigma = 0.093$)，课税扣除几乎失效。在没有课税扣除条件下，只会作出非常小的投资，因为在不确定条件下价格很少能达到采取行动的高临界值。在典型的模拟中，20年后，只有5%的家庭会采用节约能源的技术。然而，课税扣除不能把事情改善到那么多。与没有政策的基本线进行比较，投资仅提高了0.2个百分点，在20年后提高了不到3个百分点。这些发现不仅支持期权方法，而且也说明课税扣除并不是能源保护的一种有效政策。

12.3 环境政策的时间选择

正如在本章开始时所解释的，环境政策设计与不可逆投资政策的设计有许多共同之处。当一家企业作出不可逆投资支出时，它放弃了等待有可能会影响支出意愿或支出时机的好信息的可能性，这种失去的期权价值必须作为一部分机会成本包含在投资成本中。环境政策的采用也可能会失去期权价值，但在这种情形下有两种不可逆性，而且它们在相反的方向上起作用。

第一，旨在降低生态危害的政策对社会施加了沉没成本。例如，这种政策可能迫使燃煤电厂安装除硫器，或使企业拆毁现有机器并投资于燃烧效率更高的机器。这产生了现在就采用一项政策而不是等待有关其生态影响及其经济后果的更多信息的机会成本。建立在传统的成本—收益分析基础上的机会成本支持了政策的采用。至于不可逆投资决策，与政策采用相关的沉没成本会使等待而不是现在就采纳政策更可取。

第二，环境危害可能部分或全部不可逆。例如，温室气体（GHG）浓度的提高是持久的。即使采用了未来将大幅度降低温室气体排放的激进政策，这些浓度（其自然衰减率大约为每年 1.5 个百分点）的下降也需要很多年。另外，来自更高的全球温度（或者来自被酸化的湖泊或溪流）对各种生态系统的危害可能是永久性的。这意味着现在就采用一项政策而不是等待具有沉没收益，即负的机会成本。这种负的机会成本偏离了政策采用中传统的成本—收益分析。因此，现在立即采用一项政策可能是更合意的，即使传统分析宣称它是不经济的。

我们将利用一个简单的模型，它是以平迪克（Pindyck, 1993e）的著作为基础，然后由诺德豪斯（Nordhaus, 1991）详细阐述的，来说明不确定性和不可逆性之间的这种相互作用。令 M 表示环境污染存量（例如，大气中温室气体的浓度，或者一个湖泊的酸度）， E 表示污染物质的排放率。那么我们可以假定 M 有如下变化：

$$\frac{dM}{dt} = \gamma E(t) - \lambda M(t) \quad (12-32)$$

式中， λ 为 M 的自然衰减率。（这样， λ 越小，排放效应也越不可逆。）我们将通过方程式 $B(M_t, \theta_t)$ 来表示与污染物质 M_t 相联系的社会成本，式中 θ_t 为用来反映口味和技术变化的随时间推移而变化的一个变量，它也许是随机

的。^[14]为简化起见, 令 $B(M_t, \theta_t)$ 为线性:

$$B(M_t, \theta_t) = -\theta_t M_t \quad (12-33)$$

而且将假定 θ_t 服从几何布朗运动:

$$d\theta = \alpha\theta dt - \sigma\theta dz \quad (12-34)$$

我们假定直到这项政策被采用之前, 排放率 E_t 保持为常数水平 E 。一旦政策被采用了, E_t 立即下降为零, 然后就保持不变。最后, 我们假定政策采用的社会成本完全是沉没的, 因此, 在政策采用那一时刻, 社会成本的现值为 K 。^[15]

问题是找到使净现值函数最大化的政策采用规则:

$$W = E_0 \int_0^{\infty} B(M_t, \theta_t) e^{-rt} dt - E_0(K e^{-r\tilde{T}}) \quad (12-35)$$

约束于式 (12-32)。这里, \tilde{T} 为政策采用的时间 (一般是未知的), 与以往一样, E_0 表示以时刻 $t=0$ 时的信息为基础的预期, r 表示贴现率。这是一个最优终止问题, 即我们必须找到最优点, 在这一点花费 K 以把 E_t 减少为零, 给出 M_t (可能是随机性地) 取决于 E_t , 并给出 θ_t 的随机变化。

通过限定两个区域中每一个区域的净现值函数, 我们利用动态规划来对这个问题求解。令 $W^N(\theta, M)$ 表示“不采用”区域 (因此, $E_t = E$) 的价值函数, 令 $W^A(\theta, M)$ 表示“采用”区域 (即 $E_t = 0$ 的区域) 的价值函数。读者可以证明 (作为练习), $W^N(\theta, M)$ 必须满足下面的贝尔曼方程:

$$rW^N = -\theta M + (\gamma E - \lambda M) W_M^N + \alpha\theta W_\theta^N + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 W_{\theta\theta}^N \quad (12-36)$$

同样, $W^A(\theta, M)$ 必须满足下面的贝尔曼方程:

$$rW^A = -\theta M - \lambda M W_M^A + \alpha\theta W_\theta^A + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 W_{\theta\theta}^A \quad (12-37)$$

这些方程必须受到下述边界条件的约束:

$$W^N(0, M) = 0 \quad (12-38)$$

$$W^N(\theta^*, M) = W^A(\theta^*, M) - K \quad (12-39)$$

$$W_\theta^N(\theta^*, M) = W_\theta^A(\theta^*, M) \quad (12-40)$$

式中, θ^* 为在该点或高于该点政策被采用时 θ 的临界值。在这种情形下, 我们可以“假设”一个解, 然后决定它是否成立。读者可以证明 W^N 和 W^A 由式 (12-41) 给出:

$$W^N(\theta, M) = A\theta^\beta - \frac{\theta M}{r + \lambda - \alpha} - \frac{\gamma E \theta}{(r - \alpha)(r + \lambda - \alpha)} \quad (12-41)$$

以及

$$W^A(\theta, M) = - \frac{\theta M}{r + \lambda - \alpha} \quad (12-42)$$

式中, A 为需要从边界条件式(12-38)中确定的正常数; β 为二次方程 $\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - r = 0$ 的正根, 即

$$\beta - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1 \quad (12-43)$$

在政策采用之前适用的现值函数 W^N 有三个组成部分。式(12-41)右边第一项为在未来某一时刻政策采用期权的价值。第二项为来自污染物质当前存量 M 的社会成本流的现值。第三项是如果排放以比例 E 永远持续时所导致的社会成本流的现值。(注意这种社会成本随第一项的降低而降低, 即排放减少期权的价值。)一旦政策已经被采用了, $E = 0$ 且 W^A 适用, 那么只剩下来自污染物质当前存量的社会成本。

政策被采用后, 仍然有两个未知数, 常数 A 和临界值 θ^* , 它们由边界条件式(12-39)和式(12-40)来决定:

$$A = \left(\frac{\beta-1}{K}\right)^{\beta-1} \left[\frac{\gamma E}{(r-\alpha)(r+\lambda-\alpha)\beta}\right]^\beta \quad (12-44)$$

$$\theta^* = \left(\frac{K}{\beta-1}\right) \left[\frac{(r-\alpha)(r+\lambda-\alpha)\beta}{\gamma E}\right] \quad (12-45)$$

416 我们现在可以看看采用政策的时机如何取决于未来成本和收益以及其他参数的不确定性的程度。首先, 注意 σ 的提高隐含着 β 的下降, 从而有 θ^* 的提高。正如我们所预期的, 污染物质未来社会成本的不确定性程度越高, 等待而不是现在就采用政策的激励也越强, 因此, 为推动政策采用的当前成本也越高。其次, 贴现率 r 的提高增加了政策采用期权的价值, 因此, 也提高了 θ^* 。这类似于利率改变对金融期权的价值及其最优执行点的影响; r 的提高意味着政策采用中成本 K 的现值的下降, 因此, 政策采用期权的价值更高, 从而它会在更晚的时候被执行。再次, 污染物质存量的“折旧”率 λ 的增加也会提高 θ^* ; 更高的 λ 意味着来自排放的环境危害的不可逆性较低, 因此, 现在就采用政策而不是等待的沉没收益减少了。最后, 初始排放率 E 的增加降低了 θ^* ; 理由是 E 越高, 等待的社会成本也越大, 而且由于政策采用的成本 K 是固定的, 值得尽早采用政策。

然而，把排放从 E 降为零的成本独立于 E 的假定可能并不现实。成本 K 一定是 E 的增函数，而且可能对 E 是凸的。然而，作为初步的近似，我们假定 K 与 E 成比例：

$$K = kE \quad (12-46)$$

在这种情形下， θ^* 变为

$$\theta^* = \frac{k(r+\alpha)(r+\lambda-\alpha)\beta}{\gamma(\beta-1)} \quad (12-47)$$

那么， θ^* 独立于 E 。而且，在这种情形下，我们将永远不会把排放减少到少于 100% 的任何一点（假定我们想把它们全部去掉）。原因是采用政策的期权价值 $A\theta^3$ 是独立于 M 的，而且关于 E 是线性的，因此， W^N 和 W^A 关于 M 和 E 是线性的。

一个数字例子将说明这种计算，并表明涉及的数量级。假定 $\alpha = 0$ （因而每单位 M 的预期社会成本为常数）， $r = \lambda = 0.02$ ， $\sigma = 0.20$ ， $\gamma = 1$ ， $E = 100\,000$ 吨/年， $\theta_0 = 20$ 美元/吨， $K = 20$ 亿美元。那么 $\beta = 1.62$ ， $A = 7\,681\,000$ ，而 $\theta^* = 42$ 美元/吨。因此，在 $\theta_0 = 20$ 的当前价值，政策不应当 417 被采用，但是采用它的社会期权的价值 $A\theta^3$ 为 6.4 亿美元。只有当 θ 提高到每吨 42 美元时，才应当采用政策；那么， $A\theta^3 = 21$ 亿美元，读者可以检验边界条件式 (12-39) 和式 (12-40) 都满足。对 $\sigma = 0.4$ 进行的计算，我们把它留给读者，并说明它如何导致了更大的临界值 θ^* 。

图 12—2 显示了 $M = 0$ （因而对所有的 θ 来讲， $W^A = 0$ ）的情形。注意在 W^N 和直线 $W^A - K$ 的切点可以找到 θ^* 。（如果 M 大于零，我们有 $W^A = \frac{\theta M}{r + \lambda - \alpha}$ ，因此，仅仅向下旋转 $W^N(\theta)$ 和直线 $W^A - K$ 。）图 12—3 显示了当 σ 递增时，图 12—2 中的解如何变化。注意到 β 下降到接近于 1，因而 $A\theta^3$ 变得不太凸，而且 $W^N(\theta)$ 平滑地延伸，因此， θ^* 变得更大。

这个模型非常简单，而且仅仅想说明公共政策问题如何会与企业投资问题相同的期权价值。为使模型更加现实，我们想指定 $B(M_t, \theta_t)$ 为 M_t 的凸函数，而且也许降低 E_t 的成本 $k(E)$ 为 E 的凸函数。那么，问题将不再是最好把 E 全部去掉时的情形，而是把 E 降低为零是最优的情形。假定将来 θ_t 充分提高时可以进一步降低，我们可以考虑最优的降低量。那么，问题实际上变成了在第 11 章考察过的增量投资问题。

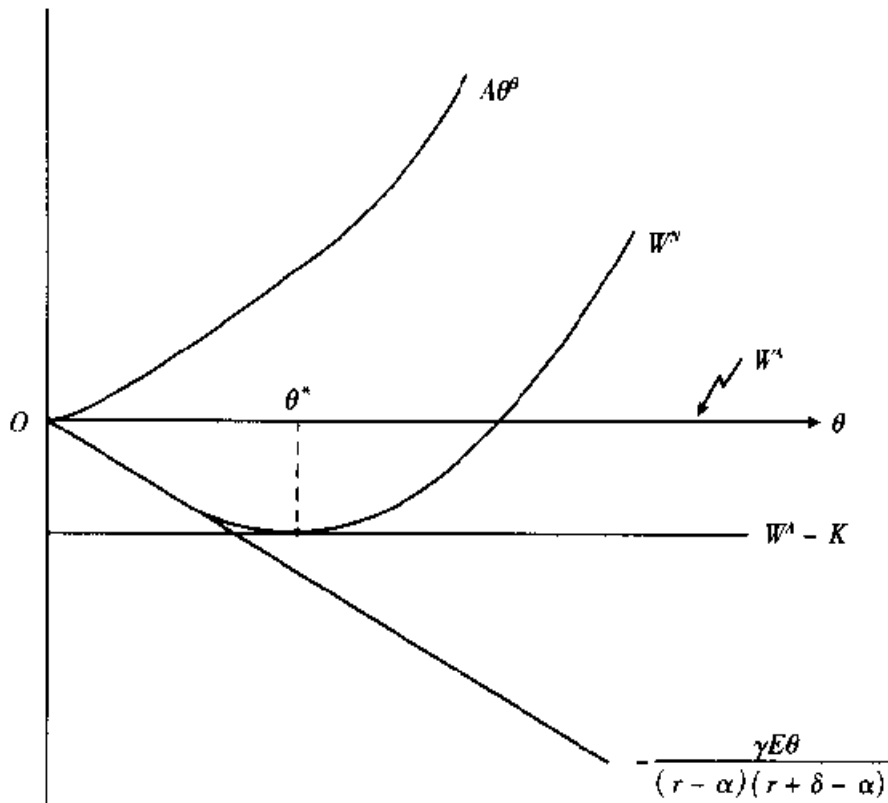


图 12—2 $M=0$ 时的解

418

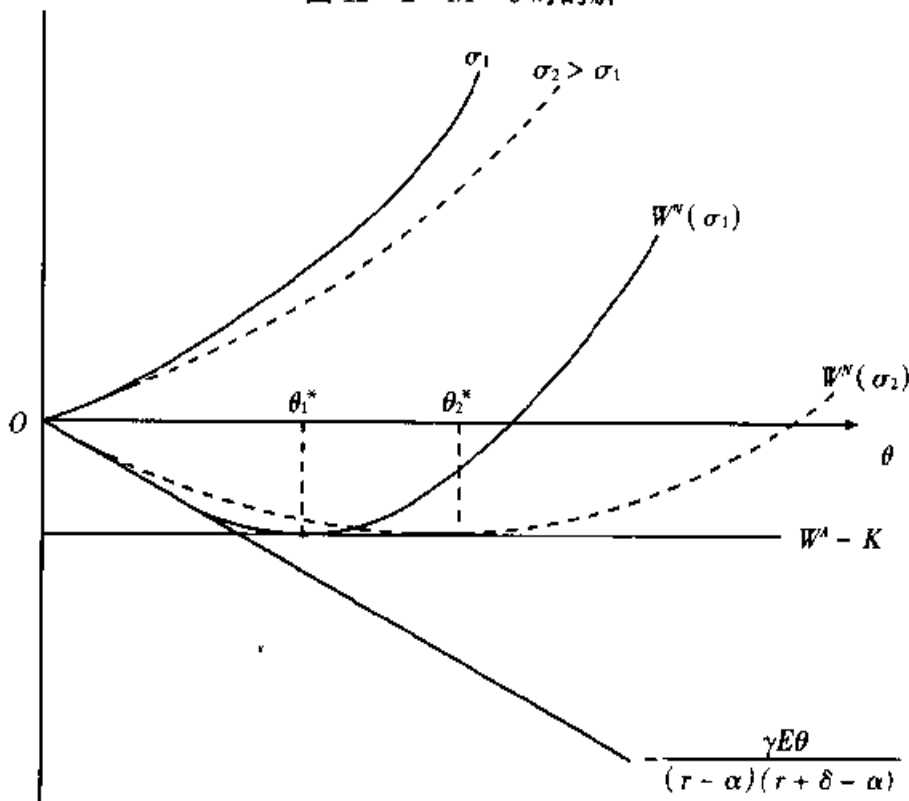


图 12—3 递增的 σ 对 θ^* 的影响

12.4 解释总投资行为

在实证经济学中，对总投资开支和部门投资开支的解释是一种不太成功的努力。在很大程度上，计量经济学模型在解释或预测投资开支方面没有太大的用处。问题不仅仅是这些模型没有能力解释和预测投资中的一小部分变化。另外，在理论中所构造的数量应当具有非常强的解释力——但是它们在实践中却没有解释力。^[16]

大多数投资开支的不可逆性可能有助于解释为什么新古典投资理论在提供良好的投资行为实证模型中的失败。典型地，风险效应都是在假定风险贴息（例如，从CAPM中得到的）可以被加到用于计算项目现值的贴现率中来处理的。然而，正如我们在本书中已经看到的，正确的贴现率不可能在没有明确地解决期权定价问题的条件下得到，贴现率并不需要在时间上为一常数，而且它不必等于企业资本的边际成本。结果，简单的资本成本测度可能是投资开支的一种拙劣的解释因子。

12.4.1 以托宾 q 为基础的模型

忽略不可逆性所引发的问题在以托宾 q 模型为基础的背景下可以看到。一个很好的例子就是艾贝尔和布兰查德（Abel and Blanchard, 1986）的模型，这是在 q 理论框架中解释投资的较高级的努力中的一种；它利用了精心构造的边际 q 测度，而不是平均 q 测度，其中包括支付时滞和调整成本，并且明确地把解释变量未来值的期望模型化。然而，它并没有处理不可逆性和期权价值。我们简要回顾一下其结构。

模型以标准的净现值规则为基础，“投资于资本边际单位，如果来自该单位的预期利润流的贴现现值至少等于该单位的成本”。给定资本存量 K_t 及投资水平 I_t ，令 $\pi_t(K_t, I_t)$ 为时刻 t 利润的最大值，即它在假定可变要素得到优化利用时的利润值。它取决于 I_t ，由于调整成本， $\frac{\partial \pi}{\partial I} < 0$ ，且 $\frac{\partial^2 \pi}{\partial I^2} < 0$ ，即购⁴²⁰买和安装的新资本越快，其成本也越高。（关于调整成本的讨论参见第11章。）这样当前利润和未来利润的现值由式（12-48）给出：

$$V_t = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^j (1 + \rho_{t+i})^{-1} \right] \pi_{t+j}(K_{t+j}, I_{t+j}) \quad (12-48)$$

式中， ρ 为贴现率。关于 I_t 最大化上式，约束于

$$K_t = (1 - \lambda)K_{t-1} + I_t$$

式中， λ 为折旧率。给出下列边际条件：

$$- E_t \left(\frac{\partial \pi_t}{\partial I_t} \right) = q_t \quad (12-49)$$

$$\text{式中, } q_t = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^j (1 + \rho_{t-i})^{-1} \right] \left(\frac{\partial \pi_{t+j}}{\partial K_{t+j}} \right) (1 - \lambda)^j \quad (12-50)$$

回顾第 11 章对 q 的讨论。这里我们指出边际 q 附属于正在被利用的边际单位的资本的贡献。然而，它不考虑这一单位资本对企业全部价值的影响。只有当这一单位资本所贡献的利润流的现值被计算在内时，作出投资从而执行期权的机会成本才被忽略了。此外，它并不是被解释成购买成本的一个比例，这样在第 11 章所利用的术语中，这就是边际，现在资产价值，即托宾 q 的绝对概念。

式 (12-49) 说明，投资发生在这样一点，即额外单位资本的成本等于来自这一单位资本的预期增值利润流的现值，艾贝尔和布兰查德估计了对 q_t 的线性近似和二次近似，并利用 ρ_t 和 $\frac{\partial \pi_t}{\partial K_t}$ 的矩阵自回归表达式来模型化未来值的预期。他们的结论非常简单且完全：“我们的数据并不同意由 q 理论强加的基本限制，甚至推广到考虑了小的支付时滞。”

综观本书，我们强调了 q 理论的推广，即认识到执行投资期权的机会成本。艾贝尔和布兰查德关于 ρ_t 的数据是以股票和债券回报率的加权平均为基础的。然而，在我们的方法中，贴现率 ρ_t 没有必要等于资本的平均成本。实际上，它们可以作为企业最优投资问题解的一部分而被确定下来，而且这其中包含了对企业现在或将来作出（不可逆的）边际投资期权的评价。这样，对这类投资问题求解比由式 (12-49) 和式 (12-50) 所给出的一阶条件要复杂得多。例如，考虑一个系统风险为零的项目。无风险利率 ρ 的使用会使 q_t 的值过高，从而可能会建议对一个实际上应当推迟的项目作出投资开支。此外，不存在适当地调整 ρ 的简单方式。问题是这种计算忽略了执行投资期权的机会成本。

不幸的是，将不可逆性合并到总投资开支的计量经济学模型中并不简单。正如我们已经看到的，描述最优投资决策的方程组并不是线性的，即使对简单的情形也是如此。而且，测度（或统计性识别）反映风险的关键成分

的变量或参数可能很困难。如果我们想解释不确定性对投资开支的长期均衡效应还会产生其他问题。尽管我们知道不可逆性和不确定性都会提高企业投资所需要的临界值（如项目的预期回报率），在没有作出严格的函数和参数假定的条件下，我们对不确定性对企业投资的长期平均速度或平均资本存量的影响知之甚少。我们在下面还要说明这一点，但是它意味着无论是对企业、产业，还是国家，那些检验不能以投资速度及风险测度之间的简单均衡关系为基础。

最后，加总方面存在许多严重的问题。我们的最优投资决策理论可直接应用于大多数企业或其他类似的决策制定单位。不同企业可能有不同的技术和管理能力，而且他们可能受制于不同（特殊的）冲击。那么它们将有不同的行动临界值。另外，历史事件可能会留给不同企业相对于其行动临界值不同的资本存量。如果要使我们的数据适合于产业集合，必须确保在检验之前首先在理论上发展出适合产业层面的意义，如果希望在微观决策单位的层面上进行实证分析，我们需要有识别出所有这些不同点的数据和说明。所有这些都是非常困难的工作。在下一节，我们将评述一些对这个问题采用了不同方法的研究工作。

12.4.2 以期权为基础的模型的实证意义

在本书中所发展出的模型认为，作为投资的决定因素的不确定性在投资中的作用要比其在传统模型中的作用大得多。我们在第8章和第9章中看到，尽管机制不同，对竞争性产业和垄断性企业两者来说，不确定性通过影响引致投资的临界值来影响投资。那个临界值可以应用于已完成项目的价值、项目产出的价格，或者在增量投资的情形下资本的边际盈利能力。通过不同的模型，我们看到，这个临界值对潜在的随机状态变量非常敏感。

这些模型必须进一步发展才能说明对它们进行实证检验的意义。首先，强调下面这一点是非常重要的，即模型并没有描述投资本身，而是引发投资所需要的临界值。例如，在第11章，投资被隐含地限定为一个随机过程，在一定的吸收壁中来控制资本边际产出的价值。从这个模型中，我们看到，如果波动性提高，临界值也提高。当我们能够描述（或假定）潜在项目的价值或者资本的边际盈利能力在企业之间的分布时，只有在这种程度上，我们能够推导出将波动与实际投资联系起来的结构模型。

不需要研讨得这么深入，关于投资如何在短期内对波动以及其他变量的变化产生反应，我们就能作出推论。例如，波动的一次性提高至少会在短期内减少投资，因为原来高于或接近于一个较低临界值的项目价值现在却低于一个更高的临界值了。而且，我们已经看到，保持其他每种要素不变，漂移变量，如产出价格的提高降低了临界值，因而会与短期内投资的增加相伴随。在企业或竞争性产业层面的增量投资背景下，资本边际盈利能力波动性的提高，或者增量投资平均增长率的下降，至少都将导致投资的暂时下降。

然而，关于不确定性对投资的长期均衡价值、投资—产出比，或者资本—产出比的影响几乎没有什么可说的。为弄清这一点，注意尽管我们知道波动的增加会提高引发投资所需的回报，我们并不知道它会对已实现的平均回报有什么影响。原因是，波动越大，企业需要的回报越高，但是它之所以这样做，仅仅是因为它很有可能会遇到一些回报非常低的阶段（当它发现自己持有了超过其需要的更多的资本）。

同样的不明确也适用于投资产出比 $\frac{I}{Q}$ 。在长期均衡中，我们有 $\frac{I}{Q} =$
 $423 \lambda \frac{KP_K}{Q(K)} P = \left(\frac{P_K}{P} \right) \left(\frac{\lambda K}{Q(K)} \right)$ ，式中 λ 为折旧率。如果资本产出的边际收益的波动性提高了，而且投资下降到任何给定的价格集合，那么产出的价格 P 上升而 $\frac{P_K}{P}$ 下降。假定生产技术为常数回报的柯布—道格拉斯型，那么，
 $\frac{\lambda K}{Q(K)} = \frac{\lambda}{AL^\alpha K^{1-\alpha}}$ 上升。这两种效应在相反的方向上起作用，因此，我们不能总结出 $\frac{I}{Q}$ 会发生什么变化。观察这个问题的另一种方式跟以前一样，我们注意到，波动性的提高导致了更高的临界值，企业持有的资本超过其需求的更高频率，这样资本的生产能力能达到平均状态，即 $\frac{I}{Q}$ 可能会上升。因此，我们没有理论基础来说明，一个经济波动更大、更不稳定的国家会比那些经济更稳定的国家拥有更低的投资与国内生产总值（GDP）比率或更低的资产产出比率。在特别指定的模型中，比如第 11 章中的柯布—道格拉斯模型，我们得到了明确的答案，但在那个模型中，它们的稳定性受到问题条件的限制。

12.4.3 实证证据

考虑到前面所概括的困难,对不确定性条件下的不可逆投资理论的统计检验的努力很少就不足为奇了。这里我们简要总结当前已经完成的此方面的一些有限工作。

一种方法是集中于引发投资的临界值,并考察它是否以这种理论所预测的方式取决于风险测度。这样的优势在于临界值与风险之间的联系比投资与风险之间的联系更容易搞清楚,其不利的地方在于不能直接观察到临界值。这种方法被卡巴利罗和平迪克(Caballero and Pindyck, 1992)最近对美国制造业的一项研究中采用。卡巴利罗和平迪克推导出在自由进入、规模报酬不变,以及柯布-道格拉斯生产技术中的竞争性市场中引发投资所必需的回报的表达式。然后,他们框架性地检验了这一必需的回报。尽管必需的回报不能直接观察到,但人们可以通过利用资本边际盈利能力的极值(如在一定时间阶段的最大值或者最高的 $1/10$ 或 $1/5$ 的平均值)而得到它的一个代表。卡巴利罗和平迪克证明,对美国制造业的数据,这样的代表实际上显示出对资本边际盈利能力的一种正向依赖,正如理论所预测的一样。

另一种方法是考察在阶段与阶段之间的波动如何影响投资。平迪克和索里马诺(Pindyck and Solimano, 1993)对30个国家的截面数据进行了这种考察,计算了每一国家资本边际盈利能力(再次假定为常数回报的柯布-道格拉斯生产技术)在28年的时间序列。他们将样本分为9年期的三个小周期,并对每个国家及在每一个小周期内计算了其资本边际盈利能力、投资与GDP比率的均值以及年对数变化的样本标准差。然后,他们进行了组回归,以确定每一阶段投资与GDP比率对这一均值和标准差的依赖。他们发现,投资比例实际上随均值而有正向变化,随着标准差而有负向变化,正如理论所预测的。^[17]

这些研究在范围上非常有限。关于投资开支以及诸如在研究开发上支出的其他不可逆决策等的更雄心勃勃的“结构性”模型试图估计全部随机动态规划问题的最优条件。拉斯特(Rust, 1987)的工作是这些模型中最出名的一个;把这种方法应用到产业组织的先期努力包括帕克斯(Pakes, 1986)。这是一种有前途的方法,但是仍然处于早期阶段,说明和计算中的严重困难正在非常缓慢地得到解决。特殊的应用往往会遇到观察不到的状态变量,这种方法仅仅适用于这些状态变量之间在时间上保持连续(序列相关)的非常有限的类型。不同企业之间的相互作用的均衡造成了更大的困难。计算方面

的要求仍然很困难，尽管这方面的技术进步很快，这不可能一直是一种障碍。对这些事情的讨论至少还需要一章甚至就其本身的一本专论。因此，我们仅仅推荐有兴趣的读者参阅拉斯特（Rust, 1993）和帕克斯（Pakes, 1993）关于这种研究的状况的一个非常好的综述。

425 缺乏完整的结构化模型，但在处理集合方面的努力更高级是伯特拉和卡巴利罗（Bertola and Caballero, 1990, 1992）的文章。这些文章中的第一篇考虑耐用消费品的需求。当然，这些也是投资决策。格罗斯曼和拉罗克（Grossman and Laroque, 1990）已经指出，面临的购买和转售中的交易成本的消费者最好是遵循购买与交易诸如住房或汽车的耐用消费品决策中的临界值规则。在整个经济中，不同消费者有不同的临界值及相对于这些临界值的由历史性决定的不同初始位置，他们也受到不同（特殊的）冲击以及一些共同（经济范围内）的冲击。通过加总，消除了一些要么全有要么全无的临界值决策规则的观点，但永远留下了总支出中的实际上的序列相关。事实上，他们的模拟存在这种现实的时间序列特征，安德鲁·卡普林（Andrew Caplin）在讨论他们的文章中总结道：“伯特拉和卡巴利罗给我们留下了这样一个不寻常的问题，即试图将一种令人惊奇的成功实证练习合理化。”然而，这并不是实物期权假说否定特定选择的系统的计量经济学检验。^[18]

在这一领域，理论与实证主义间的差距可以从两个方面来看。一个是同意与怀疑主义的混合——同意理论已经在没有实证支持（这正是实际的情形）的条件下走在了前面，因而它的有效性受到怀疑。另一种观点是机会与挑战。理论中有一些含义是来自现实世界而贯穿全书，我们一直努力在每一可能的机会上把它们说清楚。通过利用诸如代表了特定的实际商品或产业的随机冲击变化的参数值，我们得到了我们的许多模型的数值解。我们发现了符合经验——如商业企业在判断投资项目时所采用的最低预期资本回收率，利率削减作为激励投资的政策相对无效，以及政策不确定性对投资的巨大的有害影响等的定性的意义及一些近似的定量意义。这样有许多初步证据证明了这种理论的价值及意义，那么，更严格的实证检验变成了研究机会。我们希望我们的著作能传播并提高对这种理论的理解，并且对实证方面的研究有间接的贡献。

12.5 文献导引

期权定价理论模型在评价近海石油储备并决定何时它们应当被开发的应用首先由帕多克、西格尔和史密斯 (Paddock, Siegel and Smith, 1988) 所倡导。西格尔、史密斯和帕多克 (Siegel, Smith and Paddock, 1987) 提供了他们的模型及其应用的非技术性表达式。第 12.1 节主要来自这两篇文章。⁴²⁶ 图林霍 (Tourinho, 1979) 是这一领域的先行者, 他的研究第一次指出资源储备可以作为期权来理解和评价。相关的研究包括伊肯 (Ekern, 1985)、斯登斯兰德和乔泰默 (Stensland and Tjostheim, 1989, 1991)、雅各比和劳顿 (Jacoby and Laughton, 1992) 及伦德 (Lund, 1992) 的工作。伦德和奥登达尔 (Lund and Okdendal, 1991) 所编辑的一本书包括了自然资源背景下实物期权的一些一般性理论, 以及对石油、渔业等的实证研究。而且, 默克、施瓦茨和斯坦格兰 (Morck, Schwartz and Stangeland, 1989) 利用这些技巧来为森林资源定价, 而布伦南和施瓦茨 (Brennan and Schwartz, 1985) 利用它们来评价制矿业并确定了暂时关闭与永久放弃的原则。应用最近出现在石油工程的文献 (Lohrenz and Dickens, 1993; Stibolt and Lehman, 1993) 以及城市土地估价中 (Quigg, 1993)。

当考察电厂在遵守《空气清洁法》中的问题时, 我们没有讨论数值解法, 而且我们仅仅简要回顾了解的特征及它们对各种参数的依赖。对于更多的细节, 有兴趣的读者可以参看赫尔伯罗特 (Herbelot, 1992) 的论文。另外, 与此有关的一项研究是马茨奥科斯和特普里茨-塞姆比茨基 (Martzoukos and Teplitz-Sembitzky, 1992), 他们考察了未来电力需求中的不确定性对投资于新传输线路的意义。

在第 12.3 节, 我们考察了环境政策的时机, 并看到环境危害的不可逆性如何创造了一种期权价值, 它可以使反应政策采用的传统的成本—收益分析产生偏差。这种期权价值首先由阿罗和费希尔 (Arrow and Fisher, 1974)、亨利 (Henry, 1974a, b) 及库拉蒂拉卡和费希尔 (Krutilaka and Fisher, 1975) 注意到, 而且由汉尼曼 (Hanemann, 1989)、费希尔和汉尼曼 (Fisher and Hanemann, 1987)、伦德 (Lund, 1991) 及其他人给予了精心研究。^[19] 科尔斯塔德 (Kolstad) 发展了一个三阶段模型, 其中包括了对来自较低的污染物质存量的净收益的学习。他表明, 在政策采用没有成本的

条件下，学习的速度越快，第一阶段排放的水平也越低；但是如果政策采用的成本是部分沉没的，不确定性的影响是模棱两可的。而且，亨德里克斯 (Hendricks, 1992) 利用全球预警的连续时间模型来研究不可逆地减少排放的政策时机，考虑了污染物质的（部分）不可逆积累。他考虑了将全球平均气温与大气中 GHG 浓度联系起来的一个参数的不确定性，假定学习对这个参数的不确定性随着时间推移下降，并且证明学习速度如何影响到政策时机。最后，关于 GHG 排放及全球预警（作为亨德里克斯的研究基础的一个模型）的简单模型，参见诺德豪斯 (Nordhaus, 1991) 的论述。

关于不可逆投资的最近的实证研究包括毕泽和西奇尔 (Bizer and Sichel, 1988) 和卡巴利罗 (Caballero, 1991b) 的工作。后者与伯特拉和卡巴利罗 (Bertola and Caballero, 1990, 1992) 一起，是当具体企业或产业范围的冲击共同存在时对加总的一种发展。利用微观数据的实证研究，其目的是个体选择的结构化动态规划模型，由拉斯特 (Rust, 1993) 和帕克斯 (Pakes, 1993) 提供了综述。

【本章注释】

[1] 这可能就是政府得到其自我评价的方式，它们一直是系统地过低。参见帕多克、西格尔和史密斯 (Paddock, Siegel and Smith, 1988) 的论述。

[2] 当勘测所生产出的信息与后面阶段的决策有关，它就有额外的价值，正如我们在第 10 章中所看到的。然而，勘测的开支相对很小。至于在后面的阶段，一旦储备被开发，抽取几乎会一直以或大或小的固定速度进行。

[3] 类似的如美式看涨期权，即一种可以在到期日内的任何时间内执行，包括到期日。欧式期权只有在其到期日执行。本表来自帕多克、西格尔和史密斯 (Paddock, Siegel and Smith, 1988) 的论述。

[4] 这是反映对抽取速度的地理约束的标准假定，参见麦克雷 (McCray, 1975) 的论述。

[5] 比较我们在第 4 章折旧的机器的例子中的类似发现；10 年的物理寿命对于我们所考虑的最优放弃来讲实质上就是一种无限。

[6] 这个例子在西格尔、史密斯和帕多克 (Siegel, Smith and Paddock, 1987) 的论述中有更详细的讨论。

[7] 关于这些检验及其限制的解釋参见平迪克和鲁宾费尔德 (Pindyck

and Rubinfeld, 1991) 的著作。该书(462~465页)提供了一个例子,其中对原油、铜及木材的(经通货膨胀调整的)实际价格进行了单根检验。当利用30年的数据时,这些检验未能否定随机游动,但是当利用涵盖了117年的数据序列时,否决了石油价格和黄铜价格的随机游动(支持了均值回归过程)。

[8] 除硫器,技术上指烟囱气体的除硫器,是指这样一种容器,其中由燃烧煤所产生的 SO_2 与一种碱发生反应,从而在上升到烟囱之前被捕获。

[9] 在写作这本书的时候,排放许可证的期货交易还没有开始,但正计划在近期开始进行。

[10] 在第一阶段,电厂每燃烧100万英国热量单位可排放2.5磅。第二阶段在2000年开始生效,但为简便起见,我们假定它现在就生效。

[11] 低硫煤根据不同的硫含量有不同等级的种类,但这是一种合理的近似。

[12] 污染以磅/英国热量单位来衡量,许可证的成本是用美元/吨来衡量。分母中的2000把磅转换为吨。

[13] 赫尔伯罗特(Herbelot, 1992)利用二项式方法作为获得数值解的方法构造了这个问题。求解的另一种方法是像我们在这里所做的那样得到偏微分方程,然后利用有限差分方程解出它的数值解,遵循第10章的附录中我们已经讨论过的那条路线。

[14] 例如,如果 M 就是GHG浓度, θ 的变化可能反映了降低更高的 M 的新的农业技术,或者是提高了这种成本的人口变化。

[15] 注意,这项政策可能会产生一个随时间推移的沉没成本流(例如对所有新房屋的隔热装置方面的开支)。至关重要的是,政策的采用隐含着对这种成本流的承诺,因此,我们可以用其在政策采用时的现值来替换这一流量。此外,如果 $B(M_t, \theta_t)$ 如式(12-33)中那样是线性的,把 E_t 降低为零往往是最优的,如果降低排放是最优的话。


[16] 关于投资开支的计量经济学建模的传统方法的一般回顾及比较,参见奇林科(Chirinko, 1991)和科佩克(Kopcke, 1985, 1993)的论述。

[17] 在相关工作中,平迪克(Pindyck, 1986, 1991a)利用股票市场的数据,以当产品市场变得更灵活时股票价格也会更灵活为依据,研究了美国的总投资。这实际上是这样一种情形,例如,在1975年和1980年的衰退中,以及大萧条期间的更引人注目的情形。他发现,投资开支与股票回报的

方差明显地负相关，即使在考虑了平均回报、长期和短期利率以及 GNP 的增长率的影响后也是如此。

[18] 关于耐用消费品的其他有前途的好的实证研究是埃伯利 (Eberly, 1991) 和拉姆 (Lam, 1989) 的工作。

[19] 这种期权价值的概念应当区别于施马伦斯 (Schmalensee, 1972) 文中的概念，这更像是由于对环境宜人的未来评价的不确定性而补偿风险回避的消费者所需要的风险贴息。关于后一个概念的讨论，参见普卢默和哈特曼 (Plummer and Hartman, 1986) 的论述。



参考文献

- 429 Abel, Andrew B. 1983. "Optimal Investment Under Uncertainty." *American Economic Review* 73 (March): 228 - 233.
- _____. 1984. "The Effects of Uncertainty on Investment and the Expected Long-Run Capital Stock." *Journal of Economic Dynamics and Control* 7, 39 - 53.
- _____. 1990. "Consumption and Investment." In *Handbook of Monetary Economics*, eds. Benjamin Friedman and Frank Hahn. New York: North-Holland.
- _____, and Olivier J. Blanchard. 1986. "The Present Value of Profits and Cyclical Movements in Investment." *Econometrica* 54

- (March): 249 - 273.
- _____, and Janice C. Eberly. 1993. "A Unified Model of Investment Under Uncertainty." Unpublished working paper, The Wharton School, University of Pennsylvania, February.
- Abramowitz, Milton, and Irene A. Stegun, eds. 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. Washington D. C. : National Bureau of Standards.
- Aitchison, J., and J. A. C. Brown. 1957. *The Lognormal Distribution*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Aizenman, Joshua, and Nancy Marion. 1991. "Policy Uncertainty, Persistence and Growth." NBER Working Paper No. 3848, September.
- Akerlof, George A. 1970. "The Market for Lemons: Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism." *Quarterly Journal of Economics* 84 (November): 488 - 500.
- Appelbaum, Elie, and Chin Lim. 1985. "Contestable Markets Under Uncertainty." *Rand Journal of Economics* 16, Spring, 28 - 40.
- 430 Arnold, Ludwig. 1974. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons.
- Arrow, Kenneth J. 1968. "Optimal Capital Policy with Irreversible Investment." In *Value, Capital and Growth, Essays in Honor of Sir John Hicks*, ed. James N. Wolfe. Edinburgh, Scotland: Edinburgh University Press.
- _____. 1970. *Essays in the Theory of Risk Bearing*. Amsterdam: North-Holland.
- _____, and Anthony C. Fisher. 1974. "Environmental Preservation, Uncertainty, and Irreversibility." *Quarterly Journal of Economics* 88, 312 - 319.
- Arthur, W. Brian. 1986. "Industry Location Patterns and the Importance of History." Paper No. 84, Center for Economic Policy Research, Stanford University.
- Baldwin, Carliss Y. 1982. "Optimal Sequential Investment when Capital is Not Readily Reversible." *Journal of Finance* 37(June): 763 - 782.
- Baldwin, Richard, and Paul Krugman. 1989. "Persistent Trade Effects of Large Exchange Rate Shocks." *Quarterly Journal of Economics* 104 (November): 635 - 654.

- Bar-Ilan, Avner, and William C. Strange. 1992. "Investment Lags." Working Paper, Tel-Aviv University and University of British Columbia.
- Becker, Gary S. 1962. "Investment in Human Capital: A Theoretical Analysis." *Journal of Political Economy*, 70, Supplement (October): 9-49.
- _____. 1975. *Human Capital*, second edition. New York: NBER and Columbia University Press.
- _____. 1980. *A Treatise on the Family*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Beddington, John R., and Robert M. May. 1977. "Harvesting Natural Populations in a Randomly Fluctuating Environment." *Science* 197, 463-465.
- Bentolila, Samuel, and Giuseppe Bertola. 1990. "Firing Costs and Labor Demand: How Bad is Euroclerosis?" *Review of Economic Studies* 57 (July): 381-402.
- Bernanke, Ben S. 1983. "Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment." *Quarterly Journal of Economics* 98 (February): 85-106.
- Bernstein, Peter L. 1992. *Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*. New York: Free Press.
- Bertola, Giuseppe. 1988. *Adjustment Costs and Dynamic Factor Demands: Investment and Employment Under Uncertainty*. Ph. D. Dissertation, Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology.
- _____. 1989. "Irreversible Investment." Unpublished working paper, Princeton University.
- _____, and Ricardo J. Caballero. 1990. "Kinked Adjustment Costs and Aggregate Dynamics." In *NBER Macroeconomics Annual 1990*, eds. Olivier Blanchard and Stanley Fischer. Cambridge, MA: MIT Press, 237-295.
- _____, and _____. 1992. "Irreversibility and Aggregate Investment." Unpublished, Princeton University, June.
- Bizer, David S., and Daniel E. Sichel. 1988. "Irreversible Investment: An Empirical Investigation." Unpublished, December.
- Black, Fischer, and Myron Scholes. 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy* 81, 637-659.

- Bliss, Christopher J. 1968. "On Putty-Clay." *Review of Economic Studies* 35 (April):105 - 132.
- Bodie, Zvi, and Victor Rosanski. 1980. "Risk and Return in Commodity Futures." *Financial Analysts Journal* 36 (May):27 - 40.
- Brealey, Richard A., and Stewart C. Myers. 1992. *Principles of Corporate Finance*, fourth edition. New York: McGraw - Hill.
- Brennan, Michael J. 1991. "The Price of Convenience and the Valuation of Commodity Contingent Claims." In *Stochastic Models and Option Values*, eds. D. Lund and B. Øksendal, New York: North-Holland.
- _____, and Eduardo S. Schwartz. 1978. "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 20,461 - 473.
- _____, and _____. 1985. "Evaluating Natural Resource Investments." *Journal of Business* 58(January):135 - 157.
- Brock, William A., Michael Rothschild, and Joseph E. Stiglitz. 1988. "Stochastic Capital Theory." In *Joan Robinson and Modern Economic Theory*, ed. George R. Ferwel. New York: Macmillan.
- Caballero, Ricardo J. 1991a. "Competition and the Non-Robustness of the Investment-Uncertainty Relationship." *American Economic Review* 81 (March):279 - 288.
- _____. 1991b. "On the Dynamics of Aggregate Investment." Discussion Paper No. 541, Columbia University, May.
- _____, and Robert S. Pindyck. 1992. "Uncertainty, Investment, and Industry Evolution." NBER Working Paper No. 4160, September.
- Carr, Peter. 1988. "The Valuation of Sequential Exchange Opportunities." *Journal of Finance* 43 (December):1235 - 1256.
- Carrier, George F., and Carl E. Pearson. 1976. *Partial Differential Equations: Theory and Technique*. New York: Academic Press.
- Chirinko, Robert. 1991. "Business Fixed Investment Spending: A Critical Survey." Draft working paper, University of Chicago.
- 432 Chow, Gregory C. 1979. "Optimal Control of Stochastic Differential Equation Systems." *Journal of Economic Dynamics and Control* 1(May):143 - 175.

- Clark, Colin W. 1976, *Mathematical Bioeconomics*. New York: John Wiley & Sons.
- Copeland, Tom, Tim Koller, and Jack Murrin. 1991. *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies*. New York: John Wiley & Sons.
- Cox, D. R., and H. D. Miller. 1965. *The Theory of Stochastic Processes*. London: Chapman and Hall.
- Cox, John, C., Jonathan E. Ingersoll, Jr., and Stephen A. Ross. 1985. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica* 53(March): 385 - 407.
- _____, and Stephen A. Ross. 1976. "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes." *Journal of Financial Economics* 3, 145 - 146.
- _____, _____, and Mark Rubinstein. 1979. "Option Pricing: A Simplified Approach." *Journal of Financial Economics* 7, 229 - 263.
- _____, and Mark Rubinstein. 1985. *Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Craine, Roger. 1989. "Risky Business: The Allocation of Capital." *Journal of Monetary Economics* 23, 201 - 218.
- Cukierman, Alex. 1980. "The Effects of Uncertainty on Investment under Risk Neutrality with Endogenous Information." *Journal of Political Economy* 88 (June): 462 - 475.
- David, Paul A. 1985. "Clio and the Economics of QWERTY." *American Economic Review* 75, Papers and Proceedings (May): 332 - 337.
- _____. 1988. "Path-Dependence: Putting the Past into the Future of Economics." IMSSS Technical Report No. 533, Stanford University.
- Davis, Steven J. and John Haltiwanger. 1990. "Gross Job Creation and Destruction: Microeconomic Evidence and Macroeconomic Implications." In *NBER Macroeconomics Annual 1990*, eds. Olivier Blanchard and Stanley Fischer, Cambridge, MA: MIT Press, 123 - 186.
- Demers, Michel. 1991. "Investment Under Uncertainty, Irreversibility and the Arrival of Information Over Time." *Review of Economic Studies* 58 (April): 333 - 350.
- Dertouzas, Michael, Richard K. Lester, and Robert Solow. 1990. *Made in America*. New York: Harper Paperback Edition.

- Dickey, David A. , and Wayne A. Fuller. 1981. "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root." *Econometrica* 49, 1057 - 1072.
- Dixit, Avinash. 1988. "Optimal Lay-up and Scrapping Decisions." Unpublished. Princeton University, July.
- 488 _____ . 1989a. "Entry and Exit Decisions under Uncertainty." *Journal of Political Economy* 97(June): 620 - 638.
- _____ . 1989b. "Hysteresis, Import Penetration, and Exchange Rate Pass-Through." *Quarterly Journal of Economics* 104(May): 205 - 228.
- _____ . 1989c. "Intersectoral Capital Reallocation Under Price Uncertainty." *Journal of International Economics* 26(May): 309 - 325.
- _____ . 1990. *Optimization in Economic Theory*, second edition. Oxford, UK: Oxford University Press.
- _____ . 1991a. "Analytical Approximations in Models of Hysteresis." *Review of Economic Studies* 58(January): 141 - 151.
- _____ . 1991b. "Irreversible Investment with Price Ceilings." *Journal of Political Economy* 99(June): 541 - 557.
- _____ . 1991c. "A Simplified Treatment of the Theory of Optimal Control of Brownian Motion." *Journal of Economic Dynamics and Control* 15 (October): 657 - 673.
- _____ . 1992. "Investment and Hysteresis." *Journal of Economic Perspectives* 6, Winter, 107 - 132.
- _____ . 1993a. *The Art of Smooth Pasting*, Vol. 55 in *Fundamentals of Pure and Applied Economics*, eds. Jacques Lesourne and Hugo Sonnenschein. Chur, Switzerland: Harwood Academic Publishers.
- _____ . 1993b. "Irreversible Investment and Competition Under Uncertainty." In *Capital, Investment, and Development*, eds. Kaushik Basu, Mukul Majumdar, and Tapan Mitra. Cambridge, MA: Basil Blackwell, forthcoming.
- _____ . 1993c. "Irreversible Investment with Uncertainty and Scale Economies." *Journal of Economic Dynamics and Control*, forthcoming.
- _____ , and Rafael Rob. 1993a. "Switching Costs and Sectoral Adjustments in General Equilibrium with Uninsured Risk." *Journal of Economic Theory*, forthcoming.

- _____, and _____. 1993b. "Risk-sharing, Adjustment, and Trade." *Journal of International Economics*, forthcoming.
- Dothan, Michael U. 1990. *Prices in Financial Markets*. New York: Oxford University Press.
- Dreyfus, Stuart E. 1965. *Dynamic Programming and the Calculus of Variations*. New York: Academic Press.
- Duffie, Darrell. 1988. *Securities Markets: Stochastic Models*. San Diego, CA: Academic Press.
- _____. 1992. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- _____, and Chi-fu Huang. 1985. "Implementing Arrow - Debreu Equilibria by Continuous Trading of a Few Long-Lived Securities." *Econometrica* 53, 1337 - 1356.
- Dumas, Bernard. 1991. "Super Contact and Related Optimality Conditions." *Journal of Economic Dynamics and Control* 15, 675 - 695.
- _____. 1992. "Dynamic Equilibrium and the Real Exchange Rate in a Spatially Separated World." *Review of Financial Studies*, 5(2), 153 - 180.
- Dutta, Prajit K., and Aldo Rustichini. 1991. "A Theory of Stopping Time Games with Applications to Product Innovation and Asset Sales." Discussion Paper No. 523, Department of Economics, Columbia University.
- Eberly, Janice C. 1991. "Adjustment of Consumers' Durables Stocks: Evidence from Automobile Purchases." Working Paper No. 22 - 91, Rodney L. White Center for Financial Research, University of Pennsylvania.
- Edleson, Michael and Kent Osband. 1988. "Competitive Markets with Irreversible Investment." Unpublished, Rand Corporation, Santa Monica, CA.
- Eisner, Robert, and R. Strotz. 1963. "Determinants of Investment Behavior." In *Impact of Monetary Policy*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Ekern S. 1985. "An Option Pricing Approach to Evaluating Petroleum Projects." *Energy Economics*, 10, 91 - 99.
- Fasano, A. and M. Primicerio (eds.). 1983. *Free Boundary Value Problems: Theory and Applications*, Vols. I, II. Marshfield, MA: Pitman Publishing Company.

- Feller, William. 1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume 1, third edition. New York: John Wiley & Sons.
- _____. 1971. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume II, second edition. New York: John Wiley & Sons.
- Feynman, Richard P. 1949. "Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics." *Physical Review* 76, 769.
- Fine, Charles H., and Robert M. Freund. 1990. "Optimal Investment in Product-Flexible Manufacturing Capacity." *Management Science* 36 (April): 449 - 466.
- Fisher, Anthony C., and W. Michael Hanemann. 1987. "Quasi-Option Value: Some Misconceptions Dispelled." *Journal of Environmental Economics and Management* 14 (July): 183 - 190.
- Fleming, Wendell H., and Raymond W. Rishel. 1975. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. New York: Springer-Verlag.
- Fudenberg, Drew, and Jean Tirole. 1985. "Preemption and Rent Equalization in the Adoption of New Technology." *Review of Economic Studies* 52 (July): 383 - 401.
- 435 Geske, Robert. 1979. "The Valuation of Compound Options." *Journal of Financial Economics* 7 (March): 63 - 81.
- _____, and H.E. Johnson. 1984. "The American Put Option Valued Analytically." *Journal of Finance* 39 (December): 1511 - 1524.
- _____, and Kuldeep Shastri. 1985. "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 20 (March): 45 - 71.
- Gibson, Rajna, and Eduardo S. Schwartz. 1990. "Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims." *Journal of Finance* 45 (July): 959 - 976.
- _____, and _____. 1991. "Valuation of Long-Term Oil-Linked Assets." In *Stochastic Models and Option Values*, eds. D. Lund and B. Øksendal. New York: North-Holland.
- Gilbert, Richard J. 1989. "Mobility Barriers and the Value of Incumbency." *Handbook of Industrial Organization*, Vol. I. New York: North-Holland.

- Goel, S. and N. Richter-Dyn. 1974. *Stochastic Models in Biology*. New York: Academic Press.
- Goncalves, Franklin D. 1992. "Optimal Chartering and Investment Policies for Bulk Shipping." Unpublished Ph. D. thesis, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology, September.
- Gould, John P. 1968. "Adjustment Costs in the Theory of Investment of the Firm." *Review of Economic Studies* 35 (January):47 - 55.
- Grossman, Gene M., and Carl Shapiro. 1986. "Optimal Dynamic R&D Programs." *Rand Journal of Economics* 17, Winter, 581 - 593.
- Grossman, Sanford J., and Guy Laroque. 1990. "Asset Pricing and Optimal Portfolio Choice in the Presence of Illiquid Durable Consumption Goods." *Econometrica* (January):58, 25 - 52.
- Guenther, Ronald B. and John W. Lee. 1988. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Haberman, Richard. 1987. *Elementary Applied Partial Differential Equations*, second edition. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Haneremesh, Daniel S. and Neal M. Soss. 1974. "An Economic Theory of Suicide." *Journal of Political Economy*, 82(February):83 - 90.
- Hanemann, W. Michael. 1989. "Information and the Concept of Option Value." *Journal of Environmental Economics and Management* 16 (January):23 - 37.
- Harris, Milton. 1987. *Dynamic Economic Analysis*. New York: Oxford University Press.
- Harrison, J. Michael. 1985. *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*. 436 New York: John Wiley & Sons.
- _____, and David Kreps. 1979. "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets." *Journal of Economic Theory* 20, 381 - 408.
- _____, and Michael I. Taksar. 1983. "Instantaneous Control of Brownian Motion." *Mathematics of Operations Research* 8, 439 - 453.
- _____, Thomas M. Sellke, and Allison J. Taylor. 1983. "Impulse Control of Brownian Motion". *Mathematics of Operations Research* 8, 454 - 466.

- Hartman, Richard. 1972. "The Effects of Price and Cost Uncertainty on Investment." *Journal of Economic Theory* 5 (October): 258 - 266.
- Hassett, Kevin A. and Gilbert E. Metcalf. 1992. "Energy Tax Credits and Residential Conservation Investment." Working Paper No. 4 020, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA.
- Hawkins, Gregory D. 1982. "An Analysis of Revolving Credit Agreements." *Journal of Financial Economics* 10, 59 - 81.
- Hayashi, Fumio. 1982. "Tobin's Marginal q and Average q : A Neoclassical Interpretation." *Econometrica* 50 (January): 213 - 224.
- He, Hua, and Robery S. Pindyck. 1992. "Investments in Flexible Production Capacity." *Journal of Economic Dynamics and Control* 16 (August): 575 - 599.
- Hendricks, Darryll. 1992. "Optimal Policy Response to an Uncertain Threat: The Case of Global Warming." Unpublished manuscript, Kennedy School of Government, Harvard University, March.
- Henry, Claude. 1974a. "Option Values in the Economics of Irreplaceable Assets." *Review of Economic Studies* 41 (January): 89 - 104.
- _____. 1974b. "Investment Decisions under Uncertainty: The Irreversibility Effect." *American Economic Review* 64 (December): 1006 - 1012.
- Herbelot, Olivier. 1992. "Option Valuation of Flexible Investments: The Case of Environmental Investments in the Electric Power Industry." Unpublished Ph. D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, May.
- Huang, Chi-fu, and Robert H. Litzenberger, 1990. *Foundations for Financial Economics*. New York: Elsevier Science Publishers.
- Hull, John. 1989. *Options, Futures, and Other Derivative Securities*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- _____, and Alen White. 1987. "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities." *Journal of Finance* 42 (June): 281 - 300.
- _____, and _____. 1990. "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25 (March): 87 - 100.
- 437 Ingersoll, Jonathan E., and Stephen A. Ross. 1992. "Waiting to Invest: Investment and Uncertainty." *Journal of Business* 65 (January): 1 - 29.

- Jacoby, Henry D. , and David G. Laughton. 1992. "Project Evaluation: A Practical Asset Pricing Method." *The Energy Journal* 13:19 - 47.
- Jarrow, Robert A. , and Andrew Rudd. 1983. *Option Pricing*. Homewood, IL: Irwin.
- Johnson, Claes. 1990. *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Jorgenson, Dale. 1963. "Capital Theory and Investment Behavior." *American Economic Review* 53(May):247 - 259.
- Judd, Kenneth L. 1985. "The Law of Large Numbers with a Continuum of IID Random Variables." *Journal of Economic Theory* 35(February):19 -25.
- _____. 1992. *Numerical Methods in Economics*. Unpublished manuscript, Stanford University.
- Kalish, Shlomo. 1983. "Monopolist Pricing with Dynamic Demand and Production Cost." *Marketing Science* 2(March):135 - 159.
- Kamien, Morton I. , and Nancy L. Schwartz. 1991. *Dynamic Optimization* , second edition. New York:North-Holland.
- Karatzas, Ioannis, and Steven E. Shreve. 1988. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Berlin:Springer-Verlag.
- Karlin, Samuel, and Howard M. Taylor. 1975. *A First Course in Stochastic Processes* , second edition. New York:Academic Press.
- _____, and _____. 1981. *A Second Course in Stochastic Processes* , New York: Academic Press.
- Kester, W. Carl. 1984. "Today's Options for Tomorrow's Growth." *Harvard Business Review* (March/April):153 - 160.
- Kogut, Bruce, and Nalin Kulatilaka. 1993. "Operating Flexibility, Global Manufacturing, and the Option Value of a Multinational Network." *Management Science* forthcoming.
- Kolstad, Charles D. 1992. "Regulating a Stock Externality Under Uncertainty with Learning." Working Paper No. 92 - 0112, Department of Economics, University of Illinois at Urbana-Champaign, March.
- Kopcke, Richard W. 1985. "The Determinants of Investment Spending." *New England Economic Review* (July):19 - 35.

- . 1993. "The Determinants of Business Investment: Has Capital Spending Been Surprisingly Low?" *New England Economic Review* (January): 3 - 31.
- 438 Krugman, Paul R. 1988. "Deindustrialization, Reindustrialization, and the Real Exchange Rate." NBER Working Paper No. 2 586, May.
- _____. 1989. *Exchange Rate Instability*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Krutilla, John V. , and Anthony C. Fisher. 1975. *The Economics of Natural Environments*. Baltimore, MD: Johns Hopkins Press.
- Krylov, N.V. 1980. *Controlled Diffusion Processes*, New York and Berlin: Springer-Verlag.
- Kulatilaka, Nalin, and Alan J. Marcus. 1988. "General Formulation of Corporate Real Options." *Research in Finance* 7, 183 - 199.
- _____, and Enrico C. Perotti, 1992. "Strategic Investment Timing Under Uncertainty." Discussion Paper No. 145, Financial Markets Group, London School of Economics.
- Kushner, Harold J. 1967. *Stochastic Stability and Control*. New York: Academic Press.
- Kydland, Finn E. , and Edward G. Prescott. 1982. "Time to Build and Aggregate Fluctuations." *Econometrica* 50, 1345 - 1370.
- Lam, Pok-sang. 1989. "Irreversibility and Consumer Durables Expenditures." *Journal of Monetary Economics* 23(January): 135 - 150.
- Leahy, John. 1992. "Investment in Competitive Equilibrium: The Optimality of Myopic Behavior." Working Paper, Harvard University.
- Lieberman, Marvin B. 1984. "The Learning Curve and Pricing in the Chemical Processing Industries." *The RAND Journal of Economics* 15, Spring, 213 - 228.
- Lippman, Steven A. , and R. P. Rumelt. 1985, "Demand Uncertainty and Investment in Industry-Specific Capital." Unpublished, University of California, Los Angeles, September.
- Lohrenz, John, and R. N. Dickens, 1993. "Option Theory for Evaluation of Oil and Gas Assets: The Upsides and Downsides." *Proceedings of Society of Petroleum Engineers*, SPE 25837, 179 - 188.

- Lucas, Robert E. Jr. 1967. "Adjustment Costs and the Theory of Supply." *Journal of Political Economy* 75(August):321 - 334.
- _____, and Edward C. Prescott. 1971, "Investment Under Uncertainty." *Econometrica* 39(May):659 - 681.
- _____, and _____. 1974. "Equilibrium Search and Unemployment." *Journal of Economic Theory* 32, 139 - 171.
- Lund, Diderik. 1991. "Financial and Nonfinancial Option Valuation." In *Stochastic Models and Option Values*, eds. D. Lund and B. Øksendal. New York: North-Holland.
- _____. 1991b. "With Timing Options and Heterogeneous Costs, the Lognormal Diffusion is Hardly an Equilibrium Price Process for Exhaustible Resources." Unpublished, University of Oslo, November.
- _____. 1992. "Petroleum Taxation under Uncertainty: Contingent Claims Analysis with and Application to Norway." *Energy Economics* 14 (January):23 -31.
- _____, and Bernt Øksendal, eds. 1991. *Stochastic Models and Option Values*. New York: North-Holland.
- MacKie-Mason, Jeffrey K. 1990. "Some Nonlinear Tax Effects on Asset Values and Investment Decisions Under Uncertainty." *Journal of Public Economics* 42(August):301 - 328.
- _____. 1991. "Sequential Investment Decisions with Asymmetric Learning." Working Paper, University of Michigan, September.
- Majd, Saman, and Stewart C. Myers. 1986. "Tax, Asymmetries and Corporate Income Tax Reform." NBER Working Paper No. 1924, May.
- _____, and Robert S. Pindyck. 1987. "Time to Build, Option Value, and Investment Decisions." *Journal of Financial Economics* 18(March):7 -27.
- _____, and _____. 1989. "The Learning Curve and Optimal Production under Uncertainty." *RAND Journal of Economics*, Autumn, 20, 331 - 343.
- Malliaris, A.G. . and William A. Brock. 1982. *Stochastic Methods in Economics and Finance*. New York: North-Holland.
- Manne, Alan S. 1961. "Capacity Expansion and Probabilistic Growth." *Econometrica* 29(October):632 - 649.

- Manthy, Robert S. 1978. *Natural Resource Commodities: A Century of Statistics*. Baltimore, MD: Johns Hopkins Press.
- Marcus, Alan J., and David M. Modest. 1984. "Futures Markets and Production Decisions." *Journal of Political Economy* 92(June): 409 - 426.
- Marglin, Stephen. 1963. *Approaches to Dynamic Investment Planning*. Amsterdam: North-Holland.
- Martzoukos, Spiros H., and Witold Teplitz-Sembitzky. 1992. "Optimal Timing of Transmission Line Investments in the Face of Uncertain Demand: An Option Valuation Approach." *Energy Economics* 14(January): 3 - 10.
- Mason, Scott, and Robert C. Merton. 1985. "The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance." In *Recent Advances in Corporate Finance*, eds: E. Altman and M. Subrahmanyam. Homewood, IL: Richard D. Irwin.
- McCray, Arthur W. 1975. *Petroleum Evaluations and Economic Decisions*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- McDonald, Robert, and Daniel Siegel. 1984. "Option Pricing When the Underlying Asset Earns a Below-Equilibrium Rate of Return: A Note." *Journal of Finance* (March): 261 - 265.
- 440 _____, and _____. 1985. "Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down." *International Economic Review* 26 (June): 331 - 349.
- _____, and _____. 1986. "The Value of Waiting to Invest." *Quarterly Journal of Economics* (November): 707 - 728.
- Merton, Robert C. 1971. "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model." *Journal of Economic Theory* 3, 373 - 413.
- _____. 1973. "The Theory of Rational Option Pricing." *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, Spring, 141 - 183.
- _____. 1975. "An Asymptotic Theory of Growth Under Uncertainty." *Review of Economic Studies* 42, 375 - 394.
- _____. 1976. "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous." *Journal of Financial Economics* 3, 125 - 144.
- _____. 1977. "On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani - Miller Theorem." *Journal of Financial Economics* 5 (November): 241 - 249.

- _____. 1990. *Continuous-Time Finance*. Cambridge, MA: Basil Blackwell.
- Metcalf, Gilbert and Kevin Hassett. 1993. "Investment with Uncertain Tax Policy." Work in progress.
- Modigliani, Franco, and Merton H. Miller, 1958. "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment." *American Economic Review* 48(June):261 - 297.
- Morck, Randall, Eduardo Schwartz, and David Slangeland. 1989. "The Valuation of Forestry Resources under Stochastic Prices and Inventories." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24(December):473 - 487.
- Mossin, Jan. 1968. "An Optimal Policy for Lay-up Decisions." *Swedish Journal of Economics* 70, 170 - 177.
- Mussa, Michael. 1982. "Government Policy and the Adjustment Process." In *Import Competition and Response*, ed. Jagdish Bhagwati. Chicago, IL: University of Chicago Press, 73 - 120.
- Myers, Stewart C. 1977. "Determinants of Corporate Borrowing." *Journal of Financial Economics* 5 (November):147 - 175.
- _____, and Saman Majd. 1984. "Calculating Abandonment Value Using Option Pricing Theory." M.I.T. Sloan School of Management Working Paper No. 1 462 - 83, January.
- _____, and Richard S. Ruback. 1992. "Discounting Rules for Risky Assets." M.I.T. Center for Energy and Environmental Policy Research Working Paper No. 93 - 001WP, November.
- Newbery, David, and Joseph Stiglitz, 1981. *The Theory of Commodity Price Stabilization*. New York: Oxford University Press.
- Nickell, Stephen J. 1978. *The Investment Decisions of Firms*. New York: 441 Cambridge University Press.
- Nordhaus, William D. 1991. "To Slow or Not to Slow: The Economics of the Greenhouse Effect." *The Economic Journal* 101 (July): 920 - 937.
- Paddock, James L., Daniel R. Siegel, and James L. Smith. 1988. "Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases." *Quarterly Journal of Economics* 103 (August):479 - 508.

- Pakes, Ariel. 1986. "Patents as Options: Some Estimates of the Value of Holding European Patent Stocks." *Econometrica* 54 (July): 755 - 784.
- _____. 1993. "Dynamic Structural Models: Problems and Prospects. Mixed Continuous Discrete Controls and Market Interactions." In *Advances in Econometrics: Sixth World Congress*, eds. Jean-Jacques Laffont and Christopher Sims, Cambridge, UK: Cambridge University Press, forthcoming.
- Pearson, Carl E. (ed.). 1990. *Handbook of Applied Mathematics*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- Pindyck, Robert S. 1984. "Uncertainty in the Theory of Renewable Resource Markets." *Review of Economic Studies* 51 (April): 289 - 303.
- _____. 1985. "The Measurement of Monopoly Power in Dynamic Markets." *Journal of Law and Economics* 28 (April): 193 - 222.
- _____. 1986. "Capital Risk and Models of Investment Behavior." M.I.T. Sloan School of Management Working Paper No. 1819 - 86, September.
- _____. 1988a. "Options, Flexibility and Investment Decisions." M. I. T. Center for Energy Policy Working Paper No. EL-88-018WP, March.
- _____. 1988b. "Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm." *American Economic Review* 79 (December): 969 - 985.
- _____. 1991a. "Irreversibility and the Explanation of Investment Behavior." In *Stochastic Models and Option Values*, eds. D. Lund and B. Øksendal. Amsterdam: North-Holland.
- _____. 1991b. "Irreversibility, Uncertainty, and Investment," *Journal of Economic Literature* 29 (September): 1110 - 1152.
- _____. 1993a. "A Note on Competitive Investment Under Uncertainty." *American Economic Review* 83 (March): 273 - 277.
- _____. 1993b. "Investments of Uncertain Cost." *Journal of Financial Economics* 34 (August): 53 - 76.
- _____. 1993c. "The Present Value Model of Rational Commodity Pricing." *The Economic Journal* 103 (May): 511 - 530.
- _____. 1993d. "Inventories and the Short-Run Dynamics of Commodity Prices." *RAND Journal of Economics*, forthcoming.

- _____. 1993e. "Sunk Costs and Sunk Benefits in Environmental Policy." 442
 Unpublished working paper, Massachusetts Institute of Technology, May.
- _____, and Daniel L. Rubinfeld. 1991. *Econometric Models and Economic Forecasts*, third edition, New York: McGraw-Hill.
- _____, and Andrés Solimano. 1993. "Economic Instability and Aggregate Investment." *NBER Macroeconomics Annual* 8, 259 - 303.
- Plummer, Mark L., and Richard C. Hartman. 1986. "Option Value: A General Approach." *Economic Inquiry* 24 (July): 455 - 471.
- Quigg, Laura. 1993. "Empirical Testing of Real Option-Pricing Models." *Journal of Finance* 48 (June): 621 - 639.
- Rawlinson, Richard, and Michael E. Porter. 1986. "The Oil Tanker Shipping Industry in 1983." Harvard Business School Case No. 9-384-034, July.
- Roberts, Kevin, and Martin L. Weitzman. 1981. "Funding Criteria for Research, Development, and Exploration Projects." *Econometrica* 49, 1261 - 1288.
- Rodrik, Dani. 1991. "Policy Uncertainty and Private Investment in Developing Countries." *Journal of Development Economics* 36 (October): 229 - 242.
- Rothschild, Michael. 1971. "On the Cost of Adjustment." *Quarterly Journal of Economics* 85 (November): 605 - 622.
- Ruback, Richard S. 1986. "Calculating the Market Value of Riskless Cash Flows." *Journal of Financial Economics* 15, 323 - 339.
- Rubinstein, Mark. 1987. "Derivative Assets Analysis." *Journal of Economic Perspectives* 1, Fall, 73 - 94.
- Rust, John. 1987. "Optimal Replacement of GMS Bus Engines: An Empirical Model of Harold Zurcher." *Econometrica* 55, 999 - 1034.
- _____. 1993. "Dynamic Structural Models: Problems and Prospects. Discrete Decision Processes." In *Advances in Econometrics: Sixth World Congress*, eds. Jean-Jacques Laffont and Christopher Sims. Cambridge, UK: Cambridge University Press, forthcoming.
- Samuelson, Paul A. 1964. "Tax Deductibility of Economic Depreciation to Insure Invariant Valuation." *Journal of Political Economy* 72 (December): 571 - 573.
- _____. 1965. "Rational Theory of Warrant Pricing." *Industrial Management Review* 6, Spring, 41 - 50.

- Sawhill, James W. 1989. "Evaluating Utility Investment Decisions—An Options Approach." M.S. thesis, M. I. T. Sloan School of Management, May.
- Schmalensee, Richard. 1972. "Option Demand and Consumer's Surplus: Valuing Price Changes under Uncertainty." *American Economic Review* 62 (December): 813 - 824.
- 448 Scott, Louis O. 1987. "Option Pricing When the Variance Changes Randomly; Theory, Estimation, and an Application." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22 (December): 419 - 438.
- Siegel, Daniel R., James L. Smith, and James L. Paddock. 1987. "Valuing Offshore Oil Properties with Option Pricing Models." *Midland Corporate Finance Journal* 5, Spring, 22 - 30.
- Slater, L.J. 1960. *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge, U. K.: Cambridge University Press.
- Smets, Frank. 1991. "Exporting versus FDI: The Effect of Uncertainty, Irreversibilities and Strategic Interactions." Working Paper, Yale University.
- Smith, Clifford W., Jr. 1976. "Option Pricing: A Review." *Journal of Financial Economics* 3 (January): 3 - 51.
- Solow, Robert M., James Tobin, Christian von Weizsacker, and Menachem Yaari. 1967. "Neoclassical Growth with Fixed Factor Proportions." *Review of Economic Studies* 33 (April): 79 - 115.
- Spence, A. Michael. 1981. "The Learning Curve and Competition." *Bell Journal of Economics* 12, Spring, 49 - 70.
- Spencer, Barbara, and James Brander. 1992. "Pre-commitment and Flexibility: Applications to Oligopoly Theory." *European Economic Review* 36, 1601 - 1626.
- Stensland, Gunnar, and Dag B. Tjøstheim. 1989. "Optimal Investments Using Empirical Dynamic Programming with Application to Natural Resources." *Journal of Business* 62 (January): 99 - 120.
- _____, and _____. 1991. "Optimal Decisions with Reduction of Uncertainty Over Time—An Application to Oil Production." In *Stochastic Models and Option Values*, eds. D. Lund and B. Øksendal. New York: North-Holland.

- Stibolt, R.D., and John Lehman. 1993. "The Value of a Seismic Option." *Proceedings of Society of Petroleum Engineers*, SPE 25821, 25 - 32.
- Stokey, Nancy L., and Robert E. Lucas, Jr., with Edward C. Prescott. 1989. *Recursive Models in Economic Dynamics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Summers, Lawrence H. 1987. "Investment Incentives and the Discounting of Depreciation Allowances." In *The Effects of Taxation on Capital Accumulation*, ed. Martin Feldstein. Chicago, IL: Chicago University Press.
- Taggart, Robert A. 1991. "Consistent Valuation and Cost of Capital Expressions with Corporate and Personal Taxes." *Financial Management* 20, 8 - 20.
- Tirole, Jean. 1988. *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Tobin, James. 1969. "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory." 444 *Journal of Money, Credit and Banking* 1 (February): 15 - 29.
- Tourinho, Octavio A. 1979. "The Valuation of Reserves of Natural Resources: An Option Pricing Approach." Unpublished Ph. D. dissertation, University of California, Berkeley.
- Triantis, Alexander J., and James E. Hodder. 1990. "Valuing Flexibility as a Complex Option." *Journal of Finance* 45 (June): 549 - 565.
- Trigeorgis, Lenos, and Scott P. Mason. 1987. "Valuing Managerial Flexibility." *Midland Corporate Finance Journal* 5, Spring, 14 - 21.
- Van Wijnbergen, Sweder. 1985. "Trade Reform, Aggregate Investment and Capital Flight." *Economics Letters* 19, 369 - 372.
- Varian, Hal S. 1987. "The Arbitrage Principle in Financial Analysis." *Journal of Economic Perspectives* 1 (Fall): 55 - 72.
- _____. 1991. *Microeconomic Analysis*, third edition. New York: W. W. Norton.
- Weitzman, Martin L. 1970. "Optimal Growth with Scale Economies in the Creation of Overhead Capital." *Review of Economic Studies* 37 (October): 555 - 570.
- _____. 1979. "Optimal Search for the Best Alternative." *Econometrica* 47 (May): 641 - 654.

- _____, Whitney Newey, and Michael Rabin. 1981. "Sequential R&D Strategy for Synfuels." *Bell Journal of Economics* 12, 574 - 590.
- Wey, Lead. 1993. "Effects of Mean-Reversion on the Valuation of Offshore Oil Reserves and Optimal Investment Rules." Unpublished undergraduate thesis, Massachusetts Institute of Technology, May.
- Wiggins, James B. 1987. "Option Values Under Stochastic Volatility." *Journal of Financial Economics* 19, 351 - 372.
- Zeira, Joseph. 1987. "Investment as a Process of Search." *Journal of Political Economy* 95 (February): 204 - 210.

符号表



445 这么厚的一本著作中，包括了许多不同的观念和模型，要想保持全书符号的完全一致和唯一性是根本不可能的。我们尽量保持主要出现在第3章~第9章的核心概念的一致性。即使在这些章节中，也有不少需要标准符号的地方出现了使用上的冲突（如表示贴现率和相关系数）。在这种情形下，不是换为其他陌生的记号，我们冒险地使用了相同的符号，尽管可能会出现歧义。幸运的是，相同的符号并不需要表示相近的意义，因此，在每种情形下，从上下文完全可以分清其代表的含义。

第10章~第12章处理核心理论的推广并讨论了一些应用文献，我们在其中采用了所评述的原始文献中使用的符号，因此，我们前面所使用的符

号有时会表示不同的含义。我们尽量减少这些情况的发生,但是由于标准符号还没有形成,再加上数学表达式中日语汉字的使用,这种问题是不可避免的。

这里为方便读者参考我们的“整体性”记号,即在全书中基本一致的用法,我们列出一个表。其他所有记号都是“区域性”的,仅应用于某一章,甚至某一节或某一小节。它们在不同地方定义了不同的参数或变量;我们在使用这些符号的地方界定其含义。

我们还应当澄清我们的微分符号。对单变量函数,我们一般使用“'”表示微分。例如, $F(V)$ 的微分为 $F'(V), F''(V)$ 等。对双变量或多变量函数,我们利用下标表示相应的偏微分。例如, $F(V, t)$ 的微分为 $F_V(V, t), F_{VV}(V, t), F_t(V, t)$ 等。

446 大写英文字母

- A, B 微分方程解中的积分常数
- C 项目的运营成本
- F 投资机会的价值;更一般地,动态规划中的价值函数(也称为贝尔曼函数)
- I 投资的资本成本(第2章、第5章~第9章);投资增长(第10章~第12章)
- K 资本存量,或者为已装备的(第11章)或者为尚未完成的项目(第10章)
- P 产出价格
- Q 产业产出数量
- T 终止时间
- V 适当资产的价值
- W 企业(第11章)或社会最优(第9章)
- X 特定企业的随机冲击
- Y 产业范围的随机冲击

小写英文字母

- a, b 扩散过程的相关系数
- c 可变产出水平的企业的生产成本函数(第9章)
- d 无限小增量的前缀(如微分 dt)
- m, n 复制无风险资产组合中的空头

p, q	随机游动表达式中的概率
q	托宾 q 值 (第 5 章、第 6 章、第 11 章、第 12 章); 竞争性企业的产出水平 (第 9 章)
dq	泊松跳跃过程的增量 (主要是第 3 章和第 4 章)
r	无风险利率
t	当前时间
u	动态规划理论中的控制变量(第 4 章); 基本泊松跳跃过程的跳跃步长
x	随机过程状态变量的一般记号
dz	标准维纳过程 (布朗运动) 的增量

大写希腊字母

447

Δ	有限小增量的前缀 (如 Δt)
Ω	动态规划中的最终价值函数
Φ	复制 (无风险) 资产组合的价值, 累积概率分布函数

小写希腊字母

α	简单布朗运动的漂移系数, 或者几何布朗运动中的百分比增长率
β	基本二次式中的变量, 其正根和负根分别表示为 β_1 和 β_2
δ	回报不足率或便利收益率
λ	泊松过程的到达速度; 折旧率
η	均值回归速度
μ	CAPM 中风险调整的贴现率
π	利润流量
ϕ	风险的市场价格; 扩散过程中变量的概率密度函数
ρ	动态规划中的内生性贴现率; 相关系数
σ	布朗运动中变动参数
τ	一般时间变量 (主要用于贴现值表达式中的积分变量)

其他记号

E	预期算子
Var	方差算子
Q	基本二次式的表达式

作者索引



- Abel, Andrew B. , 5, 385, 387 - 388, 391 - 392, 419 - 420, 艾贝尔, 安德鲁 B.
- Abramowitz, Milton, 163, 阿布拉莫维茨, 米尔顿
- Aitchison, J. , 72, 艾奇逊, J.
- Aizenman, Joshua, 315, 埃泽恩曼, 乔舒亚
- Akerlof, George, A. , 8, 249, 阿克洛夫, 乔治 A.
- Appelbaum, Elie, 315, 阿佩鲍姆, 伊利
- Arnold, Ludwig, 88, 阿诺德, 路德维格
- Arrow, Kenneth J. , 126, 314, 392, 426, 阿罗, 肯尼思, J.
- Arthur, W. Brian, 16, 阿瑟, W. 布赖恩

- Baldwin, Carliss Y., 352, 鲍德温, 卡利斯, Y.
 Baldwin, Richard, 244, 鲍德温, 理查德
 Bar-Ilan, Avner, 351, 巴-艾兰, 阿夫
 Becker, Gary S., 23, 贝克尔, 加里, S.
 Beddington, John R., 92, 伯丁顿, 约翰, R.
 Bellman, Richard, 125, 贝尔曼, 理查德
 Bentolila, Samuel, 244, 本特利拉, 萨默尔
 Bernanke, Ben S., 40, 174, 伯奈克, 本, S.
 Bernstein, Peter L., 126, 伯恩斯坦, 彼得, L.
 Bertola, Giuseppe, 145, 212, 244, 359, 382, 392, 424, 427, 伯特拉,
 朱瑟皮
 Bizer, David S., 427, 毕泽, 戴维, S.
 Black, Fischer, 126, 布莱克, 费希尔
 Blanchard, Olivier J., 419 - 420, 布兰查德, 奥利弗, J.
 Bliss, Christopher J., 206, 布里斯, 克里斯托弗, J.
 Bodie, Zvi, 225, 博迪, 兹维
 Brander, James, 315, 布兰德, 詹姆斯
 Breal, Richard A., 54 - 55, 116, 148, 布雷利, 理查德
 Brennan, Michael J., 179, 212, 224 - 225, 242, 353 - 354, 392, 426,
 布伦南, 迈克尔
 Brock, William A., 88, 174, 256, 布洛克, 威廉, A.
 Brown, J. A. C., 72, 布朗, J.A.C.
 Brown, Robert, 63, 布朗, 罗伯特

 Caballero, Ricardo, J., 277, 280, 382, 392, 423 - 424, 427, 卡巴利罗,
 里卡多, J.
 Caplin, Andrew, 425, 卡普林, 安德鲁
 Carr, Peter, 244, 卡尔, 彼得
 Carrier, George F., 353, 卡里尔, 乔治, F.
 Chirinko, Robert, 419, 奇林科, 罗伯特
 Chow, Gregory C., 88, 乔, 格雷戈里, C.
 Clark, Colin W., 92, 克拉克, 柯林斯, W.

- Copeland, Tom, 55, 科普兰, 汤姆
 Cox, D. R., 60, 68, 88, 考克斯, D.R.
 Cox, John C., 55, 115, 126, 152, 157, 174, 考克斯, 约翰, C.
 450 Craine, Roger, 392, 克雷恩, 罗杰
 Cukierman, Alex, 40, 174, 丘吉尔曼, 亚历克斯
- David, Paul A., 16, 戴维, 保罗
 Davis, Steven J., 268, 戴维斯, 斯蒂文, J.
 Debreu, Gerard, 314, 德布鲁, 杰拉德
 Demers, Michel, 174, 德默斯, 米歇尔
 Dertouzas, Michael, 7, 德陶查斯, 迈克尔
 Dickens, R. N., 426, 迪肯斯, R.N.
 Dickey, David A., 77, 迪基, 戴维, A
 Dixit, Avinash K., 68, 88, 126, 161, 174, 188, 197, 218, 223, 242 -
 243, 244, 256, 280, 294, 314, 373, 378, 393, 迪克西特, 阿维纳什
 Dothan, Michael U., 88, 126, 174, 多珊, 迈克尔, U.
 Dreyfus, Stuart E., 126, 德赖弗斯, 斯图尔特, E.
 Duffie, Darrell, 106, 124, 126, 147-148, 174, 180, 达菲, 达雷尔
 Dumas, Bernard, 244, 280, 393, 杜马斯, 伯纳德
 Dutta, Prajit K., 315, 达特阿, 普拉奇特, K.
- Eberly, Janice C., 385, 387-388, 391-392, 425, 埃伯利, 贾尼丝, C.
 Edleson, Michael, 280, 埃德尔森, 迈克尔
 Einstein, Albert, 63, 爱因斯坦, 阿尔伯特
 Ekern, S., 426, 伊肯, S.
- Fasano, A., 212, 法桑奥, A.
 Feller, William, 60, 69, 88, 费勒, 威廉
 Feynman, Richard P., 123, 费曼, 理查德, P.
 Fine, Charles H., 244, 法恩, 查尔斯
 Fisher, Anthony C., 426, 费希尔, 安东尼, C.
 Fleming, Wendell H., 106, 126, 弗莱明, 温德尔, H.

- Freund, Robert M., 244, 弗洛伊德, 罗伯特, M.
 Fudenberg, Drew, 313, 富登伯格, 德鲁
 Fuller, Wayne A., 77, 富勒, 韦恩

 Geske, Robert, 244, 353, 格斯奇, 罗伯特
 Gibson, Rajna, 179, 212, 吉布森, 拉基娜
 Gilbert, Richard J., 9, 吉尔伯特, 理查德, J.
 Godl, S., 92, 戈尔, S.
 Gencalves, Franklin D., 238, 冈卡弗斯, 富兰克林, D.
 Gould, John P., 392, 古尔德, 约翰, P.
 Grossman, Gene M., 352, 格罗斯曼, 基因, M.
 Grossman, Sanford J., 424, 格罗斯曼, 桑福德, J.
 Guenther, Ronald B., 212, 353, 冈瑟, 罗纳德

 Haberman, Richard, 353, 哈伯曼, 理查德
 Haliwanger, John C., 268, 霍尔蒂万格, 约翰, C.
 Hamermesh, Daniel S., 24, 哈默马什, 丹尼尔
 Hanemann, W. Michael, 426, 汉尼曼, W. 迈克尔
 Harris, Milton, 126, 哈里斯, 米尔顿
 Harrison, J. Michael, 88, 126, 161, 180, 315, 373, 390, 393, 哈里森,
 J. 迈克尔
 Hartman, Richard, 392, 426, 哈特曼, 理查德
 Hassett, Kevin A., 304, 309, 315, 412, 哈希特, 开尔文
 Hawkins, Gregory D., 332, 霍金斯, 格雷戈里, D.
 Hayashi, Furnio, 392, 林文雄

 He, Hua, 244, 何华
 Hendricks, Darryll, 426, 亨德里克斯, 达里尔
 Henry, Claude, 426, 亨利, 克劳德
 Herbelot, Olivier, 406, 409 - 411, 426, 赫尔伯罗特, 奥利弗
 Hodder, James E., 244, 霍德, 詹姆斯, E.
 Holmes, Oliver Wendell Sr., 205, 霍姆斯, 奥利弗, 温德尔

Huang, Chi-fu, 116, 124, 126, 147, 174, 黄志
Hull, John, 55, 88, 126, 157, 159, 174, 353, 霍尔, 约翰

Ingersoll, Jonathan E., 50, 115, 英格索尔, 乔纳森, E.

Jacoby, Henry D., 426, 雅各比, 亨利

Jarrow, Robert A., 55, 126, 174, 加罗, 罗伯特, A.

Johnson, Claes, 212, 244, 约翰逊, 克莱斯

Jorgenson, Dales, 5, 145, 392, 乔根森, 戴尔

Judd, Kenneth L., 212, 251, 朱迪, 肯尼思, L.

451 Kalish, Shlomo, 339, 卡利什, 施洛莫

Kamien, Morton I., 126, 卡米恩, 默顿, I.

Karatzas, Ioannis, 88, 123, 188, 卡拉扎斯, 约安尼斯

Karlin, Samuel, 60, 88 - 89, 161, 315, 351, 卡林, 萨默尔

Kester, W. Carl, 9, 55, 凯斯特, W. 卡尔

Kogut, Bruce, 244, 科格特, 布鲁斯

Koller, Tim, 55, 科勒, 蒂姆

Kolstad, Charles D., 426, 科尔斯塔德, 查尔斯, D.

Kopcke, Richard W., 419, 科佩基, 理查德, W.

Kreps, David, 126, 180, 克雷普斯, 戴维

Krugman, Paul R., 244, 克鲁格曼, 保罗, R.

Krutilla, John V., 426, 克鲁蒂拉, 约翰, V.

Krylov, N.V., 106, 126, 克里洛夫, N.V.

Kulatilaka, Nalin, 244, 库拉蒂拉卡, 纳林

Kushner, Harold J., 88, 库什纳, 哈罗德

Kydland, Finn E., 352, 基德兰德, 芬恩, E.

Lam, Pok-sang, 425, 拉姆, 博克桑

Laroque, Guy, 424, 拉洛克, 盖伊

Laughton, David G., 426, 劳顿, 戴维, G.

Leahy, John, 280, 292, 314, 利希, 约翰,

- Lee, John W. , 212, 353, 李, 约翰, W.
 Lehman, John, 426, 莱曼, 约翰
 Lieberman, Marvin B. , 339, 利布曼, 马文, B.
 Lim, Chin, 315, 利姆, 钦
 Lippman, Steven A. , 280, 李普曼, 斯蒂文, A.
 Litzenberger, Robert H. , 116, 124, 126, 147, 174, 莱茨伯格, 罗伯特, H.
 Lohrenz, John, 426, 洛伦兹, 约翰
 Lucas, Robert E. , 102, 126, 280, 286, 314, 392, 卢卡斯, 罗伯特, E.
 Lund, Diderik, 78, 426, 伦德, 迪德里克
- MacKie-Mason, Jeffrey K. . 315, 352, 麦凯-梅森, 杰弗里, K.
 Majd, Saman, 150, 315, 328, 340, 351, 马伊德, 萨曼
 Maliaris, A. G. , 88, 256, 马利亚里斯, A.G.
 Manne, Alan S. , 393, 曼伊, 艾伦, S.
 Manthy, Robert S. , 77, 曼塞, 罗伯特, S.
 Marcus, Alan J. , 211, 244, 马库斯, 艾伦, J.
 Marglin, Stephen, 145, 马戈林, 斯蒂芬
 Marion, Nancy, 315, 马里恩, 南希
 Martzoukos, Spiros H. , 426, 马茨奥科斯, 斯皮罗斯, H.
 Mason, Scott, 55, 174, 梅森, 斯科特
 May, Robert M. , 92, 梅, 罗伯特, M.
 McCray, Arthur W. , 398, 麦克雷, 阿瑟, W.
 McDonald, Robert, 135 - 136, 162, 173, 186, 211 - 212, 234, 麦克唐纳, 罗伯特
 Merton, Robert C. , 55, 88, 92, 126, 173 - 174, 默顿, 罗伯特, C.
 Metcalf, Gilbert, 304, 309, 315, 412, 麦特考夫, 吉尔伯特
 Miller, D. R. , 60, 68, 88, 米勒, D. R.
 Modest, David M. , 211, 莫德斯特, 戴维, M.
 Morck, Randall, 426, 莫克, 兰德尔
 Mossin, Jan, 243, 莫辛, 简
 Mussa, Michael, 314, 马萨, 迈克尔

Myers, Stewart C., 9, 54 - 55, 116, 148, 173, 315, 351, 迈尔斯, 斯图尔特, C.

Newbery, David, 314, 纽伯里, 戴维

Newey, Whitney, 352, 纽伊, 惠特尼

Nickell, Stephen J., 5, 174, 392, 尼克尔, 斯蒂芬, J.

Nordhaus, William D., 413, 427, 诺德豪斯, 威廉, D.

Norman, Victor, 238, 诺曼, 维克多

Okdendal, Bernt, 426, 奥登达尔, 伯恩特

Osband, Kent, 280, 奥斯班德, 肯特

Paddock, James L., 396 - 397, 400, 402, 405, 425, 帕多克, 詹姆斯, L.

Pakes, Aricl, 424, 427, 帕克斯, 阿里尔

Pearson, Carl E., 163, 353, 皮尔逊, 卡尔, E.

452 Pindyck, Robert S., 9, 77, 92, 150, 174, 179, 211, 225, 244, 277, 280 - 281, 328, 339 - 340, 347, 359, 366, 392, 404, 413, 423, 424, 平迪克, 罗伯特, S.

Plummer, Mark L., 426, 普卢默, 马克, L.

Porter, Michael E., 238, 波特, 迈克尔, E.

Prescott, Edward C., 102, 126, 280, 286, 314, 352, 普雷斯科特, 爱德华, C.

Primicerio, M., 212, 普赖米塞里奥, M.

Quigg, Laura, 426, 奎格, 劳拉

Rabin, Michael, 352, 雷宾, 迈克尔

Rawlinson, Richard, 238, 罗林森, 理查德

Richter-Dyn, N., 92, 里克特-戴恩, N.

Rishel, Raymond W., 106, 126, 里谢尔, 雷蒙德, W.

Rob, Rafael, 294, 314, 罗布, 拉斐尔

Roberts, Kevin, 352, 罗伯特, 开尔文

- Rodrik, Dani, 315, 罗德里克, 丹尼
- Rosanski, Victor, 225, 罗珊斯基, 维克多
- Ross, Stephen A., 50, 115, 126, 152, 罗斯, 斯蒂芬, A.
- Rothschild, Michael, 174, 381, 罗思柴尔德, 迈克尔
- Ruback, Richard S., 55, 鲁巴克, 理查德
- Rubinfeld, Danniell L., 77, 404, 鲁宾菲尔德, 丹尼尔, L.
- Rubinstein, Mark, 55, 126, 157, 174, 鲁宾斯坦, 马克
- Rudd, Andrew, 55, 126, 174, 拉德, 安德鲁
- Rumelt, R. P., 280, 鲁梅尔特, R. P.
- Rust, John, 424, 427, 拉斯特, 约翰,
- Rustichini, Aldo, 315, 拉斯蒂奇尼, 奥尔多
- Samuelson, Paul A., 126, 137, 207, 萨缪尔森, 保罗, A.
- Sawhill, James W., 51, 索希尔, 詹姆斯, W.
- Schmalensee, Richard, 426, 施马伦斯, 理查德
- Scholes, Myron, 126, 斯科尔斯, 迈伦
- Schwartz, Eduardo S., 179, 212, 224, 242, 353 - 354, 392, 426, 施瓦茨, 埃杜瓦多
- Schwartz, Nancy, 126, 施瓦茨, 南希
- Scott, Louis O., 159, 斯科特, 路易斯, O.
- Sellke, Thomas M., 393, 塞尔奇, 托马斯, M.
- Shapiro, Carl, 352, 夏皮罗, 卡尔
- Shastri, Kuldeep, 353, 沙斯特里, 库尔迪普
- Shreve, Steven E., 88, 123, 188, 施里夫, 斯蒂芬, E.
- Sichel, Daniel E., 427, 西奇尔, 丹尼尔, E.
- Siegel, Daniel R., 135 - 136, 162, 173, 186, 211 - 212, 234, 396 - 397, 400, 402, 405, 425, 西格尔, 丹尼尔, R.
- Slater, L. J., 163, 斯莱特, L.J.
- Smets, Frank, 309, 315, 斯梅特, 弗兰克
- Smith, Clifford W., Jr., 55, 174, 396, 397, 400, 402, 405, 425, 史密斯, 克里福德, W, Jr.
- Solimano, Andres, 423, 索里马诺, 安德烈斯

Solow, Robert M., 206, 索洛, 罗伯特, M.
 Soss, Neal M., 24, 索斯, 尼尔, M.
 Spence, Barbara, 315, 斯潘塞, 巴巴拉
 Stangeland, David, 426, 斯坦格兰, 戴维
 Stegun, Irene A., 163, 斯蒂冈, 艾琳, A.
 Stensland, Gunnar, 426, 斯登斯兰德, 冈纳
 Sterling, Arlie G., 238, 斯特林, 阿里, G.
 Stibolt, R. D., 426, 斯蒂博尔特, R.D.
 Stiglitz, Joseph E., 174, 314, 斯蒂格利茨, 约瑟夫, E.
 Stokey, Nancy L., 102, 126, 斯托基, 南希, L.
 Strandenes, Siri Pettersen, 238, 斯特兰德尼斯, 西里, 彼得森
 Strange, William C., 351, 斯特兰奇, 威廉, C.
 Summers, Lawrence H., 7, 萨默斯, 劳伦斯, H.

Taggart, Robert A., 54, 塔格特, 罗伯特, A.
 Taksar, Michael I., 390, 393, 塔格萨, 迈克尔, I.
 Taylor, Allison J., 393, 泰勒, 阿里森, J.
 Taylor, Howard M., 60, 88-89, 161, 315, 351, 泰勒, 霍华德, M.
 Teplitz-Sembitzky, Withold, 426, 特普里茨-塞姆比茨基, 威恩霍尔德
 Tirole, Jean, 9, 313, 泰勒尔, 琼
 458 Tjostheim, Dag B., 426, 乔泰默, 戴格, B.
 Tobin, James, 5, 146, 206, 托宾, 詹姆斯
 Tourinho, Octavio A., 173, 425, 图林霍, 奥克塔维奥, A
 Triantis, Alexander J., 244, 特里安蒂斯, 亚历山大, J.
 Trigeorgis, Lenos, 55, 特里乔治斯, 伦诺斯

Van Wijnbergen, Sweder, 244, 范·威金伯根·斯威德
 Varian, Hal S., 55, 126, 197, 瓦里安, 哈尔, S.
 Von Weizacker, Christian, 206, 范·韦扎克, 克里斯蒂安
 Weitzman, Martin L., 352, 393, 魏茨曼, 马丁, L.
 Wey, Lead, 404, 韦, 利德
 White, Alan, 159, 353, 怀特, 艾伦

Wiener, Norbert, 63, 维纳, 诺伯特

Wiggins, James B., 159, 韦金斯, 詹姆斯, B.

Yaari, Menachem, 206, 亚里, 梅纳切姆

Zeira, Joseph, 352, 蔡拉, 约瑟夫



主题索引

- 455 Abandonment, 14, 16, 111, 176, 214 -
215, 217, 239, 250, 336, 放弃
Abandonment cost, 226, 放弃的成本
Abandonment option, 226, 放弃期权
Abandonment threshold, 218, 222, 233,
放弃的临界值
Ability to delay, 8, 拖延能力
Absorbing barrier, 162, 190, 吸收壁
Activation decision, 262, 激化决策
Active firm, 262, 活动企业
value of, 226, 254, 活动企业的价值
Actual operation, cost of, 229, 实际经营的成本
Adjustment costs, 174, 294, 381, 384,
391 - 392, 调整成本

- classification of, 383, 调整成本的分类
convex, 381, 383 - 384, 凸调整成本
quadratic, 384, 齐次调整成本
- Aggregate investment, 419, 421, 总投资
- Aggregate uncertainty, 248 - 249, 253, 261, 281, 总的不确定性
- Aggregation, 421, 汇总
- Agricultural policies, 297, 农业政策
- Agricultural price supports, 294, 296, 农业价格支持
- Agricultural production, 211, 农业生产
- Air pollution, 395, 空气污染
- Allocation of risk, 296, 风险配置
- Allowance, price of, 406, 排放许可的价格
- Allowance price, 409, 许可证补贴
- Allowances, 22, 405, 许可、津贴
- American call option, 186, 397, 美式买入期权
- Antitrust, 293, 反托拉斯
- Antitrust policy, 20, 292, 反托拉斯政策
- Arbitrage, 151, 套利
- Arrow-Debreu framework, 283, 阿罗-德布鲁框架
- AR (1) process, 62, 76, 一阶自回归过程
- Asset value, 105, 资产价值
- Asymmetric effects of uncertainty, 251 不确定性的不对称影响
- Asymmetric information, 249, 294, 不对称信息
- Asymmetric learning, 352, 不对称学习
- Asymmetric price process, 250, 不对称价格过程
- Autoregressive process, first-order, 62, 76, 自回归过程, 一阶
- Average cost, 219, 平均成本
- Average q , 146, 419, 平均的 q 值
- Average realized return, 422, 已实现的平均回报
- Average variable cost, 224, 263, 292, 平均可变成本
- Bad news principle, 40, 坏消息原则

- Bang-bang solution, 329, 砰砰解
- Barrier control, 362, 389 - 390, 393, 壁控制
- Barriers, 83, 壁
- Becoming active, incremental, value of, 219, 变为活动企业的价值增值
- Bellman equation, 100 - 101, 103, 105, 109, 122, 126, 128, 130, 140, 152, 171, 285, 330, 385, 389, 414, 贝尔曼方程
 recursive, 102, 递归的贝尔曼方程
- Bellman function, 360, 贝尔曼函数
- Bellman value function, 285, 289, 贝尔曼价值函数
- Binomial approximation, 273, 二项逼近
- Binomial distribution, 62, 69 - 70, 二项分布
- Binomial random variable, 69, 二项随机变量
- Black-Scholes formula, 173, 186, 布莱克-斯科尔斯公式
- Boundary conditions, 107, 141, 353, 边界条件
- Brownian motion, 12, 59, 63, 70, 169, 272 - 273, 373, 399, 布朗运动
 geometric, 71 - 72, 81, 115, 136 - 137, 168, 178, 186, 207, 215, 230, 238, 253, 264, 268, 278, 284, 297, 304, 310, 323, 329, 340, 406, 几何布朗运动
 with drift, 65, 88, 带漂移的布朗运动
- Brownian motions, correlated, 82, 布朗运动, 相关的
- Call option, 6, 30, 149, 174, 397, 看涨期权
 American, 186, 397, 美式看涨期权
 European, 186, 211, 397, 欧式看涨期权
 financial, 149, 157, 金融看涨期权
 perpetual, 137, 永久看涨期权
- Capacity, 51, 生产能力
- Capacity choice, 357, 生产能力选择
- Capacity constraint, 340, 生产能力限制 (约束)
- Capacity expansion, 359, 377, 生产能力扩张
- Capital Asset Pricing Model, 54, 115, 118, 148, 178, 250, 346, 419, 资本资产定价模型

- Capital markets, 147, 资本市场
- Capital outflows, 244, 资本流出
- Capital stock, 357, 股本
- Capital-output ratio, 422, 资本—产出比率
- Carbon tax, 395, 碳税
- Ceiling price, 299, 价格上限, 最高价格
- Central Limit Theorem, 64, 中心极限定理
- Chain rule for differentiation, 80, 链微分法
- Clean Air Act, 22, 395, 405 - 406, 426, 空气清洁法
- Coal, 煤
- high-sulfur, 406 - 407, 高硫煤
 - low-sulfur, 406 - 408, 低硫煤
- Coal markets, 406, 煤炭市场
- Cobb-Douglas production function, 196, 198, 372, 柯布—道格拉斯生产函数
- Coefficient of correlation, 65, 相关系数
- Commodities, 147, 商品
- Commodity price, 74, 179, 商品价格
- Common Agricultural Policy, 294, 共同农业政策
- Comparative statics, 157, 172, 221, 静态比较
- Competitive equilibrium, 18, 20, 268, 286, 292, 竞争性均衡
- Competitive firm, 253, 256, 258, 竞争性企业
- entry decision of, 254, 竞争性企业进入决策
- Competitive industry, 261, 280, 竞争性产业
- required return for, 261, 竞争性企业所需回报
- Competitive industry equilibrium, 258, 竞争性产业的均衡
- Component of value, 价值的成分
- fundamental, 181 - 182, 基本价值的成分
 - speculative, 181, 投机价值的成分
- Compound options, 244, 320, 混合期权
- Confidence interval, 66, 74, 351, 400, 置信区间
- Confluent hypergeometric function, 163, 404, 合流超几何函数

- 457 Constant returns to scale, 423, 规模报酬不变
- Construction cost uncertainty, 345, 建造成本的不确定性
- Construction inputs, 346, 建造投入
- Construction time flexibility, 337, 建造时机的灵活性
value of, 337, 建造时机灵活性的价值
- Consumer durables, 424 - 425, 耐用消费品
- Contingent claims, 147, 或有债权
- Contingent claims analysis, 59, 93 - 94, 114, 126, 147, 174, 248, 255, 329, 367, 或有债权分析
- Contingent claims approach, 367, 375, 或有债权方法
- Contingent claims valuation, 120, 179, 或有债权价值
- Continuation, 103 - 104, 连续, 延拓
- Continuation region, 109, 128, 130, 140, 延拓区域
- Continuation value, 100, 延拓值
- Continuous investment, 328, 连续投资
- Continuous sequential investment, 339, 连续的序列投资
- Contraction mapping, 137, 压缩映射
- Control variable, 99, 控制变量
- Controlled diffusion process, 347, 受控扩散过程
- Convenience yield, 114, 178 - 179, 198, 206, 208, 212, 225, 334, 367, 370, 便利收益
marginal, 179, 边际便利收益
- Convergence condition, 270, 收敛条件
- Convex adjustment costs, 381, 383 - 384, 凸调整成本
- Copper, price of, 77, 264, 266, 铜价
- Copper industry, 293, 223, 264, 铜业
- Copper mine, 225, 铜矿开采
- Copper prices, 228, 铜价
- Copper producers, 265, 铜生产者
- Copper production facility, 224, 铜生产设备
- Correlated Brownian motions, 82, 相关的布朗运动
- Cost, 46, 成本

- of abandonment, 233, 放弃的成本
- of actual operation, 229, 实际经营的成本
- of adjustment, 419, 调整的成本
- of adjustment function, 382, 调整成本函数
- of capital, 419 - 420, 资本的成本
- of completion, 347, 竞争的代价
- of compliance, 407, 执行成本
- of firing, 230, 雇用成本
- of investment, 233, 投资成本
- of mothballing, 230, 后备成本
- of operation, 233, 经营成本
- of reactivation, 230, 恢复成本
- of scrapping, 230, 废弃成本
- of site restoration, 230, 场地恢复成本
- Cost uncertainty, 207, 345, 成本的不确定性
- Costless suspension, 234, 无成本拖延
- Cost-benefit analysis, 395, 413, 成本—收益分析
- Covariance, 65, 182, 协方差
- Critical cost to completion, 350, 竞争的临界成本
- Critical cutoff value, 329, 332, 临界终止价值
- Critical price, 193, 临界价格
- Critical thresholds, 238, 临界值
- Critical value, 140, 142, 152, 155, 157, 165, 临界价值
- Crude oil, price of, 77, 原油价格
- Cumulative output, 340, 累积性产出
- Cumulative production, 342, 累积生产
 - shadow value of, 344, 累积生产的影子价值
- Currently active firms, number of, 251, 当前活跃的企业, 数目

- Decay, exponential, 374, 指数衰减
- Deep in money, 13, 34, 实值很大
- Delay, 8, 拖延

- Delivery lags, 419 - 420, 传送时滞
- Demand, 277, 需求
- Demand for electricity, 426, 需求弹性
- Demand function, 178, 310, 需求函数
- Demand growth uncertainty, 51, 需求增长的不确定性
- Density function, 299, 密度函数
- Depletion, 399, 损耗
- 458 Depreciating project, 199, 折旧项目
- Depreciation, 5, 111, 177, 199 - 201, 204, 207, 374, 折旧
 economic, 207, 经济折旧
- Developed reserve, value of, 238, 已开发油田的价值
- Development, 22, 开发
- Development cost, 402, 开发成本
- Differential, 79 - 80, 微分
- Diminishing returns, 359, 报酬递减
- Diminishing returns to scale, 357, 规模报酬递减
- Discount rate, 5, 55, 贴现率
 risk-adjusted, 152, 178, 215, 323, 经风险调整的贴现率
- Discrete-time process, 61, 离散时间过程
- Distribution of firms, 272, 企业的分布
- Dividend, 178, 股息、股利、分红
- Dividend rate, 149, 股息率、股利率
- Divorce, 24, 离婚
- Drift, estimation of, 238, 变动估计
- Drift rate, 71, 变动率
- Duality property, 197, 二元性财产
- Dumping, 21, 292, 倾销
- Dynamic games, 310, 动态博弈
- Dynamic hedging strategy, 12, 43, 180, 367, 动态套利策略
- Dynamic portfolio, 117, 121, 147, 150, 178, 348, 动态投资组合
- Dynamic programming, 7, 12, 23, 33, 59, 93, 95, 120, 122, 125 -
 126, 137, 140, 148, 171, 185, 248, 255, 285, 330, 359, 374,

- 385, 393, 424, 动态规划
fundamental equation of, 12, 动态规划的基本方程
infinite-horizon, 126, 无限期限的动态规划
recursive, 126, 递归动态规划
Dynamics of q , 390, 动态的 q 值
- Econometric models, 419, 421, 计量经济模型
Economic depreciation, 207, 经济贬值
Economic obsolescence, 206, 经济退化
Economies of scale, 54, 规模经济
Elasticity of demand, 250, 需求弹性
Electric utility, 22, 405, 426, 电力设施
Electric utility industry, 22, 51, 394, 电力产业
Emission allowances, 405 - 406, 排放许可
Employment, 15, 268, 就业
Employment decisions, 244, 就业决策
Endogenous price process, 291, 内生性定价过程
Energy conservation, 411 - 412, 能源储备
 residential, 411, 居住用能源储备
Energy paradox, 412, 能源代理
Energy-saving investment, 412, 节约能源的投资
Entry, 16, 213, 215, 251, 254, 257, 进入
Entry and exit costs, 223, 进入与退出成本
Entry barriers, 267, 292 - 293, 进入壁垒
Entry decision, 254, 270, 291, 进入决策
Entry price, 256, 进入价格
Entry threshold, 262, 264, 286, 297, 进入阈值
Envelope theorem, 288, 包络定理
Environmental policy, 22, 395, 412, 426, 环境政策
Equilibrium, 253, 256, 261, 263, 均衡
 long-run, 276, 长期均衡
 stationary, 276, 平稳均衡

- Equivalent risk-neutral valuation, 152, 181 - 182, 197, 289, 等价于风险中性的估价
- European call option, 186, 211, 397, 欧式看涨期权
- European Common Agricultural Policy, 296, 欧洲共同农业政策
- Event, 168, 173, 事件
- Exchange rates, 244, 汇率
- Exercise price, 9, 400, 执行价格
- Exit, 16, 213, 215, 250, 261, 退出
- Exit threshold, 262, 264, 297, 退出阈值
- Expected cost, 347, 预期成本
- Expected present values, 315, 预期现值
- Expected rate of capital gain, 149, 172, 资本利得预期回报率
- 459 Expected rate of return, risk-adjusted, 148, 165, 预期报酬率, 经风险调整的
- Exponential decay, 200, 205, 374, 指数型衰减
- Exponential distribution, 275, 299, 373, 指数分布
- Externality, 295, 外在性
- Feynman-Kac formula, 123, 费曼-卡克公式
- Financial call option, 6, 9, 149, 157, 金融买入期权
- Financial options, 10, 30, 55, 金融期权
- Finite difference method, 331, 342, 353, 有限微分方法
- Firing, cost of, 230, 解雇成本
- Firing costs, 384, 解雇成本
- Firm-specific, 8, 特定企业
 - demand shocks, 250, 特定企业的需求冲击
 - shock, 251, 278, 特定企业的冲击
 - uncertainty, 248, 251, 267, 277, 278, 281, 特定企业的不确定性
- Fixed cost, 固定成本
 - stock, 383, 389, 固定成本存量
 - flow, 383, 388, 固定成本流量
- Fixed point, 253 - 254, 261, 263, 284, 287, 定点 (不动点)
- Fixed-point process, 257, 不动点过程

- Flexibility, 52, 54, 灵活性
 incremental value of, 337, 灵活性增加的价值
 value of, 315, 337, 灵活性的价值
- Flexibility of operation, 195, 经营的灵活性
- Flexibility option, 29, 灵活性选择权
- Flexible capital, 244, 可变资本
- Flow cost, 186, 流动成本
- Flow fixed cost, 383, 388, 流量固定成本
- Flue gas desulfurizers, 405, 燃气低硫化
- Follower, 310, 追随者
- Forecast, 66, 预测
- Free boundary, 109, 130, 141, 209, 331, 341, 348, 自由边界
- Free-boundary problem, 109, 212, 389, 自由边界问题
- Fuel prices, 52, 燃油价格
- Functional equation, 102, 功能性方程
- Fundamental component of value, 181 - 182, 价值的基本成分
- Fundamental quadratic, 142 - 143, 182, 210, 255, 269, 286, 323, 349, 358, 363, 基本二次型
- Fundamental quadratic equation, 180, 基本二次方程
- Fundamentals, 181, 基本
- Futures market, 29, 期货市场
- Futures price, 29, 期货价格
-
- Gamma function, 92, 伽玛函数
- Global warming, 395, 全球预警
- Government budget, 297, 政府预算
- Government policies, 249, 政府政策
- Government purchases, 297, 政策采购
- Government regulations, 346, 政府管制
- Great Depression, 424, 大萧条
- Greenhouse gas, 413, 温室气体
- Gross investment, 374, 381, 总投资

Growth function, 91, 增长函数

Gulf of Mexico, 403, 墨西哥湾

High-order contact, 109, 高阶合约

High-sulfur coal, 406 - 407, 高硫煤

Hiring and firing costs, 244, 雇用和解雇成本

Hurdle rate, 7, 最低预期回报率

Hysteresis, 16 - 17, 滞后作用

Idle firm, value of, 226, 理想企业的价值

Idle state, 231, 理想状态

Imperfect competition, 248, 不完全竞争

Import tariff, 296, 进入关税

Import-export choices, 244, 进出口选择

Impulse control, 393, 脉冲控制

⁴⁶⁾ In the money, 13, 30, 402, 408, 410, 实值

Inactive firm, 262, 不活动的企业

Inada condition, 366, Inada 条件

Increasing returns, 358, 377, 报酬递增

Incremental investment, 320, 357, 累计投资

Incremental value of flexibility, 337, 灵活性的累加价值

Independent increments, 63, 68, 74, 独立增量

Industrial organization, 293, 产业组织

Industry demand, 277, 288, 产业需求

Industry demand curve, 297, 产业需求曲线

Industry demand shocks, 250, 产业需求冲击

Industry equilibrium, 248, 254, 261, 264, 270, 272, 277, 281, 283, 292, 297, 产业均衡

Industry output, 284, 产业产出

Industry supply curve, 252, 产业供给曲线

Industry-specific, 8, 特定产业

Industry-wide shock, 251, 278, 产业范围内的冲击

- Industry-wide uncertainty, 248, 251, 253, 277 - 278, 产业范围内的不确定性
- Inertia, 292, 标准, 惯性
- Inflation, 5, 通货膨胀
- Information, 136, 信息
- Input cost uncertainty, 46, 346 - 347, 投入品成本的不确定性
- Input demand function, 196, 投入品需求函数
- Instantaneous control, 393, 瞬时控制
- Instantaneous profit function, 196, 瞬时利润函数
- Instantaneous supply function, 196, 瞬时供给函数
- Interest rate uncertainty, 48, 利率的不确定性
- Interest rates, 13, 48, 利率
- International competition, 294, 国际竞争
- Intrinsic value, 37, 内在价值
- Inventory, 212, 存货
- Inverse demand curve, 251, 253, 267, 284, 反需求曲线
- Inverse demand function, 178, 反需求函数
- Invest, 239, 投资
- Investing, value of, 258, 投资的价值
- Investment, 3, 230, 269, 投资
- aggregate, 421, 总投资
 - aggregate, 419, 总投资
 - incremental, 21, 累加投资
 - sectoral, 419, 部门投资
 - sequential, 21, 序列投资
- Investment demand curve, 388, 投资需求曲线
- Investment demand function, 391, 投资需求函数
- Investment model, neoclassical, 145, 新古典投资模型
- Investment opportunity, 9, 30, 投资机会
- value of, 137, 139, 142, 152, 154, 156, 164, 337, 346, 投资机会的价值
- Investment tax credit, 304, 投资税收减免

- Investment theory, neoclassical, 144, 174, 新古典投资理论
- Investment threshold, 201, 218, 233, 364, 368, 422, 投资阈值
- Investments as options, 55, 作为期权的投资
- Investment-to-GDP ratio, 422, 投资占 GDP 的比率
- Investment-to-output ratio, 422, 投资与产出比率
- Irreversibility, 8, 294, 383, 388 - 389, 392, 419, 不可逆性
- Irreversible, 3, 8, 不可逆的
- Ito process, 71, 85, 106, 403, 伊藤过程
- Ito's Lemma, 59 - 60, 79 - 81, 87, 106, 109, 116, 122, 140, 151, 170 - 171, 180 - 181, 185, 198, 199, 203, 208, 285, 305, 316, 363, 367, 386, 389, 伊藤引理
- Jensen's inequality, 49, 80 - 81, 98, 199, 詹森不等式
- Jorgensonian criterion, 154, 乔根森标准
- Jorgensonian investment rule, 145, 乔根森投资规则
- Jorgensonian user cost, 145, 乔根森使用者成本
- Jump process, 85, 112, 167, 173, 354, 跳跃过程
- mixed Brownian-motion, 85, 混合跳跃过程的布朗运动
- 461 Jumps, 85, 跳跃
- Kink, 388, 弯曲, 曲折; 扭折; 扭结
- at zero, 384, 在零点的弯曲
- Kolmogorov backward equation, 90, 柯尔莫哥洛夫向后方程
- Kolmogorov equation, 60, 84, 88, 272, 351, 柯尔莫哥洛夫方程
- Kolmogorov forward equation, 89 - 91, 柯尔莫哥洛夫向前方程
- Kuhn-Tucker conditions, 361, 库恩-塔克条件
- Kummer's Equation, 163, Kummer 方程
- Labor firing cost, 231, 劳动力解雇成本
- Labor force reduction, 231, 劳动力削减
- Labor mobility, 295, 劳动力流动
- Labor supply, 294, 劳动力供给

- Lagrange multiplier, 288, 拉格朗日乘数
- Laid up, 214, 229, 储存
- Large numbers, law of, 374, 大数定律
- Law reform, 25, 法律改革
- Lay-up, 213, 229, 231, 储存
- Leader, 311, 领导
- Learning, 345, 426, 学习
- Learning curve, 21, 320, 339 - 340, 344, 学习曲线
- Legal reform, 25, 法治改革
- Lemons problem, 8, 249, 柠檬问题
- Linear costs, 383, 线性成本
- Logistic function, 92, 逻辑斯蒂函数
- Lognormal distribution, 72, 对数正态分布
- Long-run average cost, 219, 263, 292, 长期平均成本
- Long-run average growth rate, 373, 长期平均增长率
- Long-run average investment, 372, 长期平均投资
- Long-run average price, 299, 301 - 302, 长期平均价格
- Long-run average rate of investment, 421, 长期平均投资率
- Long-run distribution, 83, 272, 299, 长期分布
- Long-run equilibrium, 276, 421, 长期均衡
- Long-run marginal cost, 344, 长期边际成本
- Long-run stationary distribution, 265, 长期平稳分布
- Long-run stationary equilibrium, 269, 长期平稳均衡
- Lower reflecting barrier, 261, 下反射壁
- Lower threshold on price, 261, 价格的低阈值
- Low-sulfur coal, 406 - 408, 低硫煤
- Lumpy additions, 377, 一次性添加
- Lumpy capacity expansion, 378, 381, 一次性能力扩张
- Lump-sum costs, 381, 383, 一次性总成本
- Machinery, 214, 机械业
- Maintaining mothballed tanker, cost of, 238, 维护后备油轮的成本

- Maintenance cost, 229, 235, 维护成本
- Manufacturing industries, 423, 机械制造业
- Mapping, 253, 映射
- Marginal convenience yield, 29, 179, 边际方便产出
- Marginal cost, 342, 边际成本
- Marginal cost of investment, 381, 投资的边际成本
- Marginal option value, 365, 边际期权价值
- Marginal production cost, 340, 边际产出成本
- Marginal profitability, 252, 边际利润
- Marginal profitability of capital, 422, 资本边际利润
volatility of, 422 - 423, 资本边际利润的变动
- Marginal q , 146, 358, 369, 386, 419 - 420, 边际 q
- Marginal revenue product of capital, 359, 资本的边际收益产出
- Marginal social utility, 284, 边际公共设施
- Marginal unit of capital, 358, 364, 369, 420, 资本的边际单位
- Market clearing price, 298, 市场出清价格
- Market demand curve, 251, 市场需求曲线
- Market failure, 19, 283, 294, 市场失效
- 462 Market for oil tankers, 237, 油轮市场
- Market portfolio, 115, 182, 市场组合
- Market price of risk, 115, 148, 179, 215, 334, 348, 370, 风险的市场价格
- Markets for risk, 294, 风险市场
complete, 19, 完全的风险市场
incomplete, 19, 不完全的风险市场
- Markov process, 62, 68, 98, 马尔可夫过程
- Markov property, 62 - 63, 66, 72, 74, 83, 马尔可夫性
- Marriage, 24, 结婚
- Marshallian criterion, 176, 242, 248, 412, 马歇尔标准
- Marshallian long-run average cost, 250, 298, 300, 马歇尔长期成本
- Marshallian minimum average cost, 197, 马歇尔最小平均成本
- Marshallian normal return, 252, 马歇尔正常回报

- Marshallian range, 293, 马歇尔范围
- Marshallian return, 260, 马歇尔回报
- Marshallian rule, 145, 马歇尔规则
- Marshallian theory, 260, 马歇尔理论
- Marshallian threshold, 219, 264, 马歇尔临界值
- Maximum rate of investment, 329, 336, 投资最大比率
- Mean arrival rate, 85, 168, 平均到达速度
- Mean reversion, 164 - 165, 403 - 404, 均值回归
rate of, 163, 165, 均值回归的比率
- Mean-preserving spread, 39, 41, 均值保持的差额
Mean-reverting process, 74, 158 - 161, 166, 195, 404, 均值回归过程
- Method-of-moments estimators, 424, 矩量法估计量
- Mines, 214, 矿山
- Minimum average variable cost, 293, 最小均衡可变成本
- Minimum construction time, 337, 最短建造时间
- Minimum efficient scale, 377, 最小有效规模
- Mobility, 295, 移动
- Modigliani-Miller theorem, 11, 30, 174, 莫迪利安尼-米勒定理
- Moment-generating function, 90, 矩量复制函数
- Monopolist firm, 256, 垄断企业
- Monopoly power, 293, 垄断势力
- Mothballed project, value of, 232, 封存项目的价值
- Mothballed state, 232, 封存状态
- Mothballing, 214 - 215, 229 - 230, 232, 234 - 235, 239, 243, 封存
cost of, 230, 232, 封存的成本
option, 230, 232, 封存期权
threshold, 234, 阈值
- Multinational firms, 244, 跨国企业
- Multistage investment problem, 326, 397, 多阶段投资问题
- Multistage project, 321, 多阶段项目
- Myopic decision, 219, 近视的决策

- Natural gas, 296, 天然气
- Negative opportunity cost, 413, 负机会成本
- Neoclassical investment model, 145, 新古典投资模型
- Neoclassical investment theory, 144, 174, 391, 新古典投资理论
- Net investment, 374, 净投资
- Net marginal convenience yield, from storage, 179, 储备中的净边际便利收益
- Net Present Value (NPV), 4, 净现值
- Net Present Value (NPV), 26, 净现值
- Net Present Value approach, 396, 净现值方法
- Net Present Value criterion, 54, 净现值标准
- Net Present Value function, 414, 净现值函数
- Net Present Value rule, 135, 401, 419, 净现值法则
- Net social surplus, 289, 社会净剩余
- New entrants, 272, 新进入者
- New York Stock Exchange Index, 72, 148, 纽约证券交易所指数
- New York Times, 16, 纽约时报
- Nondiversifiable risk, 115, 148, 不可分散的风险
- 463 Nonstationary process, 61, 非平稳过程
- Non-additivity of costs, 231, 成本的不增性
- Normal distribution, 70, 161, 正常分布
- Normal profit, 293, 正常利润
- Normal rate of return, 258, 正常的回报率
- Normal return, 219, 正常回报
- No-arbitrage condition, 105, 无套利条件
- Nuclear power plants, 46, 345, 核电厂
- Numerical error, 335, 356, 数字误差
- Numerical methods, 353, 数值方法
- Numerical solution, 212, 400, 数值解
- Occupational choices, 294, 职业选择
- Offshore oil reserves, 22, 394, 396, 425, 离岸石油储备

- Oil, price of, 179, 石油价格
- Oil production, 319, 321, 石油生产
- Oil reserves, 321, 396, 425, 石油储备
- Oil tanker industry, 237 - 238, 油轮产业
- Oil tankers, 油轮
- investment in, 239, 对油轮的投资
 - market for, 237, 油轮投资市场
- Oligopolistic industry, 231, 309, 垄断产业
- One-hoss shay, 205 - 206, 单马拉的马车
- Operating cost, 176, 186, 219, 223, 238, 322, 经营成本
- Operating options, 321, 经营期权
- Operating state, 232, 经营状态
- Opportunity cost, 6, 11, 28, 141, 149, 184, 421, 机会成本
- negative, 413, 负机会成本
 - of waiting, 334, 等待的机会成本
- Opportunity set, 147, 机会集合
- Optimal abandonment, 110, 351, 最优放弃
- Optimal control, 126, 最优控制
- Optimal decision, 310, 最优决策
- Optimal development rule, 400, 最优开发准则
- Optimal entry threshold, 257, 最优进入临界值
- Optimal exercise point, 190, 最优执行点
- Optimal investment rule, 142, 152, 156, 190, 最优投资准则
- Optimal mothballing decisions, 243, 最优后备决策
- Optimal production decisions, 339, 最优产品决策
- Optimal search problems, 352, 最优搜寻问题
- Optimal stopping, 103, 108, 128, 130, 140, 352, 414, 最优停止
- Optimal switches, 230, 最优转换
- Optimal thresholds, 239, 最优临界
- Optimality, fundamental equation of, 100, 优化的基本方程
- Option, 6, 期权
- Option pricing, 55, 137, 147, 425, 期权定价

- Option to abandon, 216 - 217, 226, 350, 放弃期权
value of, 190, 216, 321, 放弃期权的价值
- Option to enter, 257, 进入期权
- Option to install scrubbers, 410, 安装除硫器的期权
- Option to invest, 8, 141, 150, 329, 投资期权
value of, 190, 216, 321, 投资期权的价值
- Option to mothball, value of, 232, 后备期权的价值
- Option to postpone, 97, 推迟期权
- Option to reactivate, value of, 232, 恢复期权的价值
- Option to restart, 214, 重新开始的期权
value of, 190, 216, 321, 重新开始期权的价值
- Option to scrap, value of, 232, 放弃期权
- Option to shut down, 137, 关闭期权
- Option to suspend operations, value of, 188, 延缓营运的期权
- Option to switch fuels, 408 - 410, 转换燃料的期权
- Option value, 6, 137, 214, 251, 402, 426, 期权价值
- Option value multiple, 184, 199, 202, 204, 211, 412, 期权价值乘数
- Option value of reserve, 397, 储备的期权价值
- Option value of waiting, 260, 等待的期权价值
- Ornstein-Uhlenbeck process, 74, 90, O-U 过程
- 464 Out of the money, 30, 402 - 403, 408, 410, 虚值
- Output price, 176, 186, 产出价格
- Pandora's box problem, 352, 潘多拉的盒子问题
- Partial differential equation, 321, 331, 341, 353, 363, 400, 404, 409 -
410, 偏微分方程
numerical solution of, 353, 偏微分方程的数量解
parabolic, 331, 抛物型偏微分方程
- Patent, 173, 专利
- Path dependence, 16, 路径依赖
- Payout rate, 150, 399, 回报率
- Perpetual option, 401, 永久期权

- Persistence, 104, 一致性
- Petroleum leases, 396, 石油租赁
- Pharmaceutical company, 268, 石油公司
- Poisson death, 272, 泊松死亡
- Poisson death probability, 269, 泊松死亡概率
- Poisson death process, 278, 泊松死亡过程
- Poisson decay, 205, 泊松衰退
- Poisson differential equation, 85, 泊松微分方程
- Poisson event, 168, 泊松事件
- Poisson jump, 167, 170, 304, 泊松跳跃
- Poisson jump process, 403, 泊松跳跃过程
- Poisson parameter, 171, 泊松参数
- Poisson process, 12, 85, 112, 120, 168, 200, 269, 304, 374, 泊松过程
- Policy intervention, 283, 292, 政策干预
- Policy uncertainty, 19, 244, 303, 政策不确定性
- Portfolio, 31, 投资组合
- Positive serial correlation, 104, 正序列相关
- Postponing investment, 231, 推迟投资
- Potential entrant, 271, 潜在进入者
- Power plants, 394, 电厂
- Predation, 267, 掠夺
- Predatory dumping, 292 - 293, 掠夺式倾销
- Present discounted value, 82, 贴现现值
- Present value criterion, 281, 现值标准
- Present value of wages, 86, 工资的现值
- Present values, 315, 现值
- expected, 315, 预期的现值
- Price ceiling, 19, 297, 300, 价格上限
- Price controls, 283, 293, 296, 价格控制
- Price floor, 19, 294, 301, 底价
- of an allowance, 406, 409, 许可证底价
 - of copper, 77, 224, 264, 266, 铜底价

- of crude oil, 77, 原油底价
- of oil, 85, 179, 400, 403, 石油底价
- Price process, competitive equilibrium, 263, 价格过程, 竞争性均衡
- Price stabilization policies, 314, 价格稳定政策
- Price supports, 303, 价格支持
- Price uncertainty, 251, 价格不确定性
- Price volatility, 296, 价格波动
- Principle of optimality, 100, 最优化原则
- Producer Price Index, 77, 产品价格指数
- Production, 22, 生产
- Production costs, 339, 生产成本
- Production function, 357, 359, 生产函数
- Profit flow, 178, 186, 利润流
- Profit flow uncertainty, 251, 利润流的不确定性
- Project, value of, 136, 项目价值
- Public housing policies, 295, 公共住房政策
- Public policy, 50, 公共政策
- Put option, 350, 看跌期权

- q model of investment, 387, 投资的 q 模型
- q theory, 419 - 420, q 理论
- Quadratic, 279, 391, 二次的
- Quadratic adjustment costs, 384, 二次型调整成本
- Quadratic equation, 142, 152, 171, 180, 185, 415, 二次方程
- Quantum electrodynamics, 123, 量子电动力学

- Random walk, 62, 随机游动
 - discrete state, 61, 离散状态的随机游动
 - limit of, 70, 随机游动的极限
 - with drift, 62, 带漂移的随机游动
 - hypothesis, 78, 随机游动的假定
- 465 representation, 68, 83, 126, 随机游动的表达式

- Range of inaction, 388, 不活动有范围
- Rate of investment, 362, 386, 投资率
- Rate of mean reversion, 163, 165, 均值回归速度
- Rate of return, risk-adjusted, 178, 348, 回报率, 经风险调整的
- Rate-of-return shortfall, 208, 215, 247, 399, 回报率
- Rational expectations, 219, 221, 250, 253, 280, 理性预期
- Reactivation, 229, 230, 232, 恢复
- cost of, 229, 235, 238, 恢复的成本
- Reactivation threshold, 234, 恢复的临界值
- Real options, 7, 10, 244, 实物期权
- Recursion, 316, 递归
- Reflecting barrier, 83, 243, 254, 255 - 256, 263, 278 - 279, 299, 反射壁
- lower, 261, 下反射壁
 - upper, 254, 261, 上反射壁
- Regulatory uncertainties, 345, 监管的不确定性
- Relinquishment requirement, 397, 399, 401, 让渡要求
- Renewable resource, 91, 可再生性资源
- Rent controls, 293, 296, 租金控制
- Replacement cost, 369, 重置成本
- Replicating asset, 118, 资产复制
- Replicating portfolio, 10, 114, 117, 120, 复制投资组合
- Required return, 422 - 423, 必需的回报
- Reserve, option value of, 397, 储备的期权价值
- Residential energy conservation, 411, 家用能源储备
- Resource reserves, 426, 资源储备
- Restart, option to, 214, 重新开始的选择权
- Restarting, 213, 重新开始
- Retrofitting, 405, 更新
- Return shortfall, 162, 198, 206, 225, 255, 367, 370, 406, 回报不足
- Returns to scale, 规模报酬
- constant, 423, 规模报酬不变

- diminishing, 357, 规模报酬递减
- Revolving credit agreement, 332, 赊购合同的兑现
- Risk, allocation of, 风险配置
- Risk, nondiversifiable, 115, 不可分散的风险
- Risk aversion, 289, 风险规避
- Risk markets, 294 - 295, 风险市场
- Risk neutrality, 152, 289, 风险中性
- Risk preferences, 153, 风险偏好
- Risk premium, 149, 419, 426, 风险贴息
- Risk sharing, 295, 风险分担
- Riskless portfolio, 179, 185, 无风险组合
- Riskless rate, 285, 无风险利率
- Risk-adjusted discount rate, 152, 178, 182, 208, 215, 323, 370, 经风险调整的贴现率
- Risk-adjusted rate of return, 178, 348, 经风险调整的回报
- Risk-free portfolio, 32, 150, 无风险的组合
- Risk-free rate, 31, 155, 334, 无风险的利率
- R & D, 46, 345, 研究与开发

- Sample paths, 65, 70, 72, 159, 样本途径
- Scale, 51, 规模
- Scrap value, 112, 230, 废弃价值
- Scrapping, 213, 229, 230, 232, 废弃
 - cost of, 230, 238, 废弃的成本
- Scrubbers, 22, 395, 405 - 406, 408, 410, 除硫器
- Second-best optimal, 295, 次级最优
- Sectoral investment, 419, 部门投资
- Semiconductors, 293, 半导体
- Sequential investment, 319, 328, 346, 352, 序列投资
 - continuous, 339, 连续序列投资
- Series representation, 163, 级数表达式
- Shadow price, 298 - 299, 影子价格

- Shadow value, 340, 346, 影子价值
- Ships, 214, 轮船
- Shock, 冲击
- firm-specific, 251, 278, 特定企业的冲击
 - industry-wide, 251, 278, 产业范围的冲击
- Short position, 117, 151, 180, 空头
- Shortfall, 162, 165, 255, 缺点, 不足
- Short-run equilibrium, 289, 短期均衡
- Short-run variable cost, 219, 短期可变成本
- Shut down, option to, 137, 关闭期权
- Singular control problems, 393, 单控制问题
- Site restoration, cost of, 230, 384, 场地恢复成本
- Smooth pasting, 108, 119, 130, 190, 218, 257, 262, 270, 368, 平滑粘贴
- Smooth-pasting condition, 109, 126, 141, 183, 192, 204, 209, 222, 232, 234, 256, 279, 286, 287, 298, 307, 331, 342, 349, 364, 平滑粘贴条件
- Social cost, 413, 社会成本
- Social optimality, 283, 288, 291, 371, 社会最优化
- Social optimization approach, 287, 社会最优方法
- Social optimum, 286, 社会最优
- Social planner, 19, 284, 289, 292, 社会计划者
- Social utility, 284, 286, 公用设施
- Spanning, 117, 147 - 148, 152, 178, 329, 348, 400, 409, 生成的, 复制的
- Spanning asset, 117, 生成资产, 复制资产
- Specificity of equipment, 249, 设备的规格
- of plant, 249, 厂房的规格
- Speculative bubbles, 181, 188, 投机性泡沫
- Speculative component of value, 181, 价值的投机成分
- State variable, 99, 状态变量
- Static expectations, 219, 221, 静态预期
- Static model, 253, 静态模型
- Stationary density function, 92, 平稳密度函数

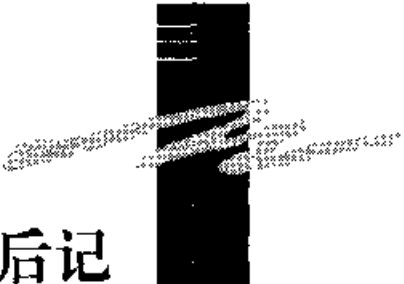
- Stationary equilibrium, 276, 平稳均衡
- Stationary process, 83, 平稳过程
- Steady-state distribution, 91, 稳态分布
- Steady-state equilibrium, 92, 稳态均衡
- Steel industry, 249, 钢铁业
- Stochastic calculus, 59, 随机积分
- Stochastic dominance, first-order, 104, 随机占优, 一阶
- Stochastic game, 283, 随机对策 (博弈)
- Stochastic game theory, 309, 随机对策 (博弈) 理论
- Stochastic process, 12, 59 - 60, 随机过程
 continuous-time, 61, 连续时间随机过程
- Stochastic shift variable, 178, 随机移动变量
- Stock fixed cost, 383, 389, 存量固定成本
- Stock of capital, 357, 资本存量
- Stopping region, 109, 128, 130, 终止区域
- Storable commodity, 212, 可储存的商品
- Strategic incentive to invest, 315, 投资的策略性激励
- Structural models of investment, 424, 投资的结构性模型
- Sudden death, 205, 突然死亡
- Suicide, 24, 自杀
- Sulfur dioxide emissions, 405, 二氧化硫排放物
- Sunk benefit, 413, 沉没收益
- Sunk costs, 3, 8, 11, 223, 237, 413, 沉没成本
- Supernormal profits, 267, 293, 超常利润
- Suspension, 14, 196, 213, 暂停, 终止
- Synthetic fuels, 352, 合成燃料
- Systematic risk, 148, 285, 系统性风险
-
- Tax credit, 412, 课税扣除
 for investment, 411, 投资的课税扣除
- Tax policy, 303, 315, 税收政策
- Tax rates, 51, 税率

- Taxes, 5, 54, 295, 税收
- Taylor series expansion, 79, 81, 泰勒展式
- Technical uncertainty, 47, 346 - 347, 349, 技术不确定性
- Technological obsolescence, 199, 技术退化
- Temporary suspension, 261, 176, 214, 229, 临时终止
- Termination, 103, 终止
- Termination payments, 215, 最终支付
- Termination payoff, 99, 108, 最终盈利
- Termination value, 97, 113, 终值 467
- Theory of investment, neoclassical, 391, 新古典的投资理论
- Three or more stages, projects with, 322, 326, 三阶段或更多阶段的项目
- Threshold, 230, 254, 269, 423, 阈值, 临界值
- Threshold curve, 358, 364, 366, 临界线
- Time to build, 328, 335, 351, 建设时机
- Timing, 3, 时机
- Tobin's q , 5, 13, 146, 156, 184, 358, 369, 386, 389, 392, 419 - 420, 托宾 q 值
- Total condition, 380, 全部条件
- Trade policy, 20, 51, 292, 贸易政策
- Tradable allowances, 395, 405, 可交易的许可证
- Transmission lines, 426, 传输线路
- Two-stage investment, 321 - 322, 两阶段投资
- Uncertainty, 11, 14, 不确定性
- aggregate, 18, 248 - 249, 253, 261, 281, 合计的不确定性
 - demand growth, 51, 需求增长的不确定性
 - firm-specific, 18, 248 - 249, 251, 267, 277 - 278, 281, 特定企业的不确定性
 - idiosyncratic, 18, 特殊的不确定性
 - industry-wide, 248 - 249, 251, 253, 277 - 278, 产业范围的不确定性
 - input cost, 46, 346 - 347, 投入成本的不确定性
 - interest rate, 48, 利率的不确定性

- positive persistence of, 129, 不确定性的正向一致性
- price, 251, 价格的不确定性
- profit flow, 251, 利润流的不确定性
- technical, 47, 346 - 347, 技术的不确定性
- Undeveloped reserve, value of, 400, 未开发储备的价值
- Unit root test, 77, 404, 单位根检验
- Upper reflecting barrier, 254, 261, 上反射壁
- Upper threshold on price, 261, 高临界价格
- Urban land valuation, 426, 城镇土地估价
- User cost, 5, 使用成本
 - of capital, 145, 资本的使用成本

- Valuation, equivalent risk-neutral, 121, 124, 126, 风险中性等价的估价
- Value assets in place, 369, 适当的资产价值
- Value function, 101, 270 - 271, 279, 285, 299, 360, 价值函数
- Value matching, 130, 190, 218, 257, 262, 270, 368, 价值匹配
- Value, 价值
 - of a firm, 211, 企业的价值
 - of a machine, 87, 机器的价值
 - of a project, 175, 项目的价值
 - of active firm, 216, 226, 254, 活动企业的价值
 - of assets in place, 147, 适当的资产价值
 - of flexibility, 29, 315, 337, 灵活性的价值
 - of idle firm, 226, 虚拟企业的价值
 - of information, 352, 信息的价值
 - of investing, 258, 投资的价值
 - of investment opportunity, 192 - 194, 337, 346, 投资机会的价值
 - of mothballed project, 232, 封存项目的价值
 - of option to abandon, 232, 放弃的期权价值
 - of option to invest, 32, 190, 216, 321, 投资的期权价值
 - of option to mothball, 232, 封存的期权价值
 - of option to reactivate, 232, 恢复的期权价值

- of product. 321, 产品价值
- of project, 136, 179, 187, 197, 200, 产出价值
- of the firm, 147, 216, 369, 企业的价值
- of waiting, 140, 258, 等待的价值
- Value-matching condition, 109, 141, 183, 192, 203, 209, 222, 232, 234, 286-287, 298, 307, 331, 341, 349, 364, 价值匹配条件
- Value-of-assets-in-place, 420, 资产的合适价值
- Value-of-the-firm-sense, 386, 企业意义上的价值
- Valuing the firm's options, 421, 企业期权价值评估 468
- Variable cost, 137, 215, 219, 可变成本
- Variable output, 195, 可变产出
- Variance, 39, 136, 方差
 - of cost, 351, 成本的方差
 - of stock returns, 424, 股票回报的方差
- Variance rate, 71, 变化率
- Volatility, 波动性
 - estimation of, 238, 波动性估计
 - in project values, 153, 项目价值中的波动
 - of output price, 230, 产出价格的波动
- Waiting, 等待
 - option value of, 260, 等待的期权价值
 - Value of, 258, 等待的价值
- Waiting time, 161, 等待时机
- Wedge, 142, 楔形, 插入
- Wholesale Price Index, 77, 批发物价指数
- Wiener process, 59, 63, 67, 70, 136, 159, 维纳过程
- Zero excess profit condition, 256, 超额利润为零的条件



译后记

《不确定条件下的投资》是美国普林斯顿大学经济系迪克西特教授和麻省理工学院斯隆商学院平迪克教授的一本力作。本书刚一问世，美国哥伦比亚大学经济系的教授 R. Glenn Hubbard 就在《经济学文献杂志》上撰文对该书进行了详细的评述。作为本书的校译者，我非常荣幸能有机会参与本书的翻译。感谢中国人民大学出版社对译者的信任，也要感谢中国人民大学经济学院周业安副教授的大力推荐。

本书的翻译过程始终受到迪克西特和平迪克两位教授的关注。笔者与迪克西特教授就某些专业术语的翻译进行了探讨；两位教授还为本书撰写了简短的中译本序言。在此我们对两位教授所提供的帮助表示感谢。本书翻译过程中，负责第

3、4 章的黄立虎博士去加拿大 ALBERTER 大学访问，因此，这两章是他在加拿大访问期间翻译出来的，在此表示感谢。中国人民大学出版社的编辑阅读了本书的初译稿，并提出了宝贵的修改意见。他们的辛勤劳动为本书增色不少，并使译者避免了许多错误，在此一并致谢。

全书翻译分工如下：第 1~2 章，朱勇；第 3~4 章，黄立虎；第 5~7 章，朱勇、丁新娅；第 8~9 章，朱勇；第 10~12 章，朱勇、朱静；索引，朱勇。

全书由朱勇统一校译。文中所有错误由本人负责。本书涉及许多新概念，不少词汇尚无标准译法，加上本人能力有限，文中疏误一定不少，敬请读者指正。

联系地址：zhuyong@agec.ruc.edu.cn

朱勇

2002 年 11 月 1 日

3、4 章的黄立虎博士去加拿大 ALBERTER 大学访问，因此，这两章是他在加拿大访问期间翻译出来的，在此表示感谢。中国人民大学出版社的编辑阅读了本书的初译稿，并提出了宝贵的修改意见。他们的辛勤劳动为本书增色不少，并使译者避免了许多错误，在此一并致谢。

全书翻译分工如下：第 1~2 章，朱勇；第 3~4 章，黄立虎；第 5~7 章，朱勇、丁新娅；第 8~9 章，朱勇；第 10~12 章，朱勇、朱静；索引，朱勇。

全书由朱勇统一校译。文中所有错误由本人负责。本书涉及许多新概念，不少词汇尚无标准译法，加上本人能力有限，文中疏误一定不少，敬请读者指正。

联系地址：zhuyong@agec.ruc.edu.cn

朱勇

2002 年 11 月 1 日