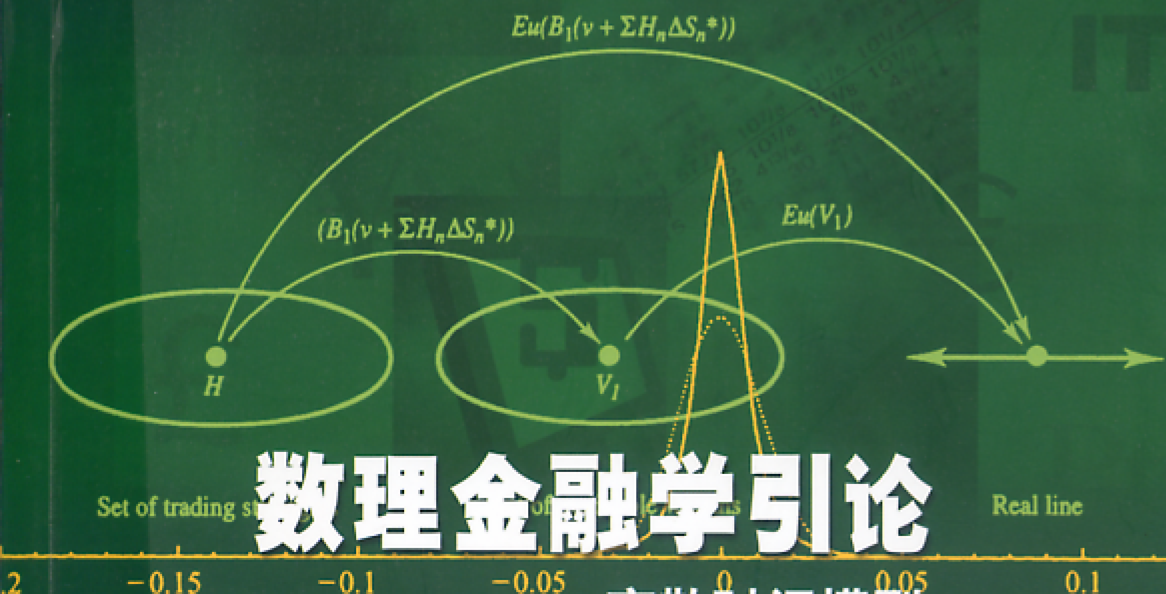
数理金融方法与建模译丛

[美] 斯坦利 · R · 普利斯卡 / 著

王忠玉 / 译



数理金融学引论

——离散时间模型

Introduction to Mathematical Finance

Discrete Time Models

经济科学出版社
Economic Science Press

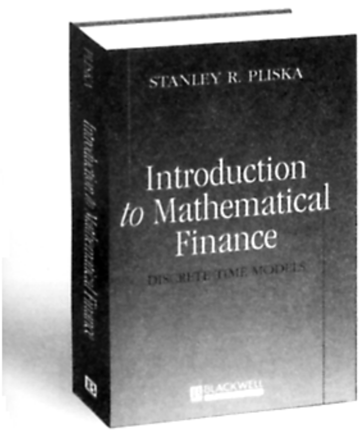
JINQUAN SERIES

经济科学出版社
Economic Science Press

金泉文库

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL FINANCE

Discrete Time Models



Stanley R. Pliska

数理金融方法与建模译丛

策划者：王书燕

Translation Series of Methods and Modeling in Mathematical Finance

金泉文库

数理金融方法与建模译丛

金泉文库

策划人语

在上一个世纪五十、七十年代的两个时间段，有一些智者提出了“风险的处理和效益的优化”两个现代金融学的中心议题。从此，几乎所有数理金融的理论也都围绕着这两个基本问题而展开。

应该说明的是：将数理概念导入到对金融市场制度、金融工具和金融分析方法之中，从而使金融分析方法得以丰富和发展，并且充实了金融研究方法体系。

数理金融是建立在假设的基础上，采用数理的方法，对金融制度以及金融工具等现象进行研究的课题。然而到目前为止，数理金融在主流经济学界还没有明确的界定。

作为出版人，我无意于讨论经济学的主流或非主流问题。我只希望能把上个世纪末，数理金融在国际上迅猛发展的这种现象反映出来并呈献给我国读者。

在这里，我们采撷了业界相对最好的作者之巨著；我们选择了相对最好的译者进行翻译；我们邀请了国内此领域最好的专家撰写了中文版序言；我们策划了相对最好的出版运作。

——我们精心集结了《数理金融方法与建模译丛》以飨读者。

王书燕

二零零二年七月九日

数理金融学引论

——离散时间模型

[美] 斯坦利·R·普利斯卡 / 著

王忠玉 / 译

数理金融方法与建模译丛

金泉文库

目　录

丛书总序

数理金融学是20世纪后期迅速发展起来的一门学科。数理金融学是人们观察、研究与认识金融问题的一种独特方法。它为创造性地研究、解决各种金融问题提供基础与指导。数理金融学的基本特点是运用数学工具去研究和分析金融交易中的各种问题，从而精确地刻画出金融交易过程中的各种行为及其可能的结果，使有关金融交易的决策更为简洁和精确。数理金融学也是金融学自身发展而衍生出来的一个新的分支，是数学与金融学相结合而产生的一门新的学科，是金融学由定性分析向定性分析与定量分析相结合，由规范研究向实证研究为主转变，由理论阐述向理论研究与实用研究并重，金融模糊决策向精确化决策发展的结果。

数理金融学的迅速发展，也是现代金融实践发展推动的结果。现代金融市场的发展实质上是一个金融产品不断地快速创新的过程。20世纪70年代开始以来，各种衍生工具的产生和发展是数理金融学产生和发展的基本推动力。随着金融产品的不断创新，金融交易的范围和层次更具多样性，同时也使金融产品的交易价格更具不确定性。因此，金融交易过程实际上就是一个以金融产品价格为核心的风险与收益的度量与决策问题，本质上是一个如何把交易行为量化并进而研究量与量的问题，这是数理金融得以产生和发展的现实基础。在现代的金融交易中，任何一项金融决策特别是金融交易的决策都要面对许多不确定性因素，这些不确定性因素都将影响并反映在金融产品的

风险与收益上，因此，任何金融决策都必须在权衡收益与风险之后才能做出抉择。所以，如何精确地度量金融交易过程中的收益和风险，就成为金融交易决策的核心。为使决策做到科学和精确，就必须对各种不确定性因素进行定量分析，这种现实和不断发展的需求促进了数学在金融活动中的应用和发展，从而衍生出数理金融学这一新的学科。

金融创新还包括金融制度创新。任何事物的运动规律必然通过量的关系反映出来。金融制度创新也是如此。反过来，透过这些量的关系，可以深刻地研究和分析现象背后的本质。对金融制度用数理金融方法加以研究分析，可以从量的方面更精确地把握金融制度的深层结构和制度变迁的基本决定因素及其变化规律。因此，数理金融学还可以对金融制度创新有着巨大的推动作用。数理金融学可以把决定金融制度创新的因素量化，从而对金融制度的发展进行定量分析并揭示其内在规律。数理金融学可以通过建模、模拟分析等方法模拟市场的制度运行和制度安排本身的内在机理并揭示其特征，从而推动金融制度创新。

数理金融学是金融工程的理论基础，可以说，金融工程就是把数理金融的基本原理工程化、产品化。前者是基础理论，后者是理论的应用。金融工程的核心内涵包括两个方面：一是如何组合已有的金融产品，以改变原有金融产品的风险与收益特性，从而达到有效地利用与开发风险，实现金融交易收益最大化的目的。能否通过金融产品的不同组合来实现开发风险、提高收益的目的，关键在于能否精确地刻画与预测金融产品的风险与收益变化的规律。二是开发新的金融产品。开发新的金融产品，说到底就是根据市场的需要创新出具有新的收益与风险特性，或者能对已有产品形成替代，或者可与已有金融产品结合而产生更令人满意的风险与收益特性，或者能适应某种特殊的需要的新金融品种。总之，金融工程的关键是要能定量地精确刻画出金融产品的风险。要实现这样的目的，除了应用数学工具与思维方法之外，别无他径。同时，在精确地刻画金融

产品风险的基础上，如何进行金融产品组合，仍然是一个应用数学工具与思维方法的问题。因此，数理金融学与金融工程两者是相互依赖和促进的。金融工程学的发展为数理金融不断提出新的研究课题，促进了数理金融学的发展；另一方面，数理金融学的发展也日益拓宽金融工程的创新空间，不断为金融工程学提供新的理论和方法。

数理金融学和金融工程学在我国的发展是近几年的事。随着我国市场经济的发展特别是证券市场的发展，实际上已为金融工程产品的开发与创新及应用提供了现实的土壤和发展空间，中国金融市场的国际化发展也预示着金融工程在中国有着广阔的发展前景。与此同时，作为金融工程基础理论的数理金融学，也必将获得迅速发展。事实上，数理金融学和金融工程学正在我国呈加速发展的态势，不少高等院校已开办了数理金融专业，不少金融企业都设立了专门的金融工程研究小组，这标志着数理金融学和金融工程学已植根于我国的金融市场土壤之中，其发展前景不可限量。

由经济科学出版社和香港皇权集团共同组织翻译的《数理金融方法与建模译丛》这一套丛书，对推动数理金融学和金融工程学在我国的发展，无疑将发挥巨大的促进作用。这套丛书不但涵盖了数理金融学的基本理论和介绍了数理金融学的一些主要应用领域，还提出了数理金融学的许多前沿发展方向和许多值得进一步深入研究的课题。这对促进数理金融学和金融工程学在我国的发展，使我国在这个领域尽快赶上世界的领先水平，无疑有着巨大的帮助。同时，本套丛书不但可作为大学本科生、研究生教材和参考读物，也是金融部门的理论研究人员和实务人员值得深入研读的著作。我深信，任何阅读了本译丛的读者，必将从中获得思维的闪电和启迪。

汪良忠

于广发证券股份有限公司

2002年6月

中文版序言

金融学，按其定义，是研究“金钱”① 运作的一门科学。而数学金融学（Mathematical Finance），② 顾名思义，则是运用数学工具研究解决金融问题的一门交叉学科。

金融学的历史应该说是相当久远的，它至少在人类发明或开始使用货币时就已经诞生了。不过，在相当长的年代里，金融学并不需要太多的数学。罗伯特·默顿（Robert C. Merton）③ 曾经在一篇综述性文章中指出，尽管路易·巴谢利耶（Louis Bachelier）在1900年就发表了象征数学金融学诞生的奠基性论文《投机理论》④，然而，在随后的半个世纪中，金融学仍然基本停留于描述性的水平上。当时所谓的金融学比“数数筹码、扳扳手指头”多不了多少，用到的最高级的分析工具仅仅是“现值”而已。1952年，马尔柯维茨（H. Markowitz）⑤ 发表了“均值方差理论”。它标志着现代金融学的开始，这也是公认的现代金融学经历的第一次革命。现代金融学经历的第二次革命

① 这里“金钱”的含义不仅仅是有形的货币。

② 我觉得“数学金融学”比“数理金融学”似乎更准确一些，无论从字面上翻译还是从意思上理解。另外，它与“金融数学”（Financial Mathematics）有微小的差别。

③ 1997年诺贝尔经济学奖得主之一。

④ 这是巴谢利耶的博士论文。

⑤ 1990年诺贝尔经济学奖得主之一。

是 1973 年布莱克（F.Black)[①] 和斯科尔斯（M.Scholes)[②] 发表“期权定价公式”。这两次革命根本性地推动了现代金融学，它们所涉及的问题是：风险的处理和效益的优化。这两个问题可以说就是现代金融学的中心议题。几乎所有数学金融学的理论也都是围绕着这两个基本问题的。

近几十年来，人们越来越清楚地认识到，定量研究金融学才能更准确地作出正确的金融决策。而定量研究必须依靠数学。伟人马克思认为，“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步”。[③] 自从 1969 年瑞典皇家科学院设立诺贝尔经济学奖以来，获得此项奖励的学者中至少有 3/4[④] 的学者其获奖的主要工作是运用数学工具解决经济或金融问题。这表明数学工具运用到经济学和金融学中所取得的成果已得到广泛的承认。经济学和金融学正朝着完善的方向迈进。

作为现代金融学的核心，数学金融学在过去的几十年中，尤其是 20 世纪 90 年代以来，在国际上发展相当迅猛。国内从事这方面教学和科研的学者也越来越多。有些学者的工作在国际数学金融学领域中也有相当的影响。近年来，国内外出版的数学金融学方面的专著和教材也非常多，其中有许多是相当不错的。现在呈现在读者面前的是美国著名的数学金融学专家普利斯卡（S.Pliska）写的 *Introduction to Mathematical Finance* 的中译本。这是一本写得非常好的教材，很适宜具有微积分、线性代数和概率论初步基础的读者作为数学金融学的入门教材。该书的部分内容曾经被用于我在复旦大学为本科生开设的“数学金融学”课程之中。我觉得该书是很有特点的。这次，王忠玉先生将该书译成中文，使得将有更多的国内读者能够接触它。这无疑是一件很好的事情。我粗略地浏览了翻译稿，觉得王忠

① 他于 1995 年过世。如果 1997 年他还在世，他应该是当年诺贝尔经济学奖得主之一。

② 1997 年诺贝尔经济学奖得主之一。

③ 引自拉法格的《忆马克思》。

④ 据我们比较保守的统计。

玉先生一定花了不少力气。我想会有许多读者喜欢它的。在此，我也希望会有更多的人来关心数学金融学，来从事数学金融学的研究、教学和应用。我国进入WTO，给了我们一个极好的具有挑战性的机会，相信掌握数学金融学的人们会有其广阔的用武之地。

雍炯敏

于复旦大学

2002年2月

作者中文版序言

我得知我的著作有了中文翻译版非常高兴，因为我曾经拥有几次去中国旅行的美好经历。我知道中国具有悠久的学术传统，所以 1991 年我高兴地接受在北京中国科学院进行研究讲学的邀请。尽管在那时我不知晓中国有人真的在这个领域做研究工作，但是我看到学术界人士对金融数学的兴趣。一想起中国拥有肥沃的研究土壤，我就安排中国科学院预定我作为主编的学术期刊“数理金融学”。

我不能肯定我的讲学或者安排预定的期刊是否产生了影响，然而我立刻开始看到中国学者正在研究金融数学。现在有一些中国教授对这个领域做着重要的研究工作。还有，在中国举行过多次卓越的数理金融学会议，包括几次在中国香港地区召开的会议以及前几个月在上海复旦大学举办的会议。见到中国经济的迅速增长，包括上海和中国香港地区的金融市场在内，我预计在金融数学方面中国人的研究会不断地增长。希望我的著作将有助于致力于这一领域新的学者。

正如金融研究起着重要作用一样，金融市场实践的作用也是重要的。当中国香港地区金融市场已成为发达市场的时候，中国的其他城市金融市场仍处于幼稚时期。这些金融市场为了

与中国经济发展的步调相一致必定会成长壮大。这需要一种适宜的基础系统，包括精明而努力工作的以及接受过正规教育的人。依照我的观点，数理金融学的学习是这种必要教育中的一个环节。因此，我期望我的著作会促进中国金融市场的发展。

斯坦利·R·普利斯卡

2001年10月3日

Foreword to the Chinese edition of "Introduction to Mathematical Finance"

I am delighted to have a Chinese translation made of my book because I have fond memories of several trips to China. I knew that China has a long tradition of scholarship, so in 1991 I was happy to accept an invitation to deliver a research lecture at the Academic Sinica in Beijing. I could see that there was academic interest in financial mathematics, although at the time I did not know of anybody in China actually doing research on this subject. Thinking that China would be a fertile ground for research, I arranged for the Academia Sinica library to receive a subscription to "Mathematical Finance," the academic journal of which I was the editor.

I am not sure whether my lecture or subscription had an effect, but soon I started seeing Chinese scholars doing research on financial mathematics. Now there are a number of Chinese professors doing important research on this subject. And there have been excellent mathematical finance conferences in China, including several in Hong Kong as well as, just a few months ago, one at Fudan University in Shanghai. Given the rapid growth of the Chinese economy, with financial markets in Shanghai and Hong Kong, I am forecasting continued growth in Chinese research on financial mathematics. Hopefully my book will help educate new scholars who will go on to contribute to this research.

Just as important as financial research is financial practice. While the financial market in Hong Kong is well developed, the financial markets in other Chinese cities are still in their infancy. These markets must grow in order to keep pace with the Chinese economy. This requires a suitable infrastructure, including many smart, hard working, and properly educated individuals. In my opinion the study of quantitative finance is an important component of this necessary education. I therefore hope my book will contribute to the growth of the Chinese financial markets.

Stanley R. Pliska

October 3, 2001

原版序言

目的与读者

这本书产生于作者在1981年与J.Michael Harrison共同的研究结果，是专为高年级本科生和低年级研究生课程设计的，它是严谨而易于接受的关于证券市场的现代金融理论入门教材。这是一个既可在商学院又可在数学科学系教授的课程，同时它也是一门广泛应用于现代金融行业的课程。在此书开始出版时，衍生证券行业在抽象资本意义上已发行有20兆美元，而且投资组合管理行业或许有了更大规模的发展。数学在这些领域中起着决定性的作用。结果，金融实践者（特别是“火箭科学家”、分析员、金融工程师等）会发现，这本书会对他们的理论背景提供有用的帮助。

研究完整的证券市场理论需要连续时间随机过程、测度论、数理经济学的知识，以及通常在进入高年级研究生水平之前没有学习到的类似的准备知识。因此，对完备的证券市场理论精确的研究需要研究生研究好几年（这取决于研究者自己的努力程度和阅历）。然而，在高等数学方面没有投入花费大量精力的条件下，凭借局限于对证券价格离散时间模型的关注可能是获得初步入门的一种方法。事实上，生活在离散世界中的人们想获得几乎全部重要的金融概念是可能的。本书的宗旨是提供这

样一种初步性的研究。

本书中仍有大量的数学。读者应该熟悉微积分、线性代数以及基于微积分的概率论（而不必需要测度论）。随机变量和期望值将起着重要的作用。此书将发展一些重要的涉及离散时间随机过程的概念；这里以前的知识会是有用的，但不是必需的。推测读者会对金融感兴趣，从而知晓一些股票、债券、期货以及金融决策的基本知识。当然，最后专题内容牵涉到效用理论，希望读者精通这一方面和与微观经济学入门相关的一些内容。对线性规划的了解会是有益的，但是那些缺乏此种知识的人能够运用书后附录来独自学习。

这本书的目的是提供一种金融学理论的严谨处理，同时保持一种非正式的风格。其中有对一些计算事例的强调，而习题是用来检查对知识的掌握以及提供补充信息。想探求关于证券、衍生证券和投资组合管理方面的制度知识的读者应查找其他书籍，但是要想仔细探求金融工程入门理论的那些人将会发现本书对此是有益的，并且是富于理解的。

内容概要

这本书是由 7 章组成的，每一章分成许多小节。重要方程、基本命题陈述、例子和习题均由章节数所标明。例如，方程 2.1 是指第 2 章中的第 1 个方程。

此概要将指出哪些主题是重要的，并且说明为什么（通常因为我认为某一内容是基本又重要的，而不是局限于狭窄范围的结果或暂时性的推论上）。概要亦指出新内容的专题，至少是在其处理安排上。或许本书中没有崭新的结果，但是可以像事后诸葛亮那样，我们能够看到以最佳方式来阐述结果以及推演结果。希望本书在这点上是成功的，从而对证券市场的一些基本思想表达出一种清晰的理解认识。

前两章致力于单时期模型。在本书中许多重要的概念都是

在此引入，其中 1.1～1.5 节和 2.1～2.3 节的内容显得特别重要。2.4 节是对重要的均值方差投资组合分析的现代处理。1.6 节和 2.5～2.7 节的内容有点对超出本书主体内容，它们是对重要专题的扩展和探索性的尝试。

本书其余部分致力于多时期模型内容。这建立在单时期结果之上，强调什么内容是新的和不同的。相当多的内容保持着简明性，其目的是适合较高水准的读者（但是，此类读者仍会发现参阅前两章的内容是值得的）。第 3 章描述证券市场模型的基本要素，并引入诸如股息过程和二项式模型这种重要的概念。第 4 章致力于衍生证券，包括远期和期货；此处许多节均是令人感兴趣的基本内容。第 5 章专注于最优消费和投资问题。5.2 节和 5.4 节均是最重要的（当然，由于许多思想来源于我 1982 年和 1986 年的研究，所以我表述的有点偏颇），因为它们论述了风险中性计算方法。5.5～5.8 节是扩展性的介绍及特殊条件下的内容。

在最近几年中，利率衍生证券迅速地成为重要的交易品种。第 6 章致力于这一主题。它涵盖诸如上限期权和互换期权这样一些主要的衍生证券事例，同时解释离散时间利率模型是怎样应用于对衍生证券估值的。

第 7 章提供一种简要的对具有无限样本空间模型内容的考察。这种看起来无关紧要的扩展导致了意义重大的数学上的复杂化和专门化，因此这一章对倾向于抽象数学方面的读者来讲，将是最吸引人的。

阅读建议

这是为进一步研究的读者提供某些建议，而不是为研究者去关注特殊结果给出一种指示说明。在此所提到的参考文献大多数均是书，而且包括一些影响广泛而年代久远的研究文献。这一建议是专为希望学习更多数理金融学内容的读者而写的，

而没有谈及历史。

我将从必备的基础概率论知识起谈。Feller (1968, 1971) 的书仍是值得人们去阅读学习的。20 世纪 70 年代和 80 年代,我曾经使用过 Olkin、Gleser 和 Derman (1980) 的书来讲授概率论课程。最近的基础概率论课本包括 Ross (1997a)、Karr (1993) 和 Pitman (1993) 的书。所有这些课本都假定读者知晓一些微积分的知识,但是不必需要测度论的知识。

本书中使用许多线性代数的知识,还有矩阵论的知识,而后者中比较新的一些书并不比经典的书 [比如 Gantmacher (1959)] 更好。尽管这样,还是有一些比较新的书:Brown (1991)、Roman (1992)、Lay 和 Guardino (1997),以及 Riess 等 (1997)。

从线性代数引申出的另一学科是线性规划,即对受一些线性约束的线性目标函数求最大值或最小值的问题。附录提供该学科的一种概略,同时列出一些好的参考文献。与此密切相关的学科是二次规划,它涉及一些类似的最优化问题,不同之处仅仅是目标函数为一个二次函数。更一般的是凸最优化问题,亦称为非线性规划问题,其中的目标函数不必是二次的。当投资组合管理者对期望效用追求最大化时,这样的问题便在金融学中产生。一些好的参考文献有 Jeter (1986)、Hayhurst (1987)、Bazaraa (1993) 和 Rockafellar (1997) 的书。

不应忽视的一个数学学科是分析学引论。这与收敛、开集和闭集、函数以及极限有着联系。由 Bartle 和 Sherbert (1992)、Mikusinski 和 Mikusinski (1993)、Berberian (1994),以及 Browder 等 (1996) 分别撰写的书是此领域中广泛流行的课本。

许多先前的数学专题内容涉及到,经济学中由 Klein (1973)、Chiang (1974) 和 Ostaszewski (1993) 分别撰写的十分有用的数学引论。这些书籍被人们高度赞誉,原因在于它们对数学工具给出基本强调的同时,还阐明数学是怎样在经济学中使用的,从而对金融市场的研究提供了某些经济背景。在此

类学科中，更集中于最优化理论在经济学应用的是 Dixit (1990) 的书。

这样，关于一些必需具备的知识介绍了许多。在前述的任何一个领域里，你没有必要成为一名专家，但是你应该熟悉它们。

现在，我转到本书中得以应用的三个领域，而且希望读者对它们进行进一步的研究。对于离散时间随机过程领域而言(随机漫步、贝努利过程、马尔可夫链、鞅等)，存在着几部可供选择的引导性的书：Hoel、Port 和 Stone (1972)、Cinlar (1975)、Karlin 和 Taylor (1975, 1981)、Taylor 和 Karlin (1984)、Ross (1995, 1997b)、Kijima (1997)，以及 Norris (1998)。在更高等水平上（一些测度论的知识得以使用）人们应意识到 Doob (1953)、Neveu (1975) 和 Reruz (1984) 的经典著作，以及最近由 Durrett (1991) 和 Williams (1991) 所撰写的书。

另外一个在本书中得到发展的数学专题内容是动态规划。这是与随机过程的最优化控制理论相联系的。在称为马氏过程的共同条件下，这一专题被称为马尔可夫决策论。在此，人们能够同等地考察由 Bertsekas (1976)、Denardo (1982)、Whittle (1982, 1983)，以及 Puterman (1994) 所写的著作。

最后，我谈一谈金融经济学。直到最近，关于证券市场理论方面相当多数的书是由金融学教授撰写的，因此倾向于强调经济理论，但不利于概率建模。Markowitz (1990) 的著作是指定的单时期投资组合管理方面的参考文献。Ingersoll (1987) 和 Duffie (1992) 提供在离散时间模型和连续时间模型方面提供了良好、广泛的论述。其他的一些书包括离散时间模型某些一般性的讨论，但是以陈旧的形式来表述的是 Jarrow (1988)、Huang 和 Litzenberger (1988)，以及 Eatwell、Milgate 和 Newman (1989) 的书。同时，研究范围更集中的最优秀的三本书是由 Cox 和 Rubenstein (1985)、Hull (1993)，以及 Jarrow 和 Turnbull (1996) 撰写的，它们的内容集中在离散时间和连续时间的衍生

证券模型上。再有，值得人们关注的书是由 Wilmott、Dewynne 和 Howison (1993) 所撰写的，它是以偏微分方程的观点来研究期权定价，而 Dixit 和 Pindyck 的书是以厂商观点研究资本投资决策，因而涵盖了人们想投资于证券市场的某种相同的基础。

在最近几年里，一些金融学方面的书是由数学家所撰写的，他们倾向于强调概率方面的建模，而不是经济上的讨论。Luenberger (1998) 和 Panjer 等 (1998) 采用了内容非常广泛、引导性的观点。Baxter 和 Rennie (1996)、Lamberton 和 Lapeyre (1996)、Elliott 和 Kopp (1998)，以及 Mikosch (1998) 的书在首先发展了某种离散时间理论之后，对连续时间理论给予了引进。所有这些书都是为研究生一年级课程提供的。

在更高等研究水平上，人们会发现综合性论述的书是由 Duffie (1988)、Dothan (1990)、Merton (1990)、Musiela 和 Rutkowski (1997)、Bingham 和 Kiesel (1998)，以及 Bjork (1998) 所撰写的。Korn (1997)、Karatzas 和 Shreve (1998) 的书提供了关于最优消费/投资问题的高等研究。Rebonato (1998) 的书集中于利率衍生证券模型上。

最后评注

这本书的头两次印刷有许多排版错误。这些错误均列在我的 web 网页上：www.uic.edu /~ srpliska。如果你在这次印刷中发现任何错误，请与我联系把错误告诉我：srpliska@uic.edu。

本书中所有习题解答手册配备给采用此书作为教科书运用的教员，为此教员可以与我联系，我将免费邮寄手册。

斯坦利·R·普利斯卡

致谢

这本书是由讲义演变来的，最初是在日本为 1991 年博士研究生班精心组织而成的，那时我是 Tsukuba 大学的金融学一名 Yamaichi 访问教授。我感谢 Masaaki Kijima 促成我的这次经历。在 1992 年，我是伦敦经济学院著名访问研究员（感谢 Michael J.Selby），同时作为 Warwick 大学的访问学者（感谢 Stewart Hodges）。

此书的基础版本是在 1994 年伊利诺斯（Illinois）大学芝加哥（Chicago）分校博士研究生班上提炼成的。学生们对该书的反映是非常有益的，尤其是 Bill Francis 和 Rashida Dahodwala 的反映。

在 1995 年 1 月，我在剑桥（Cambridge）大学 Issas Newton 数学科学研究所的金融数学项目上得以完成接近最终版本的形式（我感谢 Chris Rogers 促成这次有益的经历）。在那里，此书的部分内容被用于课堂讲授，而整部书的内容则提供给访问学者来研究。当我在那里作为 6 个月的资深访问研究员时，我所得到的反馈和研究所的热情好客是此书进入最后准备阶段的重要因素。特别地，Abel Cadenillas 和 Peter Lakner 两位研究学者的精心评论，他们在 1995～1996 年分别在各自的大学里使用过本书，这些都是特别有益的。同时，Ruediger Kiesel 提出了一些有用的反馈。

我非常感谢我所在大学数学研究生 Andriy L. Turiskiy 帮助我整理习题解答手册。同时应向许多人致谢，特别是 Tomasz Bielecki、John Fuqua 和 Edward Kao 指出了本书头两次印刷中的排版错误。

1

1

单时期证券市场

1.1 模型说明

单时期模型显然是对复杂的、时间变化的随机现象，像股票价格和债券价格的非真实的表示。但是，它们有促使其数学形式上简单，并且能够阐明甚至与最复杂的连续时间模型相联系的许多重要经济原理的优点。因此，对引入目的而言，单时期模型是值得研究的。

单时期模型被设定成如下的一些基本因素：

- 初始日期 $t=0$ 和期末日期 $t=1$，在这两个日期里含有可能的交易和消费。
- 有限样本空间 Ω，含有 $K<\infty$个元素：

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_K\}$$

这里每一个 $\omega\in\Omega$ 应该被认为是世界中一种可能的状态，其在 $t=0$ 时的值是未知的，而在 $t=1$ 时对投资者来讲是清晰可见的。

- Ω 上的概率测度 P，满足$P(\omega)>0$，对于所有 $\omega\in\Omega$。
- 银行账户过程（Bank Account Process）$B=\{B_t: t=0, 1\}$，其中 $B_0=1$，而 B_1 是一个随机变量。[①]银行账户过程将与其他证券区别

开来，因为对于所有 $\omega\in\Omega$，其在 $t=1$ 的价格 $B_1(\omega)$ 将被假定为是严格正的。事实上，通常 $B_1\geqslant 1$，在此情况下 B_1 被认为是当 1 美元在 $t=0$ 时存入银行，在时间 $t=1$ 时银行账户的价值，同时 $r\equiv B_1-1\geqslant 0$ 应被认为是利率（Interest Rate）。对于许多应用来讲，r 和 B_1 都被看成是确定的纯量（即数量）。然而，如果对特
2 殊应用有必要的话，那么 B_1 能够作为一个满足违背约束 $r\geqslant 0$ 的正随机变量。

- 价格过程（Price Process）$S=\{S_t:t=0,1\}$，其中 $S_t=(S_1(t),S_2(t),\cdots,S_N(t)),N<\infty$，而 $S_n(t)$ 是证券 n 在时间 t 时的价格。对许多应用来讲，这 N 个风险证券是股票。在 $t=0$ 时，价格是正的纯量，对此投资者是知晓的，而在 $t=1$ 时价格是非负的随机变量，其价值仅仅在 $t=1$ 时才被投资者所知道。当 $N=1$ 时，t 时的价格简单地写成 S_t。

为了阐述模型就要详细说明所有因素，下一步是定义几个有意思的量。交易策略（Trading Strategy）$H=(H_0,\ H_1,\ \cdots,\ H_N)$ 是指投资者持有将从时间 $t=0$ 到时间 $t=1$ 的投资组合。特别，纯量 H_0 是指投资于储蓄账户上的美元数量，而对于 $n\geqslant 1$，纯量 H_n 是指证券 n 在时间 $t=0$ 和时间 $t=1$ 之间持有的单位数量（例如，股票股数）。通常，H 能够为正的或者负的（负的意味着借入或卖空），但是有时存在着对交易策略来说可行的约束规定说明（例如，$H_n\geqslant 0$ 对于 $n\geqslant 1$；也就是说风险证券不允许卖空）。

价值过程（Value Process）$V=\{V_t:t=0,\ 1\}$ 描述投资组合每一时点的总价值。利用简单簿记形式，此为

$$V_t\equiv H_0B_t+\sum_{n=1}^{N}H_nS_n(t),\quad t=0,1$$

注意到，价值过程依赖于交易策略 H 的选择，从而 V_1 是一个随机变量。

增益过程（Gains Process）G 是用来描述投资组合在时间 0 和 1 之间所产生的总损益。由于 $H_n(S_n(1)-S_n(0))$ 是一个净利润，这归功于对第 n 种证券的投资（类似地，还有银行账户），所以增益过程是

$$G \equiv H_0 r + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n$$

其中，利用标准记号$\Delta S_n \equiv S_n(1) - S_n(0)$。

简单计算可验证

$$V_1 = V_0 + G \tag{1.1}$$

因而，方程（1.1）表明投资组合价值上的任何变化必归因于投资上的损益变动与否，例如，由于获得外部资金的加入。

证券价格相互之间对比的变化将是研究的重点，因此，以银行账户作为常数的方式来标准化各种价格会是方便的。换句话说，我们将把银行账户作为币制（Numeraire）。为此，我们通过设

$$S_t^* \equiv (S_1^*(t), \cdots, S_N^*(t)) \text{及 } S_n^*(t) \equiv S_n(t)/B_t, \quad n = 1, \cdots, N; \quad t = 0, 1$$ 3

定义折现价格过程（Discounted Price Process）$S^* = \{S_t^*: t = 0, 1\}$。通过设

$$V_t^* \equiv H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t), \quad t = 0, 1$$

定义折现价值过程（Discounted Value Process）$V^* = \{V_t^*: t = 0, 1\}$，通过设随机变量

$$G^* \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*$$

定义折现增益过程（Discounted Gains Process）G^*，其中，正如人们所猜到那样，$\Delta S_n^* \equiv S_n^*(1) - S_n^*(0)$。利用某种更基础的簿记，人们最终得到

$$V_t^* = V_t / B_t, \quad t = 0, 1 \tag{1.2}$$

同时也得到方程（1.1）对应的折现形式，即

$$V_1^* = V_0^* + G^* \tag{1.3}$$

例 1.1 假设 $K=2$，$N=1$，$r=1/9$，$S_0=5$，$S_1(\omega_1)=20/3$ 和 $S_1(\omega_2)=40/9$。从而 $B_1=1+r=10/9$，$S_1^*(\omega_1)=6$ 和 $S_1^*(\omega_2)=4$。对于任意一个交易策略 H，我们有 $V_0=V_0^*=H_0+5H_1$，同时

$$\begin{aligned} V_1 &= (10/9)H_0 + H_1S_1 \qquad & V_1^* &= H_0 + H_1S_1^* \\ G &= (1/9)H_0 + H_1(S_1-5) \qquad & G^* &= H_1(S_1^*-5) \end{aligned}$$

因而，在状态 ω_1 时

$$\begin{aligned} V_1 &= (10/9)H_0 + (20/3)H_1 \qquad & V_1^* &= H_0 + 6H_1 \\ G &= (1/9)H_0 + (5/3)H_1 \qquad & G^* &= H_1 \end{aligned}$$

而在状态 ω_2 时

$$\begin{aligned} V_1 &= (10/9)H_0 + (40/9)H_1 \qquad & V_1^* &= H_0 + 4H_1 \\ G &= (1/9)H_0 - (5/9)H_1 \qquad & G^* &= -H_1 \end{aligned}$$

容易验证，方程（1.1）到（1.3）对于这两个 $\omega\in\Omega$ 都成立。

例 1.2 与例 1.1 每一处都相同，取 $K=3$，并令 $S_1(\omega_3)=30/9$，因而 $S_1^*(\omega_3)=3$。其他有意思的几个量留给读者来完成。尽管这是一个简单的改动，但是稍后将证明，这一模型的特征在本质上产生了变化。

例 1.3 考察以两种风险证券为特征的简单模型，假设 $K=3$，$r=1/9$ 和价格过程如下：

4

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	60/9	60/9	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

由此得出，折现价格过程是由下表给出：

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

其他有意思的几个量留给读者来完成。

例 1.4 正如稍后将证明的那样，很小的改动会促使模型产生本质上不同的特征。与例 1.3 每一处都相同，取 $K=4$，并令状态 ω_4 中的价格是 $S_1(1)=20/9$ 柒 $S_2(1)=120/9$ 。现在折现价格过程是：

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1	5	6	6	4	2
2	10	12	8	8	12

习题 1.1 验证（1.2）。

习题 1.2 验证（1.3）。

习题 1.3 对

(a) 例 1.2

(b) 例 1.3

(c) 例 1.4

详细阐明 V，V^*，G 和 G^*。

1.2 套利与其他经济背景

为使单时期模型从经济学观点来看是合情合理的，它就必须满足各种各样的准则。例如，如果投资者在没有任何损失资金的风险或者获利失败的条件下，能够通过交易获取利润，那么这种模型将是不合情理的。如果存在占优交易策略，那么这样的情形将产生。

一个交易策略 H 称为占优的（Dominant），如果存在另外一个交易策

略比如 $\widetilde{H}$，使得 $\hat{V}_0=\widetilde{V}_0=0$ 及 $\hat{V}_1(\omega)>\widetilde{V}_1(\omega)$，对于所有 $\omega\in\Omega$。换句话
5 说，两个交易开始拥有相同的资金数，而占优策略一定在结束时拥有更多的资金。

如果 H 是一个满足 $V_0=0$ 及 $V_1(\omega)>0$，对于所有 $\omega\in\Omega$ 的交易策略，那么 H 就是占优策略，因为它优于开始资金数为零，而全然不投资的那种策略，相反地，如果交易策略 $\hat{H}$ 优于交易策略 $\widetilde{H}$，那么通过定义新的交易策略 $H=\hat{H}-\widetilde{H}$，利用 V 定义中的线性性质，由此可得 $V_0=\hat{V}_0-\widetilde{V}_0=0$ 及 $V_1(\omega)=\hat{V}_1(\omega)-\widetilde{V}_1(\omega)>0$，对于所有 $\omega\in\Omega$。换句话说，下面的陈述是正确的。

(1.4) 存在占优交易策略，当且仅当存在一个交易策略满足 $V_0=0$ 及 $V_1(\omega)>0$，对于所有 $\omega\in\Omega$。

注意到，(1.4) 中的条件从经济学观点来看是不合情理的；开始拥有零数值资金的投资者不可能保证结束时拥有正数值资金的方法。因而，有占优交易策略的证券市场不能成为现实市场。

令人不感到意外的是，如果存在一个占优交易策略，那么存在一个能促使严格负的初始财富转变成为非负财富的交易策略。为了看到这点，假设 H 满足 (1.4) 中的条件。然后利用 (1.2) 和 $B_t>0$ 的事实，人们得到 $V_0^*=0$ 及 $V_1^*(\omega)>0$，对于所有 $\omega\in\Omega$。从而，由(1.3)知$(H_1,\cdots,H_N)$必使得$G^*(\omega)>0$，对于所有 $\omega\in\Omega$。现在通过设 $\widetilde{H}_n=H_n$，对于 $n=1,\cdots,N$，定义一个新的策略 $\widetilde{H}$，从而

$$\widetilde{H}_0=-\sum_{n=1}^{N}H_nS_n^*(0)-\delta$$

其中

$$\delta\equiv\min_{\omega}G^*(\omega)>0$$

由 $\widetilde{V}_t^*$ 的定义可得，$\widetilde{V}_0^*=-\delta<0$ 及 $V_1^*(\omega)=\widetilde{V}_0^*+\widetilde{G}^*(\omega)=-\delta+\widetilde{G}^*(\omega)\geqslant 0$，对于所有 $\omega\in\Omega$。因此，再用一次 (1.2)，$\widetilde{H}$ 是如所要求的那样。

相反地，假设存在一个像 $\widetilde{H}$ 的交易策略。然后，将前面论述颠倒一下，人们看到 $(\widetilde{H}_1,\cdots,\widetilde{H}_N)$ 使得$\widetilde{G}^*(\omega)>0$，对于所有 $\omega\in\Omega$。因此，

凭借设 $H_n = \widetilde{H}_n$，对于 $n=1$，…，N 及

$$H_0 = -\sum_{n=1}^{N} \widetilde{H}_n S_n^*(0)$$

由此可得，满足 $V_0 = 0$ 和 $V_1(\omega) > 0$，对于所有 $\omega \in \Omega$ 的新交易策略。考虑到（1.4），这意味着存在另一个等价条件：

(1.5) 存在占优交易策略，当且仅当存在一个满足 $V_0 < 0$ 及 $V_1(\omega) \geqslant 0$，对于所有 $\omega \in \Omega$ 的交易策略。

占优交易策略的存在从另外一种观点来看是不满足的：它将导致不合逻辑的定价。由于显而易见的理由，人们把 $V_1(\omega)$ 解释成时间 $t=1$ 时的 6
合约或者权益的收益，当状态 ω 合宜时，这常常是有价值的，在此情况下 V_0 能够被认为是在时间 $t=0$ 时这个权益的价格。但是，如果交易策略 $\hat{H}$ 优于 $\widetilde{H}$，尽管前者权益在每一种状态 ω 中拥有严格的较多的收益，那么未定权益 $\hat{V}$ 和 $\widetilde{V}$ 都有相同的价格。这与现实情况不符。

如果存在一个线性定价测度（Linear Pricing Measure），也就是存在一个非负向量 $\pi = (\pi(\omega_1), \cdots, \pi(\omega_K))$，使得对每一个交易策略 H，你都有

$$V_0^* = \sum_{\omega} \pi(\omega) V_1^*(\omega) = \sum_{\omega} \pi(\omega) V_1(\omega) / B_1(\omega)$$

那么权益定价在逻辑上将是一致的。现在注意到，与占优交易策略联系的不合理的定价不再存在；每一个权益都有惟一的价格，而在每一种状态中比其他的都有更多支付的权益将在时间 $t=0$ 时具有较高的价格。

如果存在一个线性定价测度 π，那么由其定义和 V_t^* 的含义，人们得到

(1.6) $$H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) \left[H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(1)(\omega) \right]$$

取 $H_1 = \cdots = H_N = 0$，能够看到线性定价测度必须满足 $\pi(\omega_1) + \cdots + \pi(\omega_K)$

$=1$；这样人们把 π 解释成样本空间 Ω 上的一个概率测度。对任意 $i\in\{1,\cdots,N\}$，取满足 $H_n=0$ 的交易策略对于所有 $n\neq i$，人们看出此方程蕴含着

$$S_n^*(0)=\sum_{\omega}\pi(\omega)S_n^*(1)(\omega),\quad n=1,\cdots,N \tag{1.7}$$

相反地，假设 π 是 Ω 上满足（1.7）的概率测度，那么（1.6）将满足，由此可得：

(1.8) 向量 π 是一个线性定价测度，当且仅当它是 Ω 上满足（1.7）的概率测度。

由于一个线性定价测度能成为一个概率，所以（1.7）表明每一种证券的初始价格等于其最终折现价格在 π 下的期望（Expectation）。[②]类似地，利用 π 的原始定义，任何投资组合的初始价值 V_0 等于此投资组合在最终折现价格 π 下的期望。

可以证明，在占优交易策略和线性定价测度之间存在着密切的关系。

(1.9) 存在一个线性定价测度，当且仅当不存在占优交易策略。

这一重要原则能够运用线性规划的对偶理论来证实。[③]特别，设 $\pi\in\mathbb{R}^K$ 是一个列向量，设 $Z\in\mathbb{R}^{N+1}$表示一个列向量

7

$$Z=\begin{pmatrix}S_1^*(0)\\ \vdots\\ S_N^*(0)\\ 1\end{pmatrix}$$

并且设$\mathbb{Z}$表示 $(N+1)\times K$ 矩阵

$$\mathbb{Z}=\begin{pmatrix}S_1^*(1,\omega_1)\cdots S_1^*(1,\omega_K)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ S_N^*(1,\omega_1)\cdots S_N^*(1,\omega_K)\\ 1 \qquad \cdots \qquad 1\end{pmatrix}$$

然后，由（1.8）知，线性定价测度的存在性蕴含着线性规划解的存在性。

(1.10)

$$\begin{aligned} \max \quad & (0,\ \cdots,\ 0)\pi \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{Z}\pi = Z \\ & \pi \geqslant 0 \end{aligned}$$

利用对偶理论，必存在对偶线性（Dual Linear）规划

(1.11)

$$\begin{aligned} \min \quad & hZ \\ \text{s.t.} \quad & h\mathbb{Z} \geqslant 0 \end{aligned}$$

的解 $h=(h_1,\ \cdots,\ h_{N+1})$，从而两个最优化目标值必重合（显然在它们都等于零的情况下）。现在把（1.11）中的解解释成为交易策略，且 h 的最后分量对应于 H_0。（1.11）中的目标函数表明 $V_0^*=0$，而约束表示 $V_1^*(\omega)\geqslant 0$，对于所有 $\omega\in\Omega$。由于最小化策略 h 具有等于零的目标值，所以任何满足 $V_0<0$ 和 $V_1(\omega)\geqslant 0$，对于所有 $\omega\in\Omega$ 的交易策略均不能够存在。因此，利用（1.5），线性定价测度的存在性蕴含着任何占优策略均不能够存在。

相反地，如果不存在占优交易策略，那么（1.11）有解，即 $h=0$。利用对偶理论可得到（1.10）有如上解释的解 π，它能够作为线性定价测度。

为了概述这一点，允许占优交易策略存在的证券市场模型从经济学观点来看是不合情理的。此外，没有占优交易策略的模型是合理的，因为模型中具有线性定价测度。因而，有意义的是对后一类模型的关注。但是，在同意从背景考虑中删去所有具有占优交易策略之前，值得一提的是，人们能够拥有稍欠合理性的证券市场模型。

称证券市场模型是满足一价定律的（Law of One Price），如果不存在
两个交易策略 $\hat{H}$ 和 $\tilde{H}$，使得 $\hat{V}_1(\omega)=\tilde{V}_1(\omega)$，对于所有 $\omega\in\Omega$ 而 $\hat{V}_0>$ 8
$\tilde{V}_0$。换句话说，如果一价定律成立，那么在时间 $t=0$ 时任何权益的价格都不是模棱两可的。另一方面，如果两个不同的交易策略在时间 $t=1$ 时产生相同的收益，但是对应的两个投资组合的初始价值却是不同的，那么一价定律不成立。此概念如上所述，其恰好追随（1.5）原则。

注意到，如果不存在两个不同的交易策略在时间 $t=1$ 时产生相同的

收益，那么一价定律自然满足。另一方面，如果 $\hat{H}$ 和 $\widetilde{H}$ 正如前面一段所述，那么 $\hat{V}_1^* = \widetilde{V}_1^*$ 和 $\hat{V}_0^* > \widetilde{V}_0^*$，接下来推出 $\hat{G}^*(\omega) < \widetilde{G}^*(\omega)$，对于所有 $\omega \in \Omega$。借助于取 $H_n = \widetilde{H}_n - \hat{H}_n$，对于 $n = 1, \cdots, N$，定义一个新的交易策略 H，其得出 $G^*(\omega) > 0$ 对于所有 $\omega \in \Omega$。最后，取 $H_0 = -\sum H_n S_n^*(0)$，这导致 $V_0 = 0$ 和 $V_1(\omega) > 0$，对于所有 $\omega \in \Omega$。因而，由（1.4）下面的陈述是成立的。

(1.12) 如果不存在占优交易策略，那么一价定律成立。然而，反之未必成立。

换句话说，如果一价定律不成立，那么将存在一个占优交易策略。反之未必成立，因为正如例 1.5 将阐述的那样，你能够获得一个满足一价定律的占优交易策略的模型。这样，在某种意义上讲，一价定律不成立比拥有占优交易策略更糟。

例 1.5 取一个一价定律不成立的平凡事例，设 $K = 2$，$N = 1$，$r = 1$，$S_0 = 10$，并且 $S_1(\omega_1) = S_1(\omega_2) = 12$。因而 V_1 是 Ω 上的常数，且对任一个数量 λ 存在无限多个满足 $V_1 = \lambda$ 的交易策略，其中每一个都有一个不同的 V_0 值。

现在假设 $S_1(\omega_2)$ 变化到数值 8。对于任何 $X \in \mathbb{R}^2$ 存在惟一 H（这样，在时间 $t = 0$ 时价格惟一），使得 $V_1 = X$，所以一价定律必成立。然而，交易策略 $H = (10, -1)$ 满足 $V_0 = 0$ 及 $V_1 = (8, 12)$，从而它必是一个占优交易策略。

转到没有占优交易策略的模型类型上，显然这样模型不能具有开始的零数值财富，而在时间 $t = 1$ 时必定拥有严格为正数值的财富。但是，以零数值资金开始的交易策略如何不损失任何资金，且在时间 $t = 1$ 时至少有一种状态 ω 结束时拥有严格为正数值的财富，而不是所有的情况都对？换句话说，在没有暴露招致损失风险条件下，投资者拥有通过交易获取利润的可能性。这样的投资机会称为套利机会，而从经济学观点来看，它是不合理的。

正式地讲，套利机会（Arbitrage Opportunity）是指某一交易策略 H，使得

(a) $V_0 = 0$，

(b) $V_1 \geqslant 0$ 以及

9 (c) $EV_1 > 0$。

注意到，套利机会是一种获得资金的无风险方法：你开始什么都没有，同时没有具有债务的任何机会，那么存在一种结束时拥有正数值资金的机会。如果这种情形存在，那么每一个人会带着此交易策略“加入”进来，影响到证券的价格。这种经济模型不是处于均衡之中。由于我们的单时期模型从经济学观点来看是切合实际的，因而不存在任何套利机会。

根据（1.4）下面原则是成立的，而例 1.6 说明了这点。

(1.13) 如果存在占优交易策略，那么就存在套利机会，但是，反之未必成立。

例 1.6 设 $K=2$，$N=1$，$r=0$，$S_0=10$，$S_1(\omega_1)=12$ 及 $S_1(\omega_2)=10$（对于一种股票，下标表示时间）。交易策略 $H=(-10,\ 1)$ 是一个套利机会，因为 $V_0=0$ 而 $V_1=(2,\ 0)$。然而，因为 π 是一个线性定价测度，所以不存在占优交易策略。

由（1.2）及 $B_t>0$ 对于所有 t 和 ω，可容易推得，H 是一个套利机会，当且仅当

(a) $V_0^*=0$,

(b) $V_1^*\geqslant 0$ 以及

(c) $EV_1^*>0$。

事实上，存在另外一个等价条件：

(1.14) H 是一个套利机会，当且仅当

(a) $G^*\geqslant 0$

(b) $EG^*>0$ 以及，

(c) $V_0^*=0$。

为了理解这点，假设 H 是一个套利机会。根据（1.3）$G^*=V_1^*-V_0^*$，所以运用前面说明 $G^*\geqslant 0$，从而 $EG^*=EV_1^*-EV_0^*=EV_1^*>0$。相反地，假设（1.14）中的（a）及（b）被某一交易策略 $\hat{H}$ 所满足，那么考虑策略 $H=(H_0,\ \hat{H}_1,\ \cdots,\ \hat{H}_N)$，其中

$$H_0=-\sum_{n=1}^{N}\hat{H}_nS_n^*(0)$$

在 H 条件下，人们有 $V_0^*=0$。此外，依据（1.3）有 $V_1^*=V_0^*+G^*=G^*$。因此，(1.14) 中的（a）及（b）蕴含 $V_1^*\geqslant 0$ 和 $EV_1^*>0$，在此情况下，由前面说明得知 H 是一个套利机会。

概括地讲，如图 1.1 中所指示的那样，所有单时期证券市场模型能够被分成四种类型：(1) 不存在套利机会；(2) 存在套利机会，而不存在占优交易策略；(3) 存在占优交易策略，且一价定律成立；(4) 一价定律不成立。从经济学观点来看，仅有第一种类型是合理的。

10

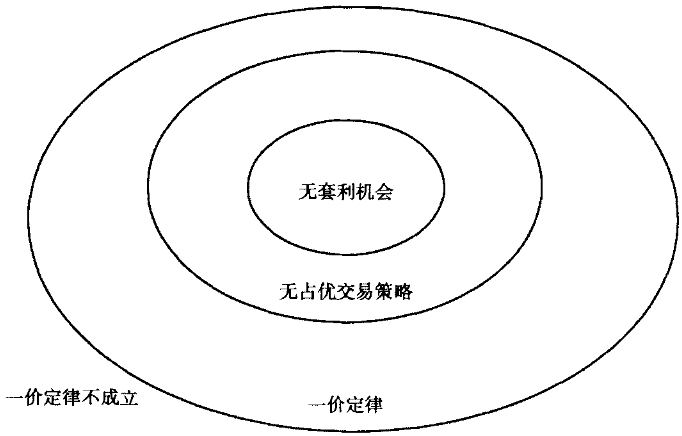


图 1.1　证券市场模型的分类

令人遗憾的是，当至少存在两种或更多的风险证券时，不容易直接检验一个模型是否具有套利机会。但是，存在一个判断模型是无套利机会的重要的必要且充分条件。此条件涉及折现价格过程和所谓的风险中性概率测度，后者是线性定价测度的一个特殊形式。它将是下一节的主题。

习题 1.4　考察满足 $K=3$，$N=2$，$r=0$ 以及下面证券价格的模型：

n	$S_n(0)$	$S_n(1)(\omega_1)$	$S_n(1)(\omega_2)$	$S_n(1)(\omega_3)$
1	4	8	6	3
2	7	10	8	4

证明存在占优交易策略，并且一价定律成立。

习题 1.5　证明例 1.3 不存在占优交易策略，而存在套利机会。

1.3 风险中性概率测度

在前一节中已经解释，如果不存在线性定价测度，那么占优交易策略就不能够存在，尽管还能存在着套利机会。为了排除套利机会，我们需要增加一些条件：必存在一种对每一种状态 $\omega\in\Omega$ 都严格地给出其正质量的线性定价测度。

Ω 上的概率测度 Q 称为风险中性概率测度（Risk Neutral Probability），如果 Q 满足

(a) $Q(\omega)>0$，所有 $\omega\in\Omega$ 以及

(b) $E_Q[\Delta S_n^*]=0$，$n=1, 2, \cdots, N$。

其中，记号$E_Q[X]$ 表示随机变量 X 在概率测度 Q 下的期望值。注意到

$$E_Q[\Delta S_n^*]=E_Q[S_n^*(1)-S_n^*(0)]=E_Q[S_n^*(1)]-S_n^*(0)$$

所以$E_Q[\Delta S_n^*]=0$ 等价于

(1.15) $$E_Q[S_n^*(1)]=S_n^*(0), \quad n=1,2,\cdots,N$$

这在本质上与（1.7）是相同的，即表明每一种风险证券在指定的概率测度下，其在时间 $t=1$ 时折现价格的期望值等于它的初始价格。因此，风险中性概率测度正好是对每一种状态 $\omega\in\Omega$ 都严格给出正质量的一种线性定价测度。

现在我们得出一个非常重要的结果：

(1.16) 不存在套利机会，当且仅当存在一个风险中性概率测度 Q。

在证明这个结果之前，考察一些例子并提供某种直觉是值得的。

例 1.1（续） 我们想要严格地找出正数$Q(\omega_1)$和 $Q(\omega_2)$，使得（1.5）成立，也就是

$$5=6Q(\omega_1)+4Q(\omega_2)$$

同时 Q 必是一个概率测度，所以它必须满足

$$1 = Q(\omega_1) + Q(\omega_2)$$

容易看出$Q(\omega_1) = Q(\omega_2) = 1/2$ 满足两个方程，因而这是一个风险中性概率测度，并由（1.16）知不存在套利机会。

当然，对于这一简单例子，从折现价格过程易知它不存在套利机会。实际上，原则（1.16）在有一个风险证券（也就是 $N=1$）的情况下，是容易理解的。从定义看，存在套利机会当且仅当人们能够在折现价格过程 S^* 中找到一个头寸 H_1，使其将来可能获利而没有损失。这意味着或者
12 $\Delta S^* \geqslant 0$ 满足 $\Delta S^*(\omega) > 0$ 对于至少一个 $\omega \in \Omega$，或者 $S^* \leqslant 0$ 满足 $\Delta S^*(\omega) < 0$ 对于至少一个 $\omega \in \Omega$。显然，在这两种情况下，不可能严格找到满足（1.15）的正概率测度。另一方面，如果两者均不成立，那么人们能够找到一个风险中性概率测度，且不存在套利机会。

例 1.2（续）　方程组有解，也就是

$$\begin{aligned} 5 &= 6Q(\omega_1) + 4Q(\omega_2) + 3Q(\omega_3) \\ 1 &= \ \ Q(\omega_1) + \ \ Q(\omega_2) + \ \ Q(\omega_3) \end{aligned}$$

包含有 3 个未知量，且仅有 2 个方程，所以我们将依据第 3 个未知量，比如$Q(\omega_1)$，来求解另外 2 个未知量。这样，此方程组对于任一实数$Q(\omega_1)$将有解，如果

$$Q(\omega_2) = 2 - 3Q(\omega_1) \quad 和 \quad Q(\omega_3) = -1 + 2Q(\omega_1)$$

现在为使 Q 成为严格的概率测度，我们必须有$Q(\omega_i) > 0$ 对于所有 i。运用上面的 2 个方程，这可得出关于$Q(\omega_1)$ 的 3 个不等式，包括$Q(\omega_1) > 0$ 。考虑其方程，$Q(\omega_2) > 0$ 当且仅当$Q(\omega_1) < 2/3$。类似地，$Q(\omega_3) > 0$ 当且仅当 $Q(\omega_1) > 1/2$ 。因而，我们得出的解是严格正的概率测度，当且仅当 $1/2 < Q(\omega_1) < 2/3$ 。换句话说，对于满足 $1/2 < \lambda < 2/3$ 的每一个 λ 值，$Q = (\lambda, 2-3\lambda, -1+2\lambda)$是一个风险中性概率，且不存在套利机会。

例 1.3（续）　我们求方程组的解

$$
\begin{aligned}
5 &= \quad 6Q(\omega_1) + 6Q(\omega_2) + 4Q(\omega_3) \\
10 &= 12Q(\omega_1) + 8Q(\omega_2) + 8Q(\omega_3) \\
1 &= \quad\ \ Q(\omega_1) + Q(\omega_2) + Q(\omega_3)
\end{aligned}
$$

对这些方程的求解得出惟一的解，即$Q(\omega_1)=Q(\omega_3)=1/2, Q(\omega_2)=0$。这是一个线性定价测度，但是此解不严格为正，所以不存在风险中性概率测度。因此，由（1.16）知必存在套利机会。寻找套利机会花费一些时间；稍后，我们将回到此例题上。

例 1.3 阐明对单个风险证券的情况起作用的直觉为什么对具有两个或者更多风险证券的情况不管用。对第一个证券考察折现价格过程，显然我们能够找到严格正的概率测度 Q 满足$E_Q[S_1^*(1)]=5$。类似地，对第二个风险证券亦可以这样做。然而，问题是我们不能够找到一个严格正的概率测度，使其同时对两种证券都起作用。尽管这两种证券之间的相互影响会使套利成为可能，就单个证券来考虑，这些证券看起来都是值得接受 13
的。当存在两个或者更多风险证券时，运用理解原则（1.16）的直觉方法来对待这些相互影响就显得非常困难。

这三个例子阐明了三种情况，它们能产生：（1）或者存在惟一的风险中性概率测度；（2）存在无穷多个风险中性概率测度；（3）或者不存在风险中性概率测度。

现在我们转回到对于 $N \geqslant 2$ 情况时（1.16）的解释上。对一般的单时期模型，考察集合

$$
\mathbb{W} = \{X \in \mathbb{R}^K : X = G^* \text{ 对于某一个交易策略 } H\}
$$

人们将把$\mathbb{W}$看成是一个随机变量集合，且由于（1.3）人们把每一个 $X \in \mathbb{W}$认为是时间 $t=1$ 时可能的折现财富，当投资的初始值为零时，注意到，$\mathbb{W}$确实是$\mathbb{R}^K$ 的一个线性子空间，也就是对于任意的 X，$\hat{X} \in \mathbb{W}$，以及任意的纯量 a 和 b，亦有 $aX + b\hat{X} \in \mathbb{W}$。

其次，考察集合

$$
\mathbb{A} \equiv \{X \in \mathbb{R}^K : X \geqslant 0,\ X \neq 0\}
$$

这正是$\mathbb{R}^K$ 的非负象限。鉴于（1.14），显而易见，存在套利机会当且仅

当$\mathbb{W} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$，也就是当且仅当子空间$\mathbb{W}$与$\mathbb{R}^K$的非负象限相交。因此，为了在不存在风险中性概率测度的模型中寻找套利机会，人们能运用线性代数知识来数量性地刻画$\mathbb{W}$的特征，然后计算出$\mathbb{W}$与$\mathbb{A}$相交集合中的向量。

现在对应于子空间$\mathbb{W}$的是正交子空间$\mathbb{W}^{\perp}$，即

$$\mathbb{W}^{\perp} \equiv \{Y \in \mathbb{R}^K : X \cdot Y = 0 \quad \text{对于所有 } X \in \mathbb{W}\}$$

其中 $X \cdot Y = X(\omega_1)Y(\omega_1) + \cdots + X(\omega_K)Y(\omega_K)$ 表示 X 与 Y 的内积。如果你考察 $K=2$ 的几何图像（参见图 1.2）甚至 $K=3$ 的情况，容易相信 $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \emptyset$ 蕴含着$\mathbb{W}^{\perp}$中沿着不为原点的每一点的每一个分量均是严格正的那种点，其射线是存在的。[④]特别，沿着这个射线存在着分量之和为 1 的点，在此情况下该点被解释成概率测度。换句话说，记号

$$\mathbb{P}^{+} \equiv \{X \in \mathbb{R}^K : X_1 + \cdots + X_K = 1, \; X_1 > 0, \; \cdots, \; X_K > 0\}$$

14

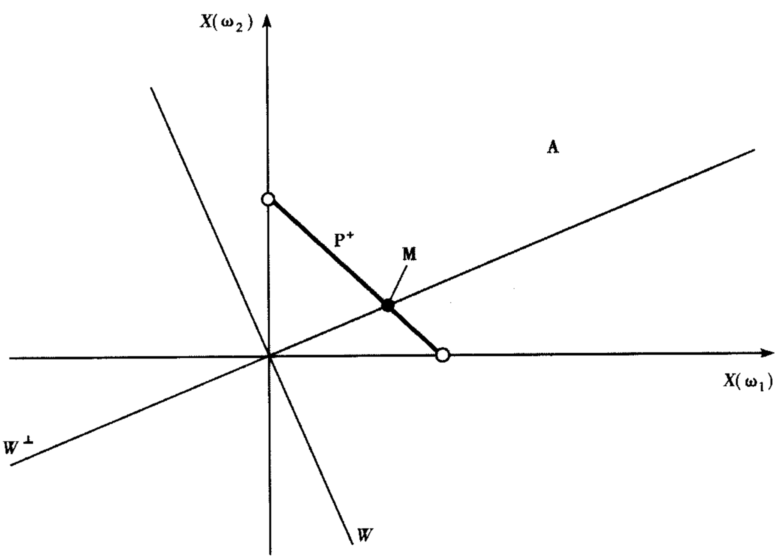


图 1.2　风险中性概率测度的几何解释

其几何学意义暗示着$\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \emptyset$，当且仅当$\mathbb{W}^{\perp} \cap \mathbb{P}^{+} \neq \emptyset$。

由于 $\Delta S_n^* \in \mathbb{W}$ 对于所有 n，由此可见，集合 $\mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$ 中的任一元素实际上是一个风险中性概率测度。相反，如果 Q 是任一风险中性概率测度，那么对于任一 $G^* \in \mathbb{W}$（与交易策略 H 所对应的），我们有

$$(1.17) \qquad \mathrm{E}_Q \mathrm{G}^* = \mathrm{E}_Q\Big[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta \mathrm{S}_n^*\Big] = \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q[\mathrm{S}_n^*] = 0$$

从而 $Q \in \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$。这样，设 $\mathbb{M}$ 表示所有风险中性概率测度的集合，我们有

$$\mathbb{M} = \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$$

此外，凭借上述所用的几何直觉，我们推测 $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \varnothing$，当且仅当 $\mathbb{M} \neq \varnothing$。当然，此推测是与原则（1.16）相同的。

为使这个讨论更严谨，并且把其应用到一般情况 K 上，运用被称为超平面分离定理的 Hahn—Banach 定理的特殊形式是方便的。考察集合

$$\mathbb{A}^+ = \{X \in \mathbb{A} : EX = 1\}$$

这是 $\mathbb{R}^K$ 的一个有界的、闭的凸子集[⑤]，并且无套利机会蕴含着 $\mathbb{W}$ 和 $\mathbb{A}^+$ 是不相交的。因而，借助于超平面分离定理知，存在某一 $Y \in \mathbb{W}^\perp$ 使得 $X \cdot Y > 0$，对于所有 $X \in \mathbb{A}^+$。对于每一个 $k = 1, \cdots, K$，我们能找到 $\mathbb{A}^+$ 中其第 k 个分量为正而其他分量为零的向量 X，从而 Y 的每一个分量必是严格正的。利用设 $Q(\omega_k) = Y(\omega_k) / [Y(\omega_1) + \cdots + Y(\omega_K)]$，显然 Q 是满足 $Q \in \mathbb{W}^\perp$ 的概率测度。由于 $\Delta S_n^* \in \mathbb{W}$ 对于所有 n，所以我们推断 Q 是一个风险中性概率测度。

原则（1.16）的逆会是怎样呢？这很简单。如果 Q 是风险中性概率测度，那么如上所述，对于任何一个交易策略 H 我们有方程（1.17），其表明 G^* 既不满足 $G^* \geqslant 0$，又不满足 $EG^* > 0$。因此，由（1.14）知不存 15
在任何套利机会，所以我们的推测和原则（1.16）被验证了。

例 1.3（续） 我们知道 $\mathbb{W} \cap \mathbb{A}$ 是非空的，想把它计算出来。已知 S_n^*，人们计算出的 ΔS_n^* 的结果如下：

n	$\Delta S_n^*(\omega_1)$	$\Delta S_n^*(\omega_2)$	$\Delta S_n^*(\omega_3)$
1	1	1	-1
2	2	-2	-2

由此可得

$$\mathbb{W}=\{X\in\mathbb{R}^3: X \\ =(H_1+2H_2, H_1-2H_2, -H_1-2H_2)\quad \text{对于某一个}\quad H_1,H_2\in\mathbb{R}\}$$

注意到，$X_1+X_3=0$ 对于所有 $X\in\mathbb{W}$。反之，已知任一向量 X 满足 $X_1+X_3=0$，人们能够容易地找到惟一的交易策略 H 满足 $G^*=X$。因此

$$\mathbb{W}=\{X\in\mathbb{R}^3: X_1+X_3=0\}$$

也就是

$$\mathbb{W}^{\perp}=\{Y\in\mathbb{R}^3: Y=(\lambda,0,\lambda)\text{对于某一}\lambda\in\mathbb{R}\}$$

现在通过比较$\mathbb{W}$和$\mathbb{A}$，我们看到

$$\mathbb{W}\cap\mathbb{A}=\{X\in\mathbb{R}^3: X_1=X_3=0,\ X_2>0\}$$

所以以任一正数 X_2 作为开始，我们计算出导致时间 $t=1$ 时投资组合价值为（0，X_2，0）的交易策略 H。这将是

$$H_1+2H_2=0$$
$$H_1-2H_2=X_2$$

的解，即 $H_1=X_2/2$ 和 $H_2=-X_2/4$。最后，利用设

$$H_0=-H_1S_1^*(0)-H_2S_2^*(0)=-(X_2/2)(5)-(-X_2/4)(10)$$

人们得到 $H_0=0$。显而易见，$H=(0,\ X_2/2,\ -X_2/4)$ 是一个套利机会对于每一个 $X_2>0$。

习题 1.6 证明$\mathbb{W}$和$\mathbb{W}^{\perp}$均是线性子空间。

习题 1.7 关于

(a) 例 1.1

(b) 例 1.2

(c) 例 1.3

给出$\mathbb{W}$和$\mathbb{W}^{\perp}$的详细说明。

习题 1.8 对例 1.4 来说，或确定所有的风险中性概率测度，或确定所有 16
的套利机会。

习题 1.9 假设 $K=2$，$N=1$ 以及利率是一个纯量参数 $r\geqslant 0$。同时，假设 $S_0=1$，$S_1(\omega_1)=u$（"上升"）和$S_1(\omega_2)=d$（"下跌"），其中参数 u 和d 满足$u>d>0$。对于什么样的 r，u 和d 的值存在风险中性概率测度呢？说明此测度是多少。对于这些参数的互补值而言，说出所有套利机会是什么样的？

习题 1.10 设 A 表示（$K+1$）×（$K+2N$）矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \Delta S_1^*(\omega_1) & -\Delta S_1^*(\omega_1) & \Delta S_2^*(\omega_1) & \cdots & -\Delta S_N^*(\omega_1) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta S_1^*(\omega_2) & -\Delta S_1^*(\omega_2) & \Delta S_2^*(\omega_2) & \cdots & -\Delta S_N^*(\omega_2) & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta S_1^*(\omega_K) & -\Delta S_1^*(\omega_K) & \Delta S_2^*(\omega_K) & \cdots & -\Delta S_N^*(\omega_K) & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

且设 b 表示（$K+1$）分量的列向量（1，0，…，0）′。证明

$$Ax=b, \quad x\geqslant 0, \quad x\in\mathbb{R}^{K+2N}$$

有解当且仅当存在一个套利机会。

习题 1.11 Farkas 引理是超平面分离定理的一种变形，它表明已知一个 $m\times n$ 矩阵A 和m 维列向量b 或者

$$Ax=b, \quad x\geqslant 0, \quad x\in\mathbb{R}^{n}$$

有解，或者

$$yA \leqslant 0, \quad yb > 0, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

有解，然而两者不能都成立。运用这个引理和习题 1.10 的结果证明，如果不存在套利机会，那么存在一个风险中性概率测度。

1.4 未定权益的估值

未定权益（Contingent Claim）是一个表示在时间 $t=1$ 时收益的随机变量。你能把未定权益看成是买者和卖者在时间 $t=0$ 时签订合约的一个组成部分。卖者承诺在时间 $t=1$ 时支付给买者价值数为 $X(\omega)$，如果 $\omega \in \Omega$ 被证明是现实世界中的真实状态。因此，在时间 $t=0$ 来考察问题
17 时，收益 X 是一个随机变量，所以有意思的是确定时间 $t=0$ 时此收益的价值。换句话说，买者在时间 $t=0$ 应支付给卖者的公正价格是多少，才会使买卖双方对其合约感到满意？

现在人们认为未定权益的价值应该依赖于买卖双方的风险偏好和效用函数，然而在相当多数情况下却不是这样的。运用套利定价理论（Arbitrage Pricing Theory）可以证明在时间 $t=0$ 时未定权益存在惟一的、正确的价值，这个价值不依赖于买卖双方对此权益的风险偏好。

这里就给出论证。一个未定权益 X 称为可达的（Attainable）或者市销的（Marketable），如果存在某一交易策略 H，使得 $V_1=X$，这时称 H 为复制投资组合。在这种情况下，人们称 H 生成 X。现在假设时间 $t=0$ 时 X 的价格使得 $p>V_0$，那么一个精明的个体者在时间 $t=0$ 以价格 p 卖出此未定权益，在时间 $t=0$ 时以 V_0 的成本实施一个交易策略 H，从而赚取差值 $p-V_0$。这一个体者获得一个无风险的利润，因为在时间 $t=1$ 对应于 H 的投资组合价值 V_1 确实等于该未定权益在每一个现实状态中的负债。换句话说，如果 $p>V_0$，那么，这个精明的个体者会利用对投资组合的投资来锁定利润 $p-V_0$，而此投资组合刚好提供了结算未定权益负债（Obligation）的价值。

类似地，如果 $p<V_0$，那么精明的个体者会实施交易策略 $-H$，因此在时间 $t=0$ 时集资数量为 V_0，并以此购买数值为 p 的未定权益，从而锁定无风险利润 V_0-p。在时间 $t=1$ 时所集资数目刚好是结算与交易

策略 $-H$ 相联系的负债 V_1 所必需的。结果，如果 $p<V_0$，那么这个精明的个体者能够锁定无风险的利润 V_0-p。

如果 $p=V_0$，那么我们显然不能够运用 H 来产生一个无风险利润。这种情况是否意味着 V_0 是 X 的正确价值呢？不一定，因为假设存在第二个交易策略，比如说 $\hat{H}$，使得 $\hat{V}_1=X$，但 $\hat{V}_0\neq V_0$。于是，虽然 $p=V_0$，人们能够运用 $\hat{H}$ 及上面论证的方法去锁定无风险利润，从而必然包含不同的价格 $\hat{V}_0$，当然，此处的问题是一价定律不满足。因而，由于 V_0 是在时间 $t=0$ 时惟一的、符合逻辑的价格，所以有必要假设一价定律确实是成立的。在这种情况下，我们说 V_0 是 X 的价格，这一情况可由套利定价理论推出。

正如 1.2 节中所解释的那样，如果不存在套利机会，那么就不存在占交易策略，并且如果不存在占优交易策略，那么一价定律成立。这样利用 (1.16) 知，风险中性概率测度的存在蕴含着一价定律。如其不然，我们能够从下面非常重要的计算中直接看到这点：

(1.18) 如果 Q 是任一风险中性概率测度，那么对于每一个交易策略 H，人们有 18

$$
\begin{aligned}
V_0 = V_0^* &= E_Q V_0^* = E_Q[V_1^* - G^*] = E_Q V_1^* - E_Q\Big[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\Big] \\
&= E_Q V_1^* - \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q[\Delta S_n^*] = E_Q V_1^* - 0 = E_Q V_1^* \\
&= E_Q[V_1/B_1]
\end{aligned}
$$

换句话说，在 Q 下任一投资组合在时间 $t=1$ 时的期望折现等于其初始价值。因此，如果存在一个促使投资组合价值上涨的正概率，那么也必存在一个使其价值下跌的正概率，并且反之亦然。此外，如果没有任何方法使你有两个交易策略 H 和 $\hat{H}$，满足 $V_1=\hat{V}_1$ 且 $V_0\neq\hat{V}_0$，那么一价定律必成立。

为使将来参考方便，注意到 (1.18) 中的计算不依赖于 Q 的选择。因为 V_1^* 是在时间 $t=1$ 时投资组合在某一交易策略下的折现价值。换句话说，对于存在两个或者更多个风险中性概率测度的模型而言，$E_Q V_1^*$ 相对于 Q 而言是一个常数。

转回到未定权益 X 方面，利用本节开头的论证我们得到下面重要的估值概念：

(1.19) 如果一价定律成立，那么在时间 $t=0$ 时可达未定权益 X 的价值是 $V_0 = H_0B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_nS_n(0)$，其中 H 是生成 X 的交易策略。

如果我们具有模型为无套利机会的较强条件，那么我们得到下面极好的结果。

(1.20) 风险中性估值原则：如果单时期模型是无套利机会的，那么在时间 $t=0$ 时，可达未定权益 X 的价值是$E_Q[X/B_1]$，其中 Q 是任一风险中性概率测度。

这是由（1.2）、（1.18）、（1.19）以及 $B_0=1$ 的事实立刻推出。现在我们着手给出几个例子。

例 1.1（续） 假设 $r=1/9$，$X(\omega_1)=7$ 和 $X(\omega_2)=2$，那么倘若 X 是可达的，则 X 在时间 $t=0$ 时的价值是

$$E_Q[X/B_1]=(1/2)(9/10)7+(1/2)(9/10)2=4.05$$

我们怎样验证这点呢？一种方法是试图计算出生成 X 的交易策略。这能够借助于求解

$$X/B_1=V_1^* = V_0^* + G^* = 4.05 + H_1\Delta S_1^*$$

来完成。其中存在一个未知量 H_1，以及对应于每一个 ω 的两个方程，然而两个方程却给出相同的解，即 $H_1=2.25$。为了确定 H_0，我们能够求解

19

$$4.05 = V_0 = H_0 + H_1S_1 = H_0 + (2.25)(5)$$

得到 $H_0=-7.2$。

概括地讲，未定权益 X 确实是可达的。为生成 X，你开始有 4.05，然后以无风险利率 $r=1/9$ 借进 7.2，从而你用总和 $4.05+7.2=11.25$ 去购买 $11.25 \div 5 = 2.25$ 风险资产。在时间 $t=1$ 时，你必须支付

$(7.2)(10/9)=8$ 来偿还贷款。投资组合中保留的资金数将依赖于 ω：在状态 ω_1 这将是 $V_1=(2.25)(20/3)-8=7$，而在状态 ω_2 这将是 $V_1=(2.25)(40/9)-8=2$。如果在时间 $t=0$ 时此未定权益的价值不是 4.05，那么你会按照在本节开始时所讨论的方法运用交易策略锁定无风险利润。

例 1.7 对于一般证券模型，取

$$X(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=\hat{\omega}\\ 0, & \omega\neq\hat{\omega}\end{cases}$$

对于某一 $\omega\in\Omega$ 导致在时间 $t=0$ 时价格（如果 X 是可达的）

$$E_Q[X/B_1]=\sum_{\omega}Q(\omega)X(\omega)/B_1(\omega)=Q(\hat{\omega})/B_1(\hat{\omega})$$

由于这个缘故，对于状态 $\hat{\omega}\in\Omega$，$Q(\hat{\omega})/B_1(\hat{\omega})$ 有时称为状态价格(State Price)。这样，在时间 $t=0$ 时可达未定权益的价格是在 X 下对收益状态的简单加权之和，而权数是状态价格。

例 1.8 买入期权（亦称看涨期权）假设 $N=1$，并且 X 有下面形式

$$X=(S_1-e)^+=\max\{0,S_1-e\}$$

其中 e 是一个指定的数，它称为执行价格（Exercise Price）或敲定价格(Strike Price)。因此，X 是指对应于在时间 $t=1$ 时以数值 e 购买风险证券的未定权益。如果结果为 $S_1\geqslant e$，那么在时间 $t=1$ 时这一权益将相当于差值 S_1-e，所以期权被执行。另一方面，如果 $S_1\leqslant e$，那么在时间 $t=1$时这一权益将一文不值，所以期权将不执行。如果 X 是可达的，那么其在时间 $t=0$ 时的价格是

$$E_Q[X/B_1]=\sum_{\omega\in\Omega'}Q(\omega)[S_1(\omega)-e]/B_1(\omega)$$

其中，$\Omega'\equiv\{\omega\in\Omega:S_1(\omega)\geqslant e\}$。

例 1.1（续） 满足 $r=1/9$ 且 $e=5$，在时间 $t=1$ 时买入期权价值是

$$X(\omega)=\begin{cases}5/3, & \omega=\omega_1\\0, & \omega=\omega_2\end{cases}$$

因此，如果 X 是可达的，那么它在时间 $t=0$ 时价值是

$$E_Q[X/B_1]=(1/2)(9/10)(5/3)=0.75$$

为检验 X 是否可达，我们将试图计算出生成 X 的交易策略。我们求解含有两个方程的方程组（其中每一个方程对应于一种状态）

$$V_1=H_0B_1+H_1S_1=X$$

对于两个未知量，人们得到 $H_1=0.75$ 和 $H_0=-3$。所以，实际上 $V_0=H_0+H_1S_0=-3+(0.75)(5)=0.75$ 是 X 在时间 $t=0$ 时的价格。

例 1.9 卖出期权（亦称看跌期权） 假设 $N=1$，并且 X 有下面形式

$$X=(e-S_1)^+=\max\{0,e-S_1\}$$

那么 X 是指给其持有者在时间 $t=1$ 时以数值 e 卖出风险证券的未定权益。这个期权将被执行，当且仅当 $S_1<e$。

例 1.2（续） 考察任意未定权益 $X=(X_1, X_2, X_3)$。此权益是市销的，当且仅当 $V_1=H_0B_1+H_1S_1=X$ 对于某一数对 H_0 和 H_1，也就是方程组的解存在

$$\begin{aligned}\omega_1&: (10/9)H_0+(20/3)H_1=X_1\\\omega_2&: (10/9)H_0+(40/9)H_1=X_2\\\omega_3&: (10/9)H_0+(30/9)H_1=X_3\end{aligned}$$

由于仅有两个未知量的方程组存在三个方程，所以可能无解。为了看清楚这点，用第三个方程的 H_0 代入前两个方程得

$$H_1 = (3X_1 - 3X_3)/10 \quad 和 \quad H_1 = (9X_2 - 9X_3)/10$$

因此，未定权益是可达的，当且仅当 H_1 的两个值是相同的，即当且仅当

$$X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 0 \tag{1.21}$$

这个例子阐明每当基础模型具有多个风险中性概率测度时，不是所有未定权益都是可达的一般原则，在下一节中原则将得到进一步发展。

21

习题 1.12 对于满足 $r = 1/9$ 的例 1.1，具有执行价格 $e = 5$ 的卖出期权价格是多少？什么样的交易策略生成这个未定权益。

习题 1.13 期权平价原理（亦称买入卖出平价关系）假设利率 r 是一个纯量，并令 c 和 p 分别表示买入期权和卖出期权的价格，两者具有相同的执行价格 e。证明或者两者都是市销的，或者两者都是不可销的。运用风险中性估值原则证明，在前者情况下有

$$c - p = S_0 - e/(1 + r)$$

1.5 完全市场与不完全市场

正如这一节自始至终所做的假设那样，由于存在一个风险中性概率测度，人们不一定非得用风险中性估值原则来确定未定权益在时间 $t = 0$ 的价格。当然，问题是未定权益不是市销的。在这种情况下，人们不清楚它在时间 $t = 0$ 的价格应是多少。特别，没有理由确信 $E_Q[X/B_1]$ 是一个正确的价格。因此，我们需要一种方便的方法来检验一个未定权益是否是市销的。正如前面一节中例 1.1 所阐述的那样，其方法是运用求解线性方程组试图计算出生成交易策略。这样方程组的解将存在，当且仅当未定权益是市销的。但是，存在着可供选择的方法。

如果每一个未定权益 X 能够由某一交易策略生成，那么一个模型称为完全的（Complete）。否则，模型称为不完全的（Incomplete）。可以证

明，存在一种简单的方法检验一个模型是否为完全的。其方法是认识到当线性方程组恰好如上所述时，其总是有解的。

(1.22) 假定不存在套利机会，那么模型是完全的，当且仅当 Ω 中的状态数目等于 $\{B_1,\ S_1(1),\ \cdots,\ S_N(1)\}$ 中独立向量的数目。

为了看出这点，定义 $K\times(N+1)$矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \cdots & S_N(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) & \cdots & S_N(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \cdots & S_N(1)(\omega_K) \end{bmatrix}$$

且设列向量$H=(H_0,\ H_1,\ \cdots,\ H_N)'$及$X=(X_1,\ \cdots,\ X_K)$。于是这一模
22 型是完全的，当且仅当方程 $AH=X$ 有解H，对于每一个 X。运用线性代数知识，这后面的事实是成立的，当且仅当矩阵 A 有 K 个秩，也就是矩阵有 K 个独立列向量。

例 1.1（续） 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 10/9 & 20/3 \\ 10/9 & 40/9 \end{bmatrix}$$

有两个独立的列，所以此模型是完全的。

例 1.10 假设我们仍举例 1.1，且添加两个风险证券满足$S_2(0)=54$，$S_2(1)(\omega_1)=70$ 以及$S_2(1)(\omega_2)=50$，注意到，$Q=(1/2,1/2)$ 仍是一个风险中性概率测度，因为$54=(1/2)(9/10)70+(1/2)(9/10)50$。现在

$$A=\begin{bmatrix} 10/9 & 20/3 & 70 \\ 10/9 & 40/9 & 50 \end{bmatrix}$$

然而，其秩仍为 2。因而，这里讨论的模型还是完全的，虽然其风险证券是多余的。

例 1.2（续） 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}10/9 & 20/3\\ 10/9 & 40/9\\ 10/9 & 10/3\end{bmatrix}$$

其秩为2，而 $K=3$，所以这一模型是不完全的。现在，我们看出以前的风险中性概率测度 $Q=(\lambda,\ 2-3\lambda,\ -1+2\lambda)$ 的形式，其中 λ 是任一满足 $1/2<\lambda<2/3$ 的纯量。假设我们任取一个这样的 Q，然后运用风险中性估值原则（1.20）中的公式：

$$E_Q[X/B_1]=\lambda(9/10)X_1+(2-3\lambda)(9/10)X_2+(-1+2\lambda)(9/10)X_3$$

如果 X 是市销的，那么此值对所有的 λ 都将是相同的，因为它必须在生成交易策略下与 V_0 相符。注意到，这一值是相同的当且仅当方程（1.21）成立。此外，从（1.21）讨论中回想到一个未定权益是市销的，当且仅当（1.21）成立。把这些放在一起，我们看到此模型中未定权益是市销的，当且仅当 $E_Q[X/B_1]$ 在每一个风险中性概率测度下是相同的。可以证明，这个必要且充分的条件通常是成立的。

正如前面开始所述，假设 $\mathbb{M}\neq\emptyset$，其中 $\mathbb{M}$ 是所有风险中性概率测度的集合。现在如果未定权益 X 是市销的，那么 $E_Q[X/B_1]$ 是一个常数对
所有 $Q\in\mathbb{M}$ 而言。这是因为像对（1.18）所做的讨论那样，人们有 23
$V_0=E_Q[X/B_1]$，对于所有 $Q\in\mathbb{M}$，其中 V_0 是复制投资组合的初始值。

为了证明相反的情况，必须满足的是假设未定权益 X 不是可达的，然后证明 $E_Q[X/B_1]$ 不取相同的值，对于所有 $Q\in\mathbb{M}$。考虑 $K\times(N+1)$ 矩阵 A，$(N+1)$ 维列向量 H，以及如上所述与（1.22）相联系的 K 维列向量 X。如果 X 不是可达的，那么方程 $AH=X$ 的解就不存在。利用 Farkas 引理稍微变化的形式（参见习题 1.11），由此可得必存在一个行向量 $\pi=(\pi_1,\ \cdots,\ \pi_K)$ 满足

$$\pi A=0,\quad \pi X>0$$

设 $\hat{Q}\in\mathbb{M}$ 是任取的，并设纯量 $\lambda>0$ 是充分小的，使得

$$Q(\omega_k)\equiv\hat{Q}(\omega_k)+\lambda\pi_k B_1(\omega_k)>0,\quad 所有\ k=1,\cdots,K$$

由于 π 乘 A 的"第零"列是零，由此可得，刚刚定义过的量 Q 实际上对每一个状态 $\omega\in\Omega$ 均给出正概率的一个概率测度。此外，对于任一折现价格过程 S_n^*，我们有

$$\begin{aligned}E_Q S_n^*(1) &= \sum Q(\omega_k)[S_n(1,\omega_k)]/[B_1(\omega_k)]\\ &= \sum \hat{Q}(\omega_k)[S_n(1,\omega_k)]/[B_1(\omega_k)] + \lambda\sum \pi_k S_n(1,\omega_k)\\ &= \sum \hat{Q}(\omega_k) S_n^*(1,\omega_k)\end{aligned}$$

其中我们使用了 π 乘 A 的第 n 列为零的事实。但是 $\hat{Q}\in\mathbb{M}$，因此 $\sum\hat{Q}(\omega_k)\, S_n^*(1)(\omega_k)=S_n^*(0)$，在此情况下我们认识到 $Q\in\mathbb{M}$。

剩下的事是，要证明 X/B_1 在 Q 下的期望值不同于其在 $\hat{Q}$ 下的期望值。记 $\delta\equiv\pi X$，并且注意到 $\delta>0$，那么

$$\begin{aligned}E_Q[X/B_1] &= \sum Q(\omega_k)X(\omega_k)/[B_1(\omega_k)]\\ &= \sum \hat{Q}(\omega_k)X(\omega_k)/[B_1(\omega_k)] + \lambda\sum \pi_k X(\omega_k)\\ &= E_{\hat{Q}}[X/B_1] + \lambda\delta\end{aligned}$$

换句话说，由于 X 不是可达的，所以 $E_Q[X/B_1]\neq E_{\hat{Q}}[X/B_1]$。因此，概括地讲，我们有下面重要结果。

(1.23) 未定权益是可达的，当且仅当 $E_Q[X/B_1]$ 取相同的值，对于每一个 $Q\in\mathbb{M}$。

注意到，如果 $\mathbb{M}$ 是一个单元集，并且 X 是任一未定权益，那么 $E_Q[X/B_1]$ 平凡地取相同的值，对于所有 $Q\in\mathbb{M}$，在此情况下，X 必是可达的，而模型必是完全的。另一方面，假设每一个未定权益 X 是可达的，但是 $\mathbb{M}$ 包含两个不同的风险中性概率测度，比如说 Q 和 $\hat{Q}$。在这种情况下，必存在某一状态 ω_k，满足 $Q(\omega_k)\neq\hat{Q}(\omega_k)$，所以取未定权益 X 是由 $X(\omega)$ 所定义的，其中

$$X(\omega)=\begin{cases}B_1(\omega_k), & \omega=\omega_k\\ 0, & 其他\end{cases}$$

于是

$$E_Q[X/B_1] = Q(\omega_k) \neq \hat{Q}(\omega_k) = E_{\hat{Q}}[X/B_1]$$

但是，这与（1.23）相矛盾，即表明如果 X 是可达的，那么 $E_Q[X/B_1]$取相同的值对于所有 $Q \in \mathbb{M}$。因此如果模型是完全的，那么$\mathbb{M}$不能有多于一个元素的情况。我们能把这些看法归结为如下：

(1.24) 一个模型是完全的，当且仅当$\mathbb{M}$是由一个风险中性概率测度所构成的。

概括上述内容，如果模型是完全的，那么我们知道如何来为所有未定权益定价。此外，如果模型不是完全的，我们知道怎样来为某些未定权益定价，也就是对那些所有可达的未定权益来定价。但是，什么样的权益在一个不完全模型中是不可达的呢？对于这样的权益，我们不能够指出其在 $t=0$ 时的价格，但是可以证明我们至少能指明一个区间，使其内部必含有一个公正、合理的价格来对应于时间 $t=0$ 价格。

我们将在这一节中余下部分里考察不完全模型，且集中于任一不可达的未定权益上。考察一个量

$$V_+(X) \equiv \inf\{E_Q[X/B_1]: Y \geqslant X, Y \text{ 是可达的}\}$$

而且自始至终地参见图 1.3 展开这种讨论。此处 $Q \in \mathbb{M}$的选取确实是无关紧要的，因为它仅仅用来计算可达的未定权益价格。注意到，λB_1 是可达的未定权益，对于纯量 λ 的所有值，并且 $\lambda B_1 \geqslant X$ 对于充分大的 λ 值；因而 $V_+(X)$ 是定义明确的和有限的。同时注意到，$V_+(X)$ 是有下界的，其界为$\sup\{E_Q[X/B_1]: Q \in \mathbb{M}\}$。

量$V_+(X)$ 是重要的，因为它是在公正价格 X 之上的一个好的上界。这点从类似于前面一节中无套利的讨论中得到的。如果 X 能以较高的价格卖出，比如 $p > V_+(X)$，那么人们应运用复制 Y 的交易策略，而这正是满足 $Y \geqslant X$ 和$p > E_Q[Y/B_1] \geqslant V_+(X)$ 的任一可达未定权益。特别，人们应在时间 $t=0$ 卖出 X，使用购买可复制 Y 的数量为$E_Q[Y/B_1]$ 的投资组合所获得的部分收益，把赚得差值 $p - E_Q[Y/B_1]$ 作为无风险利润。在时间 $t=1$ 时此投资组合 Y 的价值将总是足以覆盖未定权益X 的负 24

债。因此，$V_+(X)$ 是能够用做套期保值（Hedge）未定权益 X 中头寸的最便宜的投资组合的价格。

25

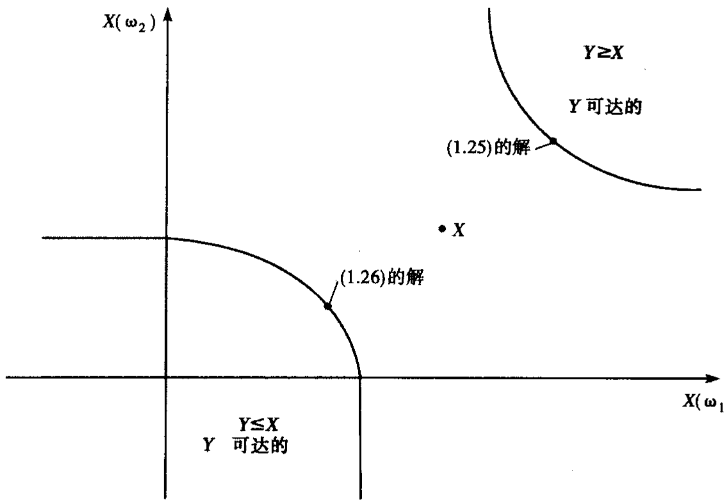


图 1.3　确定不可达未定权益 X 的公正价格

不可达的未定权益 X 不能以高于 $V_+(X)$ 的价格来交易，否则将存在套利机会。类似地，这个未定权益不能以低于 $V_-(X)$ 的价格来交易，其中

$$V_-(X) \equiv \sup\{E_Q[Y/B_1]: Y \leqslant X, \quad Y \text{ 是可达的}\}$$

如同 $V_+(X)$，量 $V_-(X)$是定义明确的和有限的，满足 $V_-(X) \leqslant \inf\{E_Q[X/B_1]: Q \in \mathbb{M}\}$。$X$ 的公正价格（或者价格）必是在区间$[V_-(X), V_+(X)]$之内。因此，我们感兴趣的是计算出 $V_+(X)$及满足 $V_+(X) = E_Q[Y/B_1]$的任一可达未定权益 $Y \geqslant X$，类似的还有 $V_-(X)$。

考察线性规划

$$\textbf{(1.25)} \qquad \begin{aligned} &\min \quad \lambda \\ &\text{s.t.} \qquad Y \geqslant X \\ &\quad U - Y/B_1 = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda - U\cdot Q_1 &= 0 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\lambda - U\cdot Q_J &= 0 \\
\lambda\in\mathbb{R},\ Y\in\mathbb{R}^K,&\ U\in\mathbb{R}^K
\end{aligned}
$$

其中 $Q_j\in\mathbb{M}=\mathbb{W}^{\perp}\cap\mathbb{P}^{+}$，$j=1$，…，$J$ 是可供选择的独立向量，因此，它们构成$\mathbb{W}^{\perp}$的一个基，其维数假定为 J。这意味着折现增益的子空间$\mathbb{W}$具有 $K-J$ 维，并能表示成

$$\mathbb{W}=\{X\in\mathbb{R}^K : X\cdot Q_j=0 \quad 对于\ j=1,\cdots,J\}$$

现在假设 Y 是满足在时间 $t=0$ 时价格为 λ 的可达未定权益，并且令 26
$U=Y/B_1$。由于 $V_1^*=V_0^*+G^*$，所以这一陈述等价于 $U-\lambda e\in\mathbb{W}$ 和 $U=Y/B_1$ 的陈述，其中 e 是单位行向量。而 $e\cdot Q_j=1$ 对于所有 j，同样这个陈述等价于 $U=Y/B_1$ 和 $U\cdot Q_j-\lambda=0$ 对于 $j=1$，…，J 的陈述。因而线性规划（1.25）中的可行域能够解释成满足 $Y\geqslant X$ 的所有可达未定权益的集合。由此可得，如果 λ 和 Y 均是此线性规划最优解的组成部分，那么 $V_+(X)=\lambda$，而 Y 是满足 $Y\geqslant X$ 及时间 $t=0$ 时价格等于 $V_+(X)$的可达未定权益。注意到，这一线性规划最优解总是存在的，因为可行域是非空的且目标函数是下有界的。

类似的，如果你求解线性规划

(1.26)

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \lambda \\
\text{s.t.}\quad & Y\leqslant X \\
& U-Y/B_1=0 \\
& \lambda - U\cdot Q_1 = 0 \\
& \quad\vdots \qquad \vdots \\
& \lambda - U\cdot Q_J = 0 \\
& \lambda\in\mathbb{R},\ Y\in\mathbb{R}^K,\ U\in\mathbb{R}^K
\end{aligned}
$$

并获得最优解 (λ,Y,U)，那么 $V_-(X)$和 Y 是满足 $Y\leqslant X$ 及时间 $t=0$ 时价格等于 $V_-(X)$的可达未定权益。

可以证明，线性规划不仅能使我们完全地解出有意思的量，而且它还给我们一些额外的信息。考察另外一个线性规划：

$$
\textbf{(1.27)}\qquad
\begin{array}{ll}
\max & \displaystyle\sum_{k=1}^{K}[X(\omega_k)/B_1(\omega_k)]\psi_k \\
\text{s.t.} & \theta_1+\cdots+\theta_J=1 \\
 & \psi_1-Q_1(\omega_1)\theta_1-\cdots-Q_J(\omega_J)\theta_J=0 \\
 & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & \psi_K-Q_1(\omega_K)\theta_1-\cdots-Q_J(\omega_K)\theta_J=0 \\
 & \psi\in\mathbb{R}^K \quad \theta\in\mathbb{R}^J \quad \psi\geqslant 0
\end{array}
$$

如果（ψ，θ）是任一可行解，那么

$$\psi=\theta_1Q_1+\theta_2Q_2+\cdots+\theta_JQ_J$$

它是非空的。另外，由于 e 是单位行向量，我们有

$$e\cdot\psi=\theta_1e\cdot Q_1+\cdots+\theta_Je\cdot Q_J=\theta_1+\cdots+\theta_J=1$$

27 因为每一个 Q_j 是概率测度，所以ψ也能够被解释成概率测度。对于任一折现格过程 S_n^*，我们有

$$E_\psi[\Delta S_n^*]=\theta_1Q_1\cdot\Delta S_n^*+\cdots+\theta_JQ_J\cdot\Delta S_n^*=0$$

因为每一个 $Q_j\in\mathbb{M}$。因此，ψ能被解释成为线性定价的测度（但是，不一定作为风险中性概率测度）。换句话说，可行域能够被解释成为$\mathbb{M}$的闭包。由此可得，线性规划（1.27）中目标函数的最优值恰好等于$\sup\{E_Q[X/B_1]:Q\in\mathbb{M}\}$。

现在得出一个基本又重要的令人惊奇的结果。利用线性规划理论，线性规划（1.25）和（1.27）是互为对偶的。因此，运用线性规划对偶理论知道两个规划均是可行的，它们的最优目标值是互相等值的。当然，对线性规划（1.26）而言类似的结果成立，因而将所有这些结果能够总结如下：

(1.28) 如果$\mathbb{M} \neq \emptyset$，那么对任何一个未定权益 X 而言，人们有

$$V_+(X) = \sup\{E_Q[X/B_1]: Q \in \mathbb{M}\}$$

和

$$V_-(X) = \inf\{E_Q[X/B_1]: Q \in \mathbb{M}\}$$

当然，如果 X 是可达的，那么通常$V_+(X) = V_-(X)$是其在时间 $t=0$ 时价格。

例 1.2（续） 考察未定权益$X=(30, 20, 10)$。这是不可达的，因为它不满足方程（1.21）。回想起$\mathbb{M}$是由所有形式为 $Q=(q, 2-3q, -1+2q)$ 的概率测度所构成的，其中 $1/2<q<2/3$，直接计算得到（对这一特例只须做些少量而明显的记号变化）$E_q[X/B_1]=27-9q$。因此

$$V_+(X) = \sup_q E_q[X/B_1] = \sup_q\{27-9q\} = 27-9(1/2) = 22\ 1/2$$

和

$$V_-(X) = \inf_q E_q[X/B_1] = \inf_q\{27-9q\} = 27-9(2/3) = 21$$

利用求解线性规划（1.25），人们得到对应于 $V_+(X)$ 的可达未定权益；这就是 $Y=(30, 20, 15)$，它是利用像检验方程（1.12）那样来确定下来的，并且检验时间 $t=0$ 时 Y 的价格确实是 22 1/2。类似地，对应于 $V_-(X)$ 的可达未定权益被检证是$Y=(30, 50/3, 10)$。

习题 1.14 解释为什么例 1.4 中的模型是不完全的。阐述所有可达的未定权益集合的特征。计算出对于$X=(40, 30, 20, 10)$ 的 $V_+(X)$ 和 $V_-(X)$。

习题 1.15 运用（1.23）验证是否存在执行价格 e 的值，使得例 1.2 模 28
型中买入期权是可达的。类似地，详细说明哪一种卖出期权是可达的。假定 $r=1/9$。

习题 1.16 在线性规划（1.25）之后，人们可断言能够选择 $Q_j \in \mathbb{M} = \mathbb{W}^{\perp} \cap \mathbb{P}^+$，$j=1, \cdots, J$ 作为独立向量，从而构成$\mathbb{W}^{\perp}$的一个基，其维数假定为 J。用线性代数知识仔细验证这一断言。计算例 1.4 中的 Q_j 向量。

1.6 风险与收益

对于风险中性概率测度 Q 及 $\omega\in\Omega$，回想$Q(\omega)/B_1(\omega)$ 有时称为 ω 的状态价格。因为这个原因，随机变量

$$L(\omega)\equiv\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

称为状态价格向量（State Price Vector）或者状态价格密度（State Price Density）。本节中所证明的主要结果是任一投资组合的风险溢价（Risk Premium）是与对应于状态价格密度的收益和投资组合收益之间协方差[⑥]是成正比例的，此结果类似于最重要的资本资产定价模型的发现。

假设时间 $t=0$ 时价格$S_n(0)$ 是严格正的，对风险证券 n 的收益定义为一个随机变量

$$R_n\equiv\frac{S_n(1)-S_n(0)}{S_n(0)},\quad n=1,\cdots,N$$

类似地，将对应于银行账户的收益定义成为

$$R_0\equiv\frac{B_1-B_0}{B_0}=r$$

收益是适用于各种各样的目的有用的量，目的之一是如果你知道时间 $t=0$ 的价格和收益，那么你能够计算出时间 $t=1$ 的价格。由于价格是非负的，所以有 $R_n\geqslant-1$，其中等式成立当且仅当$S_n(1)=0$ 。可以验证投资组合增益能够写成为

$$G=H_0B_0R_0+\sum_{n=1}^{N}H_nS_n(0)R_n \tag{1.29}$$

把验证过程留作习题。因此，投资组合增益是对基本收益的一种加权组合

形式，其中每一个加权数量在时间 $t=0$ 时投资于相应的证券资金数。

收益也能够用于计算风险中性概率测度。因为 29

$$
\begin{aligned}
S_n^*(1) - S_n^*(0) &= \frac{S_n(1) - B_1 S_n(0)}{B_1} \\
&= \frac{[1+R_n]S_n(0) - [1+R_0]S_n(0)}{1+R_0} \\
&= S_n(0)\left(\frac{R_n - R_0}{1+R_0}\right)
\end{aligned}
$$

由（1.15）可得

(1.30) 如果 Q 是一个概率测度满足$Q(\omega)>0$，对于所有 $\omega\in\Omega$，那么 Q 是风险中性概率当且仅当

$$E_Q\left(\frac{R_n - R_0}{1+R_0}\right)=0, \quad n=1, \cdots, N$$

注意到，当利率 $R_0=r$ 是确定的时候，（1.30）中方程简单地成为

$$E_Q[R_n]=r, \quad n=1, \cdots, N$$

这是许多情况中的一个事例，人们在确定利率假设下得到一种漂亮又重要的涉及收益的关系。因此，此假设将在本节的估计中大量地实施，同时将存在风险中性概率测度作为假设。

对于证券 n 的平均收益，记为$\bar{R}_n=E[R_n]$，它经常起着重要的作用。例如，容易看出$\mathrm{cov}(R_n,L)=E[R_nL]-E[R_n]E[L]=E_Q[R_n]-E[R_n]=r-\bar{R}_n$。换句话说

(1.31) $$\bar{R}_n - r = -\mathrm{cov}(R_n, L), \quad n=1,\cdots,N$$

这里差 $\bar{R}_n-r$ 称为证券的风险溢价，通常这是一个正的，因为投资者经常坚持认为风险证券的期望收益比无风险的收益 r 要高。这样（1.31）表明，证券的风险溢价是与证券收益和状态价格密度之间的相关关系⑦有

联系。

考察对应于任意交易策略$H=(H_0, H_1, \cdots, H_N)$的投资组合收益$R$。假定 $V_0>0$，这就是

$$R=\frac{V_1-V_0}{V_0}$$

运用$S_n(1)=S_n(0)[1+R_n]$及 V_t 的定义，人们得到

$$R=\frac{H_0}{V_0}r+\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{H_nS_n(0)}{V_0}\right]R_n \tag{1.32}$$

30 如果你把 H_0/V_0 解释成投资于储蓄账户上的资金的分数形式（回想起 $B_0=1$），且$H_nS_n(0)/V_0$ 解释成投资于第 n 种证券上资金的分数形式，那么（1.32）表明投资组合的收益是各个证券收益的凸组合。运用(1.31)、(1.32) 及某种协方差的基本性质，直接验证得

$$\bar{R}-r=-\operatorname{cov}(R,L) \tag{1.33}$$

当然，其中$\bar{R}=E[R]$

现在取定两个纯量 a 和b，且满足 $b\neq0$，并假定未定权益 $a+bL$ 是可达的，也就是假设存在某一交易策略 H' 使得 $V_1'=a+bL$。由于$V_0'(1+R')=a+bL$（这里 V'和R'分别表示对应于H'的价值过程和收益过程），人们能够代替 L 并运用协方差关系的性质来验证

$$\operatorname{cov}(R,L)=\frac{V_0'}{b}\operatorname{cov}(R,R')$$

（R 仍是对应于任意交易策略）。因而（1.33）能够重新写为

$$\bar{R}-r=-\frac{V_0'}{b}\operatorname{cov}(R,R') \tag{1.34}$$

特别，你在选择 $H=H'$的特殊情况下，(1.34) 表明

$$\bar{R}' - r = -\frac{V_0'}{b}\text{cov}(R', R') = -\frac{V_0'}{b}\text{var}(R')$$

运用这个来代替（1.34）中的 V_0'/b，这里我们现在回到任意交易策略 H，我们得到下面结果：

(1.35) 假设对于纯量 a 和 b，未定权益 $a+bL$ 是由具有收益 R' 的某一投资组合所生成，且假设利率 r 是确定的。设 R 是任意投资组合的收益，那么

$$\bar{R} - r = \frac{\text{cov}(R, R')}{\text{var}(R')}(\bar{R}' - r)$$

比例 $\text{cov}(R, R')/\text{var}(R')$ 称为交易策略 H 相对于交易策略 H' 的 β (beta)。这个结果表明 H 的风险溢价是与 H' 的风险溢价成比例的，而比例常数就是这个 β。或者从稍微不同的观点来看，（1.35）表明风险溢价是与其 β 相对于状态价格密度的线性变换成比例的。此结果类似于传统的资本资产定价模型，这里 H' 仅仅对应于市场投资组合的状态价格密度线性变换。

注意到，对于确定的利率 r 及任意纯量 a 和 b ($b \neq 0$)，未定权益 $a+bL$ 是可达的，当且仅当状态价格密度是 L。这是因为 $H_0(1+r) +$ 31
$\sum H_n S_n(1) = a + bL$，当且仅当

$$\frac{1}{b}\left[H_0 - \frac{a}{1+r}\right](1+r) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{b} H_n S_n(1) = L$$

习题 1.17 既在一般情况下验证方程（1.29），又将其应用于例 1.1。

习题 1.18 假定时间 $t=0$ 时价格为严格正的，折现收益 R_n^* 是由 $R_n^* \equiv [S_n^*(1) - S_n^*(0)]/S_n^*(0)$ 定义的，对于 $n=1, \cdots, N$。证明

(a) $G^* = \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) R_n^*$

(b) $R_n^* = \dfrac{R_n - R_0}{1 + R_0} \qquad n = 1, \cdots, N$

(c) 严格正的概率测度 Q 是风险中性概率测度，当且仅当 $E_Q[R_n^*] = 0$ 对于 $n=1, \cdots, N$。

习题 1.19 分析例 1.1 的风险及收益性质，假定$P(\omega_1)=p$ 对于一般的参数 $0<p<1$。

(a) R_1 和 $\bar{R}_1$ 是多少?

(b) L 是什么呢?

(c) 验证（1.31）对于 $n=0$ 及 1。

从现在起假设$H=(H_0, H_1)=(1, 3)$

(d) R 和$\bar{R}$ 是多少?

(e) 验证（1.32）。

(f) 验证（1.33）。

(g) H', V_0'及 R'是什么呢?

(h) 验证（1.34）。

(i) 验证（1.35）。

注释

① 如果 X 是随机变量（Random Variable），这意味着 X 是样本空间 Ω 上的实值函数。换句话说，我们知道对于空间 Ω 中的每一个状态 $\omega\in\Omega$ 的值$X(\omega)$。

② 随机变量 X 的期望值［也称为均值（Mean）或者平均值（Average)］被表示成 EX 或$E[X]$，且定义为

$$EX\equiv\sum_{k=1}^{K}X(\omega_k)P(\omega_k)$$

32 更一般地，如果 f 是实直线上的实值函数，那么

$$Ef(X)\equiv\sum_{k=1}^{K}f(X(\omega_k))P(\omega_k)$$

特别，对于纯量 a 和b，$E[aX+b]=aEX+b$。

③ 参看关于线性规划附录。

④ 换句话说，对于某一个分量均是严格正的 $\hat{Y}\in\mathbb{W}^{\perp}$，其射线为 $\{Y\in\mathbb{R}^N: Y=\lambda\hat{Y}, \lambda>0, \lambda\in\mathbb{R}\}$ 的形式。

⑤ 闭集（Closed）意味着如果 $\{X_1\}$ 是$\mathbb{A}^+$中收敛于某一 $X\in\mathbb{R}^K$ 的点列序，那么 $X\in\mathbb{A}^+$；凸集（Convex）意味着对于任意的 X，$\hat{X}\in\mathbb{A}^+$满足$0<\lambda<1$ 的任意λ，

那么 $\lambda X+(1-\lambda)\hat{X}\in\mathbb{A}^{+}$。

⑥ 对于两个随机变量 X 和 Y，协方差（Covariance）$\mathrm{cov}(X,Y)$定义为 $E[XY]-E[X]E[Y]$。注意到，$\mathrm{cov}(X-E[X],Y)=\mathrm{cov}(X,Y)$。此外，已知三个随机变量 X，Y 和 Z，以及两个纯量 a 和 b，人们有 $\mathrm{cov}(aX+bZ,Y)=a\mathrm{cov}(X,Y)+b\mathrm{cov}(Z,Y)$。

⑦ 随机变量 X 的方差（Variance），记为 $\mathrm{var}(X)$，定义为 $\mathrm{var}(X)\equiv E[X^2]-(E[X])^2=E[(X-E[X])^2]$。$X$ 的标准差（Standard Deviation）是 $\sigma_X\equiv\sqrt{\mathrm{var}(X)}$。随机变量 X 和 Y 之间的相关关系（Correlation）（假设 $\sigma_X>0$ 和 $\sigma_Y>0$）定义为 $\rho(X,Y)\equiv\mathrm{cov}(X,Y)/(\sigma_X\sigma_Y)$。因此，证券 n 的风险溢价等于 $-\rho(R_n,L)\sigma_{R_n}\sigma_L$。

33 2

单时期消费与投资

2.1 最优投资组合与生存性

这一章是与最佳交易策略选择问题有关的，其选择的目的是为了将财富 $t=0$ 时的投资变换到 $t=1$ 时的财富。包括此问题的某些变化形式将在稍后的一些节中考察，部分财富在时间 $t=0$ 时用于消费。问题是计算出最优交易策略，并且对此需要一种绩效测量。

这里将要运用的绩效测量是对期望效用来考察的。特别，假设 $u:\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$是一个函数，使得$w\to u(w,\Omega)$为可微的、凹的以及严格递增的，对于每一个 $\omega\in\Omega$。如果 w 是投资组合在时间$t=1$ 时的价值，并且 ω 是一种状态，那么$u(w,\omega)$ 将表示数量为 w 的效用（Utility）。因此，我们的绩效测量将是期末财富的期望效用，也就是

$$Eu(V_1)=\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)u(V_1(\omega),\omega)$$

注意到，效用函数 u 能显式地依赖于期末财富 w 和状态 ω。然而，对许多应用来说，必须满足的是 u 仅仅依赖于财富，在此情况下，u 仅是一个凹的、严格递增的单自变量函数。

设$\mathbb{H}$表示所有交易策略的集合，也就是$\mathbb{H}=\mathbb{R}^{N+1}$，所有形式为$(H_0,H_1,\cdots,H_N)$ 全体向量的线性空间。设 $v\in\mathbb{R}$是一个特定的纯量，

其表示初始时间 $t=0$ 时间的财富。我们对下面的最优投资组合问题感兴趣：

(2.1) 34

$$\begin{aligned} \max_{H\in\mathbb{H}} \quad & Eu(V_1) \\ \text{s.t.} \quad & V_0 = v \end{aligned}$$

由于 $V_1=B_1V_1^*$ 和 $V_1^*=V_0^*+G^*$，所以这与

(2.2) $$\max \quad E[u(B_1\{v+H_1\Delta S_1^*+\cdots+N_N\Delta S_N^*\})]$$

是相同的。

注意到，如果套利机会存在，那么（2.1）的解就不能存在。换句话说，如果 $\hat{H}$是一个解且 H 是一个套利机会，那么设 $\widetilde{H}=\hat{H}+H$，从而得出

$$v+\sum_{n=1}^{N}\widetilde{H}_n\,\Delta S_n^* = v+\sum_{n=1}^{N}\hat{H}_n\,\Delta S_n^*+\sum_{n=1}^{N}H_n\,\Delta S_n^*\geqslant v+\sum_{n=1}^{N}\hat{H}_n\,\Delta S_n^*$$

其中不等式成立，因为 H 是一个套利机会。事实上，此不等式实际上至少对一个 $\omega\in\Omega$ 是严格满足的。由于 u 是关于财富的严格递增函数以及 $P(\omega)>0$对于所有 $\omega\in\Omega$，这意味着（2.2）中的目标值在 $\widetilde{H}$ 下要大于在 $\hat{H}$下的目标值。这与 $\hat{H}$为（2.2）最优解的结论相矛盾，在此情况下，下面的命题是正确的：

(2.3) 如果投资组合(2.1)或者(2.2)存在最优解，那么不存在套利机会。

换句话说，（2.3）表明如果（2.1）或者（2.2）存在最优解，那么就存在一个风险中性概率测度。利用显得有点令人惊奇的结果，在任何一个解与风险中性概率测度之间存在着一种显式关系。这一关系能从最优性的一阶必要条件中推出。为理解这点，将（2.2）中的目标函数重新写为

$$\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)u(B_1(\omega)\{v+H_1\Delta S_1^*(\omega)+\cdots+H_N\Delta S_N^*(\omega)\},\omega)$$

所以一阶必要条件能够表示成

(2.4)
$$\begin{aligned}0=&\frac{\partial E[u(B_1\{v+H_1\Delta S_1^*+\cdots+H_N\Delta S_N^*\})]}{\partial H_n}\\ =&\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)u'(B_1(\omega)\{v+H_1\Delta S_1^*(\omega)+\cdots\\ &+H_N\Delta S_N^*(\omega)\},\omega)B_1(\omega)\Delta S_n^*(\omega)\\ =&E[B_1u'(V_1)\Delta S_n^*],\quad n=1,\cdots,N\end{aligned}$$

其中，u'表示 u 对第一个自变量的偏导数。因此，如果（H，V）是（2.2）的解，那么它必须满足这 N 个方程的方程组。但是，回想起风险中性概率测度必须满足的条件：

(2.5)
$$0=E_Q[\Delta S_n^*]=\sum_{\omega\in\Omega}Q(\omega)\Delta S_n^*(\omega),\quad n=1,\cdots,N$$

35 比较（2.4）和（2.5），显然利用设$Q(\omega)=P(\omega)B_1(\omega)u'(V_1(\omega),\omega)$，人们得到一个满足（2.5）的测度。注意到，$Q(\omega)>0$ 对于所有 ω，因为 u 是严格递增的。然而，$Q(\omega_1)+\cdots+Q(\omega_K)$ 不必等于 1，所以 Q 仅是一个概率测度，其和为一个常数。显而易见，此常数应该是多少，所以我们有下面命题：

(2.6) 如果(H, V)是最优投资组合问题(2.1)或者(2.2)的解，那么

$$Q(\omega)\equiv\frac{P(\omega)B_1(\omega)u'(V_1(\omega),\omega)}{E[B_1u'(V_1)]},\quad\omega\in\Omega$$

定义了一个风险中性概率测度。

在 $B_1=1+r$ 为常数的情况下，稍微重写（2.6），我们得到$L(\omega)=Q(\omega)/P(\omega)=u'(V_1(\omega),\omega)/E[u'(V_1)]$。换句话说，当利率是确定的时

候，状态价格密度（State Price Density）是与期末财富的边际效用（Marginal Utility of Terminal Wealth）成正比例的。

其逆命题怎样呢？如果存在一个风险中性概率测度 Q，那么最优投资组合问题（2.1）有解吗？不一定，因为有一个 u 和 v 使得 H 不存在解。然而，人们总是能找到某个 u 和 v 使得 H 的解存在。将这种观点系统化：如果存在一个函数 u：$\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ 以及初始财富 v，使得 $w\to u(w,\omega)$ 是凹的及严格递增的，对于每一个 $\omega\in\Omega$，并且使得相应的最优投资组合问题（2.1）有一个最优解，那么我们将说模型是可生存的（Viable）。

(2.7) 证券市场模型是可生存的，当且仅当存在一个风险中性概率测度 Q。

鉴于（2.6），为证实这个原则，必须满足的是假设风险中性概率测度存在，巧妙选取 u 和 v，于是证明了（2.2）解的存在性。u 的选取将是

$$u(w,\omega) = w\frac{Q(\omega)}{P(\omega)B_1(\omega)}$$

而 v 将是任意的。现在，对于任意的（H_1，…，H_N），我们有

$$\begin{aligned}
&E[u(B_1\{v + H_1\Delta S_1^* + \cdots + H_N\Delta S_N^*\},\omega)]\\
&= \sum P(\omega)B_1(\omega)\{v + H_1\Delta S_1^* + \cdots + H_N\Delta S_N^*\}Q(\omega)/[P(\omega)B_1(\omega)]\\
&= \sum Q(\omega)\{v + H_1\Delta S_1^* + \cdots + H_N\Delta S_N^*\}\\
&= v + H_1E_Q[\Delta S_1^*] + \cdots + H_NE_Q[\Delta S_N^*] = v
\end{aligned}$$

所以，每一个向量（H_1，…，H_N）导致与（2.2）中相同的目标值。等价地，每一个拥有初始财富 v 的交易策略导致与（2.1）中相同的目标值，即意味着所有这样的交易策略均是最优的。因此，利用对效用函数巧妙的选取，（2.7）是正确的。

最优投资组合问题（2.1）或者（2.2）是一个标准的凸最优化问题， 36
所以人们能使用标准的技术方法计算出它的解。此方法将会与必要方程（2.4）、N 个方程和 N 个未知量的方程组一齐作用求解。不幸的是，正如

下面例子所表明的，这些方程在 H 中能是非线性的，从而很难对其求解。

例 2.1 假设 $N=2$，$K=3$，$r=1/9$，以及折现价格过程如下：

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	6	6	8	4
2	10	13	9	8

注意到存在惟一的风险中性概率测度，因为 $Q=(1/3, 1/3, 1/3)$ 是下述方程组的惟一解：

$$\begin{aligned}
6 &= 6Q(\omega_1)+8Q(\omega_2)+4Q(\omega_3)\\
10 &= 13Q(\omega_1)+9Q(\omega_2)+8Q(\omega_3)\\
1 &= Q(\omega_1)+Q(\omega_2)+Q(\omega_3)
\end{aligned}$$

利用指数效用函数 $u(w)=-\exp\{-w\}$，其边际效用函数是 $u'(w)=\exp\{-w\}$。因此必要条件（2.4）是：

$$\begin{aligned}
0 =\ & P(\omega_1)\exp\{-(10/9)(v+0H_1+3H_2)\}(10/9)(0)\\
&+P(\omega_2)\exp\{-(10/9)(v+2H_1-H_2)\}(10/9)(2)\\
&+P(\omega_3)\exp\{-(10/9)(v-2H_1-2H_2)\}(10/9)(-2)\\
0 =\ & P(\omega_1)\exp\{-(10/9)(v+0H_1+3H_2)\}(10/9)(3)\\
&+P(\omega_2)\exp\{-(10/9)(v+2H_1-H_2)\}(10/9)(-1)\\
&+P(\omega_3)\exp\{-(10/9)(v-2H_1-2H_2)\}(10/9)(-2)
\end{aligned}$$

不用说，对 H_1 和 H_2 求解是不容易的。

习题 2.1 假设 $N=1$，$K=2$，$S_0=5$，$S_1(\omega_1)=20/3$ 以及 $S_1(\omega_2)=40/9$。对 $r=1/9$ 且初始财富 $v\geqslant 0$ 为一般纯量参数，并且概率 $P(\omega_1)=p$ 来说，在效用函数分别为

(a) $u(w)=\ln w$

(b) $u(w)=-\exp(-w)$

(c) $u(w)=\gamma^{-1}w^{\gamma}$，其中 $-\infty<\gamma<1,\gamma\neq 0$
求解（2.1）。

2.2 风险中性计算方法

正如在例 2.1 中所看到的，对最优投资组合问题（2.1）求解在计算上是困难的。幸亏存在着一种涉及风险中性概率测度的可供选择的方法，而且是非常有效的。这一思想是基于（2.1）中的目标函数 $H\to Eu(V_1)$ 能够被看成是由两个函数合成的，如图 2.1 所示。第一个函数 $H\to V_1$ 是将交易策略映射成代表时间 $t=1$ 时的投资组合价值的随机变量。第二个函数 $V_1\to Eu(V_1)$ 是将随机变量映射成实直线上的数。对应于这种合成，风险中性计算方法包括两个步骤。首先，你要识别最优随机变量 V_1，也就是在可行随机变量子集上确定使 $Eu(V_1)$ 为最大化的 V_1 值。然后，你计算出能生成此 V_1 的交易策略，也就是你去求解生成未定权益 V_1 的交易策略。

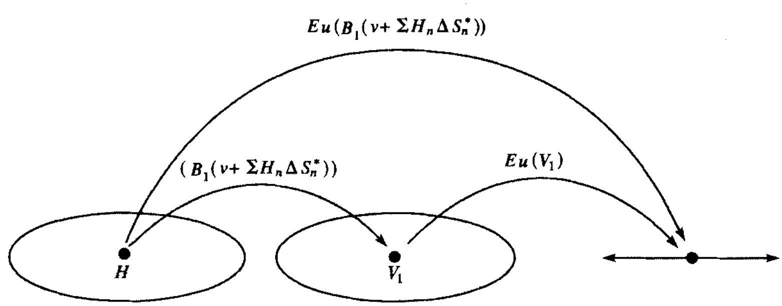


图 2.1　风险中性计算方法

步骤 2 是容易的。这点与 1.4 节中所讨论的求解生成可达未定权益的交易策略是一致的。如果为实施步骤 1 对可行随机变量子集选择正确，那么生成 V_1 的被计算出来的交易策略将对应于一个时间 $t=0$ 时价值等于 v 的投资组合。换句话说，可达未定权益 V_1 将具有时间 $t=0$ 价格等于 v，即投资组合的特定初始价值。

步骤 1 显示出相当的挑战性，但是它仅仅涉及最优化理论。成功的关

键是正确又方便地识别可行随机变量子集。如果模型是完全的，那么此子集刚好就是

$$\mathbb{W}_v \equiv \{W \in \mathbb{R}^K : E_Q[W/B_1] = v\} \tag{2.8}$$

38 （对于不完全模型而言，对$\mathbb{W}_v$的详细识别是相当复杂的，这将在下面讨论）。为理解这点，注意到，在任意满足 $V_0 = v$ 的交易策略H下，人们运用风险中性估值原则得到 $E_Q[V_1/B_1] = v$。反之，对于任意未定权益 $W \in \mathbb{W}_v$，再次运用风险中性估值原则，存在一个交易策略 H，使得 $V_0 = v$以及 $V_1 = W$。对于这样的最优投资组合问题，子集$\mathbb{W}_v$（实际上是一个仿射子空间）被称为可达财富集合（Set of Attainable Wealths)。

风险中性计算方法中的第一步是解子问题：

$$\begin{aligned} &\max \quad Eu(W) \\ &\text{s.t.} \quad W \in \mathbb{W}_v \end{aligned} \tag{2.9}$$

当模型是完全的时候，这个问题能方便地利用拉格朗日乘子解出。鉴于(2.8)，问题（2.9）等价于

$$\max \quad Eu(W) - \lambda E_Q[W/B_1] \tag{2.10}$$

其中，拉格朗日乘子 λ 是特别选定的，使得（2.10）中的解满足

$$E_Q[W/B_1] = v \tag{2.11}$$

引入状态价格密度 $L = Q/P$，(2.10) 中的目标函数能够重新写成

$$\begin{aligned} Eu(W) - \lambda E[LW/B_1] &= E[u(W) - \lambda LW/B_1] \\ &= \sum_{\omega} P(\omega)[u(W(\omega)) - \lambda L(\omega)W(\omega)/B_1(\omega)] \end{aligned}$$

如果 W 使这一表达式最大化，那么必要条件必须得到满足，即导致对于每一个 $\omega \in \Omega$ 均有一个方程：

$$u'(W(\omega)) = \lambda L(\omega)/B_1(\omega), \quad \text{所有 } \omega \in \Omega$$

注意到，此方程实际上与（2.6）中的方程是相同的；事实上，由于 $W = V_1$，人们能推出 λ 等于 $E[B_1 u'(W)]$，其中 W 是最优解。为了计算出 W，我们求解上述所列出的方程得 $W(\omega)$，

(2.12) $$W(\omega) = \mathrm{I}[\lambda L(\omega)/B_1(\omega)])$$

其中 I 表示对应于 u' 的反函数（Inverse Function）。

因此，当 λ 取定一个正确的值时，（2.12）给出了（2.9）的最优解。然而，正确的值是什么呢？它只不过是那样的值，使得当（2.12）被代入 W 中时，（2.11）得到满足的 λ 值，即：

(2.13) $$E_Q[\mathrm{I}(\lambda L/B_1)/B_1] = v$$

反函数 I 是递减的，并且其范围一般包括（0，∞），所以（2.11）的解 λ 将对于 $v>0$ 是存在的。

例 2.2 假设 $u(w) = -\exp(-w)$，这样 $u'(w) = \exp(-w)$。于是，$u'(w) = i$ 当且仅当 $w = -\ln(i)$，所以 $I(i) = -\ln(i)$。因此，（2.9）的最优解是

$$W = -\ln(\lambda L/B_1) = -\ln(\lambda) - \ln(L/B_1)$$ 39

从而（2.13）变为

$$v = -E_Q[B_1^{-1}\ln(\lambda L/B_1)] = -\ln(\lambda)E_Q B_1^{-1} - E_Q[\ln(L/B_1)/B_1]$$

因此，正确的 λ 值是由

$$\lambda = \exp\left\{\frac{-v - E_Q[B_1^{-1}\ln(L/B_1)]}{E_Q B_1^{-1}}\right\}$$

给出的，所以

$$W = \frac{v + E_Q[B_1^{-1}\ln(L/B_1)]}{E_Q B_1^{-1}} - \ln(L/B_1)$$

将这代入 $-\exp(-W)$ 中得

$$\begin{aligned} u(W) &= -\exp\left\{\frac{-v + \ln(L/B_1)E_Q B_1^{-1} - E_Q[B_1^{-1}\ln(L/B_1)]}{E_Q B_1^{-1}}\right\} \\ &= \lambda L/B_1 \end{aligned}$$

所以（2.9）中目标函数的最优值是

$$Eu(W) = -\lambda E[L/B_1] = -\lambda E_Q B_1^{-1}$$

这个例子阐明了一种通用的模式：对于最优财富 W 以及诸如此类的通用公式是可以获得的，这经由概率测度 P 和 Q 依赖于基本证券市场模型。换句话说，P 和 Q 所包含信息的内容能被看成是关于最优投资组合子问题（2.9）的充分统计量。在推导出像例 2.2 中那些特殊效用函数公式后，人们能迅速地分析任一个拥有同样效用函数的完全证券市场模型。

例 2.1 和 2.2（续） 假设 $P(\omega_1)=1/2$ 和 $P(\omega_2)=P(\omega_3)=1/4$，这样状态价格密度 L 是由 $L(\omega_1)=2/3$ 和 $L(\omega_2)=L(\omega_3)=4/3$ 给出的。利用 $r=1/9$ 和 $B_1=10/9$，我们计算出

$$E_Q[\ln(L/B_1)] = (1/3)\left[\ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}\right) + 2\ln\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{10}\right)\right] = -0.04873$$

所以，最优可达财富是

$$\begin{aligned} W &= v(1+r) + E_Q[\ln(L/B_1)] - \ln(L/B_1) \\ &= \begin{cases} v(10/9) + 0.46209, & \omega = \omega_1 \\ v(10/9) - 0.23105, & \omega = \omega_2, \omega_3 \end{cases} \end{aligned}$$

注意到，$E_Q[W/B_1]=v$ ，正如人们所期望的。现在 $\lambda=\exp\{-(10/9)v+0.04873\}$，所以目标函数的最优值是

$$Eu(W)=-\lambda E_Q B_1^{-1}=-\frac{9}{10}\lambda$$ 40

注意到，与（2.6）相一致 $\lambda=E[B_1u'(V_1)]$。同时当具有计算出的最优可达财富 W，现在我们能容易地利用解 $W/B_1=v+G^*$ 算出最优交易策略 H。在状态 ω_1 时，折现期末财富 $W(\omega_1)/B_1$ 等于 $v+(9/10)(0.46209)=v+0.41588$ ，而初始财富加上折现收益 $v+G^*(\omega_1)$ 等于 $v+H_1(6-6)+H_2(13-10)=v+3H_2$ 。类似地，可得到对应于状态 ω_2 和 ω_3 的方程，这样得出下面含三个方程的方程组：

$$\begin{aligned}
\omega_1:\ \ 0.41590 &= \ \ 0H_1+3H_2\\
\omega_2:-0.20795 &= \ \ 2H_1-H_2\\
\omega_3:-0.20795 &= -2H_1-2H_2
\end{aligned}$$

这些方程显得多余，并且存在惟一的解，即 $H_1=-0.03466$ 和 $H_2=0.13863$。运用 $v=V_0=H_0+6H_1+10H_2$ 求解 H_0，得到 $H_0=v-1.17834$。最后，注意到这一交易策略满足必要条件（2.4）（参见上面例 2.1），正是人们所期望的。

习题 2.2（对数效用）　假设 $u(w)=\ln(w)$。证明反函数 $I(i)=i^{-1}$，拉格朗日乘子 $\lambda=v^{-1}$，最优可达财富是 $W=vL^{-1}B_1$，并且最优目标函数是 $\ln(v)-E[\ln(L/B_1)]$。在 $N=1$，$K=2$，$r=1/9$，$S_0=5$，$S_1(\omega_1)=20/3$ ，$S_1(\omega_2)=40/9$ 及 $P(\omega_1)=3/5$ 的条件下，计算出这些表达式，并求解最优交易策略。

习题 2.3（等弹性效用）　假设 $u(w)=\gamma^{-1}w^{\gamma}$，其中 $-\infty<\gamma<1$ 及 $\gamma\neq 0$。证明反函数 $I(i)=i^{-1/(1-\gamma)}$，拉格朗日乘子

$$\lambda=v^{-(1-\gamma)}\{E[(L/B_1)^{-\gamma/(1-\gamma)}]\}^{(1-\gamma)}$$

最优可达财富

$$W = \frac{v(L/B_1)^{-1/(1-\gamma)}}{E[(L/B_1)^{-\gamma/(1-\gamma)}]}$$

以及最优目标值 $E[u(W)] = \lambda v/\gamma$。在基本模型与习题 2.2 中相同的条件下，计算这些表达式，并解出最优交易策略。

2.3 消费投资问题

一个消费过程（Consumption Process）$C = (C_0, C_1)$ 是由一个非负纯量 C_0 和一个非负随机变量 C_1 构成的。一个消费投资计划（Consump-
41 tion-investment Plan）是由一对（C, H）组成的，其中 C 是一个消费过程，而 H 是一个交易策略。一个消费投资计划称为是可取的（Admissible），如果（1）$C_0 + V_0 = v$，即 $t=0$ 时可用的资金数，（2）$C_1 = V_1$。我们总是假定 $v \geqslant 0$。

量 C_t 应该被解释成为投资者在时间 t 时所消费的数量。由于 C_0 等于时间 $t=0$ 时的消费，并且由于 $V_0 = H_0 + \sum H_n S_n(0)$ 是时间 $t=0$ 时的投资额，所以，在时间 $t=0$ 可用的资金额至少必是 $C_0 + V_0$。由于 $V_1 = H_0 B_1 + \sum H_n S_n(1)$ 是时间 $t=1$ 时可用的资金额，所以必有 $C_1 \leqslant V_1$。现在一个明智的投资者，既想能够在 $t=0$ 消费，又想在 $t=1$ 消费，这样他不会将其资金在这两种时间里搁置不用，因而投资者不想采取此种消费投资计划，除非它是可取的。

自然产生的问题是，给定消费投资计划（C, H）以及初始资金 v，你怎样去检验（C, H）是否是可取的呢？当然，一种方法是计算出 V_t，然后既检验 $C_0 + V_0 = v$，又检验 $C_1 = V_1$ 是否均成立。注意到，如果（C, H）确实是可取的，那么 C_1 是可达的未定权益，其满足

$$E_Q[C_1/B_1] = E_Q[V_1/B_1] = V_0$$

对于每一个风险中性概率测度 Q，在此情况下有

(2.14) $$E_Q[C_0 + C_1/B_1] = v$$

现在存在一个比较难的问题：给定某一个 $v \geqslant 0$ 和某一个消费过程 C，你怎样知晓是否存在某一交易策略 H，使得（C，H）是可取的呢？当然，如果 C_1 是可达的未定权益，那么存在某一个交易策略 H，使得 $C_1 = V_1 = H_0B_1 + \sum H_nS_n$。此外，如果（2.14）对某一个 Q 来说是满足的，那么 $C_0 + V_0 = v$，在此情况下（C，H）是可取的。注意到，$E_Q[C_0 + C_1/B_1]$对于所有风险中性概率测度而言是一个常数，当且仅当 C 是可达的。因此，我们将这些发现归纳概括如下：

(2.15) 设初始资金 $v \geqslant 0$ 并且消费过程 C 是固定的，存在一个交易策略 H，使得消费投资计划（C，H）是可取的，当且仅当

$$C_0 + E_Q[C_1/B_1] = v$$

对于每一个风险中性概率测度 Q。

例 2.1（续） 这一模型是完全的，满足 $Q = (1/3，1/3，1/3)$。为使消费过程（C_0，C_1）成为一个可取的消费投资计划的一个组成部分，当然，我们必有 $0 \leqslant C_0 \leqslant v$ 和 $C_1 \geqslant 0$。另外，我们利用（2.15）必得到

$$v - C_0 = \frac{9}{10}E_QC_1 = \frac{3}{10}[C_1(\omega_1) + C_1(\omega_2) + C_1(\omega_3)]$$

假设一个投资者开始拥有初始财富 v，并且想要选择一个可取的消费投资计划，以便使其预期消费效用值最大化，既考虑 $t = 0$ 又考虑 $t = 1$。 42
其中这里的效用函数 $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 被假设成为凹的、可微的，并且严格递增的。这个问题在数学上成为：

(2.16)
$$\begin{aligned} \max \quad & u(C_0) + E[u(C_1)] \\ \text{s.t.} \quad & C_0 + H_0B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_nS_n(0) = v \\ & C_1 - H_0B_1 - \sum_{n=1}^{N} H_nS_n(1) = 0 \end{aligned}$$

$$C_0 \geqslant 0 \quad C_1 \geqslant 0 \quad H \in \mathbb{R}^{N+1}$$

如同最优投资组合问题一样，此消费投资问题或者能够运用最优化理论求解，或者运用风险中性计算方法求解。为阐述前者，考虑下面的：

例 2.1（续） 假设$u(c)=\ln(c)$，由于 $\ln(c)\to-\infty$，当 $c\searrow 0$ 时，我们能省略（2.16）中显式非负性约束。利用$P(\omega_1)=1/2$，$P(\omega_2)=P(\omega_3)=1/4$ 及 $r=1/9$，最优化问题成为

$$\begin{aligned}
&\min \quad \ln(C_0)+\frac{1}{2}\ln(C_1(\omega_1))+\frac{1}{4}\ln(C_1(\omega_2))+\frac{1}{4}\ln(C_1(\omega_3))\\
&\text{s.t.} \quad C_0 = v - H_0 - 6H_1 - 10H_2\\
&\textbf{(2.17)} \qquad C_1(\omega_1) = \frac{10}{9}H_0+\frac{60}{9}H_1+\frac{130}{9}H_2\\
&\qquad\qquad C_1(\omega_2) = \frac{10}{9}H_0+\frac{80}{9}H_1+\frac{90}{9}H_2\\
&\qquad\qquad C_1(\omega_3) = \frac{10}{9}H_0+\frac{40}{9}H_1+\frac{80}{9}H_2
\end{aligned}$$

这就简化为：

$$\begin{aligned}
\max \quad & \ln(v-H_0-6H_1-10H_2)\\
& +\frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{9}H_0+\frac{60}{9}H_1+\frac{130}{9}H_2\right)\\
& +\frac{1}{4}\ln\left(\frac{10}{9}H_0+\frac{80}{9}H_1+\frac{90}{9}H_2\right)\\
& +\frac{1}{4}\ln\left(\frac{10}{9}H_0+\frac{40}{9}H_1+\frac{80}{9}H_2\right)
\end{aligned}$$

43 对 H_n 计算出偏导数，然后令其等于零，我们得到必要条件：

(2.18)

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{C_0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_1)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_2)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_3)}&=0\\
\frac{-6}{C_0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{60}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_1)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{80}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_2)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{40}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_3)}&=0\\
\frac{-10}{C_0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{130}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_1)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{90}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_2)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{80}{9}\cdot\frac{1}{C_1(\omega_3)}&=0
\end{aligned}$$

此处，运用（2.17）中的四个方程来得以简洁，这样（2.18）中的三个方程实际上刚好包含三个未知量 H_0，H_1 及 H_2。因此，尽管这样做起来不是特别容易的，但是这三个方程能够用来求解最优交易策略 H，从而运用（2.17）中的四个方程最终来获得最优消费过程 C。

一般的消费投资问题（2.16）在一定程度上类似于刚刚使用的例 2.1 那样能够求解出来。通常，$N+1$ 个一阶必要条件是：

(2.19) $$u'(C_0) = E[B_1 u'(C_1)]$$

(2.20) $$u'(C_0)S_n(0) = E[u'(C_1)S_n(1)], \quad n = 1,\cdots,N$$

利用（2.16）中的约束代入 C_0 和 C_1 产生 $N+1$ 个方程，原则上运用这 $N+1$ 个方程能够求解出 $N+1$ 个未知量 H_0，H_1，…，H_N。将这些值代入到（2.16）中的每一个约束条件，从而得到 C_0 和 C_1 的值，只要 C_0 和 C_1 都是非负的（对效用函数适当的假定将保证这一方法成功，例如 $u'(c)\to\infty$，当 $c\searrow 0$ 时），这一方法就得到（2.16）的一个解。

对于某些效用函数而言，一个或多个非负性约束将是必须遵守的，这点是行得通的，在此情况下，刚刚阐述的方法不会成功。运用标准的方法能处理这种问题，但是在此对它们还没阐明过。

注意到，方程（2.20）类似于必须被风险中性概率测度所满足的条件。因此，我们自然地有下面与（2.6）相对的陈述：

(2.21) 如果 C 是最优消费投资问题（2.16）解的一个构成部分，满足 $C_0>0$ 和 $C_1(\omega)>0$ 对于所有 ω，那么

$$Q(\omega)=P(\omega)B_1(\omega)\frac{u'(C_1(\omega))}{u'(C_0)}$$

定义了一个风险中性概率测度。

为理解这点，仅仅注意到 44

$$\begin{aligned}E_Q[S_n(1)/B_1] &= \sum Q(\omega)S_n(1,\omega)/B_1(\omega)\\ &= \sum P(\omega)B_1(\omega)\left(\frac{u'(C_1(\omega))}{u'(C_0)}\right)\left(\frac{S_n(1,\omega)}{B_1(\omega)}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{u'(C_0)} E[u'(C_1)S_n(1)]$$

同时，如果 $C_0 > 0$ 和 $C_1(\omega) > 0$ 对于所有 $\omega \in \Omega$，那么一阶必要条件 (2.20) 必成立。在此情况下，由此可得$E[u'(C_1)S_n(1)]/u'(C_0)$，继而 $E_Q[S_n(1)/B_1]$ 等于 $S_n(0)$。最后，利用 (2.19) 容易证明 $\sum Q(\omega) = 1$，因此，Q 如同 (2.21) 中所定义的那样实际上是一个风险中性概率测度。

现在我们转到在完全模型条件下，用风险中性计算方法求解消费投资问题 (2.16)。其思想是，首先利用原则 (2.15) 重写 (2.16) 如下：

(2.22)

$$\begin{aligned} \max \quad & u(C_0) + E[u(C_1)] \\ \text{s.t.} \quad & C_0 + E_Q[C_1/B_1] = v \\ & C_0 \geqslant 0 \qquad C_1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

最优化问题 (2.16) 和 (2.22) 在本质上是相同的，因为如果一个双元组 (C, H) 是 (2.16) 的可行性解，那么 C 就是 (2.22) 的可行解；反之，如果 C 是 (2.22) 的可行解，那么存在某一个 H 使得 (C, H) 为 (2.16) 的可行解。

注意到，交易策略 H 根本不在 (2.22) 中出现，所以第一步利用风险中性计算方法求解比求解 (2.16) 容易得多。这剩下来的第二步和最后一步是对生成未定权益 C_1 的交易策略计算，其中 C_1 是在子问题 (2.22) 解下的时间 $t=1$ 的消费。与最优投资组合问题相类似，运用标准方法能很容易对这两步求解。

为了用拉格朗日乘子求解 (2.22)，人们首先分析无约束问题

(2.23) $$\max \quad u(C_0) + E[u(C_1)] - \lambda\{C_0 + E[C_1 L/B_1]\}$$

(回想起$E[C_1 L/B_1] = E_Q[C_1/B_1]$)。凭借对效用函数 u 的适当假设确保 (2.22) 最优解的存在，这将以严格正的消费值为特征，下面的一阶必要条件必须满足：

$$u'(C_0) = \lambda \quad 和 \quad u'(C_1(\omega)) = \lambda L/B_1$$

因此

$$(2.24) \qquad C_0 = I(\lambda) \quad 和 \quad C_1(\omega) = I(\lambda L/B_1)$$

其中，$I(\cdot)$ 是边际效用函数$u'(\cdot)$ 的反函数。当然，拉格朗日乘子 λ 必 45
须取到正确的值，也就是该值使得（2.22）中的约束得以满足。这就是

$$(2.25) \qquad I(\lambda) + E_Q[I(\lambda L/B_1)/B_1] = v$$

如同（2.13）条件一样，反函数 I 是递减的，所以这个方程通常将有解 λ。如果正像由（2.24）所给出的，C_0 和 C_1 所对应的值均是非负的，那么它们必是（2.22）的最优解。

如果此方法解出的消费值不是非负的，那么必须用一种更复杂的算法来求（2.22）的解。尽管这里没有讨论这种算法，但是它们是标准方法。在这种情况下，求解（2.22）还是比求解（2.16）更容易，知晓这个道理就足够了。

例 2.3 假设$u(c)=\ln(c)$，这样 $u'(c)=1/c$，且反函数$I(i)=1/i$ 。方程（2.24）和（2.25）成为

$$C_0 = 1/\lambda \quad 和 \quad C_1(\omega) = 1/(\lambda L/B_1)$$

以及

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}E_Q[L^{-1}] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}E[1] = \frac{2}{\lambda} = v$$

从而 $\lambda=2/v$，$C_0=v/2$ 及$C_1(\omega)=vB_1(\omega)P(\omega)/[2Q(\omega)]$。注意到，只要 $v\geqslant 0$，就存在非负值。将这些值代入，得到（2.22）中目标函数的最大值为 $2\ln(v/2)+E[\ln(B_1/L)]$。

例 2.1 和 2.3（续） 满足$L(\omega_1)=2/3, L(\omega_2)=L(\omega_3)=4/3$ 以及 $r=1/9$，如前所述我们有

$$C_1(\omega) = v\,\frac{5}{9}L^{-1} = \begin{cases} \frac{5}{6}v, & \omega = \omega_1 \\ \frac{5}{12}v, & \omega = \omega_2, \omega_3 \end{cases}$$

注意到，(2.15) 中的方程和必要条件 (2.18) 均得以满足，这正是人们所期望的。我们凭借解方程 $C_1/B_1 = v/2 + G^*$ 来算出最优的 H_1 和 H_2，也就是，

$$\frac{3}{4}v = \frac{1}{2}v + 0H_1 + 3H_2$$

$$\frac{3}{8}v = \frac{1}{2}v + 2H_1 - 1H_2$$

$$\frac{3}{8}v = \frac{1}{2}v - 2H_1 - 2H_2$$

46 尽管三个方程存在着两个未知量，但是解是惟一的：$H_1 = -v/48$ 和 $H_2 = v/12$。由于 $v/2 = H_0 + 6H_1 + 10H_2$。由此可得，$H_0 = -(5/24)v$。

概括地说，用原则 (2.15) 大大地简化最优消费投资问题的解，因为它允许人们将原问题分解成两个比较简单的子问题：第一步你不用考虑交易策略求解最优消费过程，而第二步你推导与第一个子问题相对应的交易策略。

基本的消费投资问题 (2.16) 能够在几个方向上得到推广。例如，目标函数能写成

$$u(C_0) + \beta E[u(C_1)] \tag{2.26}$$

其中，纯量 β 满足 $0<\beta\leqslant 1$。此处的想法是凭借把特定参数 β 作为折现因素考虑，对何时消费的时间来建模。

对 (2.16) 的第二种推广是允许消费者拥有收入或在时间 $t=1$ 赋资 $\widetilde{E}$，其中 $\widetilde{E}$ 是特定的随机变量。于是，最优化问题是：

$$\max \quad u(C_0) + E[u(C_1)] \tag{2.27}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & C_0 + H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) = v \\
& C_1 - H_0 B_1 - \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) = \widetilde{E} \\
& C_0 \geqslant 0 \quad C_1 \geqslant 0 \quad H \in \mathbb{R}^{N+1}
\end{aligned}
$$

一个双元组（v，$\widetilde{E}$）有时称为消费者的赋资过程（Endowment Process）。

习题 2.4 当效用函数分别为下列情况时，对消费投资问题推导出 λ，C_0 及 C_1 公式：

(a) $u(c) = -\exp\{-c\}$。

(b) $u(c) = \gamma^{-1}c^{\gamma}$，其中 $-\infty < \gamma < 1$ 且 $\gamma \neq 0$。

习题 2.5 证明如果消费投资问题中的目标函数如同（2.26）中的那样，那么（2.21）中的方程将被推广为：

$$
Q(\omega) = \beta P(\omega) B_1(\omega) \frac{u'(C_1(\omega))}{u'(C_0)}
$$

习题 2.6 对于带赋资的消费投资问题（2.27），证明（2.15）中的方程推广为：

$$
C_0 + E_Q[(C_1 - \widetilde{E})/B_1] = v
$$

习题 2.7 对于例 1.4 而言，假设初始财富 $v = 100$，去刻画所有消费过 47
程 C 的集合特征，而消费过程 C 使得存在一个交易策略 H 促使投资计划（C，H）为可取的。

2.4 均值方差投资组合分析

这节自始至终地假设利率 r 是确定的，不存在套利机会，并且存在

着某一个投资组合满足$E[R]\neq r$。在这种情况下，一个经典的问题是求解均值方差投资组合问题：

$$
\text{(2.28)} \qquad \begin{aligned} \min \quad & \operatorname{var}(R) \\ \text{s.t.} \quad & E[R]=\rho \\ & R \text{ 是投资组合收益} \end{aligned}
$$

其中，ρ是一个特定的纯量。注意到，对每一个$\rho\geqslant r$的值，(2.28) 中可行域是非空的（为理解这点，仅仅取一个适当的无风险投资组合的线性组合并且满足$E[R]\neq r$），从而 (2.28) 的解是定义明确的。特别，目标函数的最优值等于零，当且仅当$\rho=r$；否则，目标函数最优值将是一个有限的正数。

回想起投资组合的收益能表示成

$$
R=\frac{H_0}{V_0}r+\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{H_nS_n(0)}{V_0}\right]R_n
$$

由此可得，R是投资组合的收益当且仅当它能写成形式$R=(1-F_1-\cdots-F_N)r+\sum F_nR_n$，其中$F_n$能够解释成为$t=0$时投资于证券$n$的财富分数形式。因此 (2.28) 能重新写成

$$
\text{(2.29)} \qquad \begin{aligned} \min \quad & F\,\mathbb{C}\,F' \\ \text{s.t.} \quad & (1-F_1-\cdots-F_N)r+\sum F_n\bar{R}_n=\rho \end{aligned}
$$

其中，$\mathbb{C}$是关于收益的协方差$N\times N$矩阵（它的第ij个元素是$\operatorname{cov}(R_i, R_j)$），$\bar{R}_n=ER_n$以及$F\equiv(F_1,\cdots,F_N)$)。这是一种二次规划问题，也是最优化理论领域中一类著名的问题，并且它是由金融学研究者和数学规划研究者对其进行广泛性研究的一个专题内容。

在这一节中，问题 (2.28) 将会用不同的方法来求解，该方法依赖于 2.2 节中所发展起来的现代理论。考虑下面问题：

(2.30)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{var}(V_1) \\ \text{s.t.} \quad & E[V_1] = v(1+\rho) \\ & V_0 = v \end{aligned}$$

此处的约束等同于时间 $t=1$ 时那样的投资组合价值所构成的集合，即投 48
资组合以初始财富 v 开始，而且其期望收益为 $v(1+\rho)$，其中 $\rho \geqslant r$ 正如（2.28）中的那样，且 $v>0$ 是一个特定的纯量。注意到，如果 $\hat{V}_1$ 是（2.30）的一个解，那么 $\hat{R} \equiv (\hat{V}_1 - v)/v$ 满足（2.28）中的约束。此外，如果 R 是另外任何一个满足（2.28）的可行解的收益，那么 $V_1 \equiv v(1+R)$ 满足 $E(V_1)=v(1+\rho)$，这意味着 V_1 是（2.30）的可行解。因此，

$$\mathrm{var}(\hat{R}) = \frac{1}{v^2}\mathrm{var}(\hat{V}_1) \leqslant \frac{1}{v^2}\mathrm{var}(V_1) = \mathrm{var}(R)$$

其中均值 $\hat{R}$ 是（2.28）的一个解，相反，正像（2.28）的解容易给出（2.30）的一个解一样，实际上（2.28）与（2.30）是一个等价问题。换句话说，

(2.31) 关系式 $V_1 = v(1+R)$ 在（2.28）的可行解和（2.30）的可行解之间建立起一种一一对应的关系。

你能够在本节开头看出：我们想要重新用公式表示（2.28），从而我们能应用 2.2 节中的结果，而（2.30）是向这一方向实施的一步。对于接下来的另一步是考虑如何用拉格朗日乘子去解（2.30）。引入纯量 β，人们对目标函数 $\mathrm{var}(V_1) - \beta E[V_1]$ 的最小化问题感兴趣，其约束条件为 $V_0 = v$。但是，$\mathrm{var}(V_1) = E[V_1^2] - (EV_1)^2$，本式稍后将得以验证，从而这一目标函数能写成 $E[\frac{1}{2}V_1^2 - \beta V_1]$。换句话说，运用拉格朗日乘子方法，我们感兴趣的问题是求解

(2.32)

$$\max \quad E\left[-\frac{1}{2}V_1^2 - \beta V_1\right]$$

$$\text{s.t.} \quad V_0 = v$$

问题（2.32）是 2.2 节中所研究过的形式，所以应用那里所得出的最优解，记作 $\hat{V}$，是由

$$\hat{V} = \frac{\beta}{E_Q L}(E_Q L - L) + v(1 + r)\frac{\beta}{E_Q L} \tag{2.33}$$

所给出的（这留作习题），在此情况下 $E[\hat{V}] = \beta(E_Q L - 1)/E_Q L + v(1 + r)/E_Q L$（回想起 $L = Q/P$ 是状态价格密度）。现在假设 Q 和 P 不是恒等的，人们有 $E_Q L > 1$（这也留作习题）。因此，$E[\hat{V}] = v(1 + \rho)$，当且仅当

$$\beta = \frac{v[(1 + \rho)E_Q L - (1 + r)]}{E_Q L - 1} \tag{2.34}$$

把这个值代入到（2.33），这意味着 $\hat{V}$ 是（2.30）的可行解。如果 V 是另外任何一个随机变量，它是（2.30）的可行解，那么 $E[\hat{V}] = E[V]$ 和 $E[-\frac{1}{2}\hat{V}^2 + \beta\hat{V}] \geqslant E[-\frac{1}{2}V^2 + \beta V]$ 的事实蕴含着 $\text{var}(\hat{V}) \leqslant \text{var}(V)$。因此 $\hat{V}$ 是（2.30）是一个最优解。

相反，假设 $\hat{V}$ 是（2.30）的一个解，β 像（2.34）中那样得以满足。如果 V 是另外任何一个随机变量，它是（2.30）的可行解，那么 $E[-\frac{1}{2}\hat{V}^2 + \beta\hat{V}] \geqslant E[-\frac{1}{2}\hat{V}^2 + \beta V]$。上面我们看出（2.32）的任一个解
49 必是（2.30）的可行解，所以我们得出结论，$\hat{V}$ 必是（2.32）的最优解。将（2.30）与（2.32）之间的关系归纳概括如下：

(2.35) 投资组合问题（2.30）和（2.32）是等价的，只要 ρ 和 β 是按照（2.34）相关联的。

注意到，根据（2.34）β 是关于 ρ 的严格递增函数，并且当 $\rho = r$ 时其等

于$v(1+r)$。此外，当 $\rho=r$ 时（2.33）的最优解是$\hat{V}=v(1+r)$，这是一个常数，正是人们所期待的。

问题（2.32）具有2.1节和2.2节中的标准形式，如果投资者的效用函数取成二次函数$u(w)=-w^2/2+\beta w$。虽然人们对二次效用函数有些怀疑，但因为效用函数不是关于财富的非递减函数（这一函数是凹的，但是其在 $w=\beta<\infty$时达到最大值），对于各种应用来说，二次效用函数是可接受的。尤其，原则（2.31）隐含着在二次效用函数投资组合问题（2.32）的解与均值方差投资组合问题（2.28）的解之间存在着一一对应关系。

这种对应关系存在着一个基本的结果。考察（2.33），我们看到（2.28）的解必是状态价格密度的一个仿射[①]函数。实际上，将（2.34）代入到（2.33）中，我们计算出对应于 $\hat{V}$的收益$\hat{R}$是

(2.36)
$$\hat{R}=\frac{\rho E_Q L-r}{E_Q L-1}-\frac{\rho-r}{E_Q L-1}L$$

因此，我们得出结论（这也能从对二次效用函数情况应用（2.12）来得出）：

(2.37) 均值方差投资组合问题（2.28）的最优解 R 是状态价格密度L 的仿射函数。

可以得出更进一步的结果，如果你将这与（1.35）结果联系在一起，得出任一投资组合的风险费用与其收益为状态价格密度的仿射函数的投资组合所对应的β（Beta）之间的一个结果。显然，我们可以建立起著名的资本资产定价模型（CAPM）理论中的证券市场线的结果：

(2.38) *CAPM*：如果 R'是均值方差投资组合问题（2.28）的一个解，对于 $\rho\geq r$，且如果 R 是任一投资组合的收益，那么

$$E[R]-r=\frac{\operatorname{cov}(R,R')}{\operatorname{var}(R')}(E[R']-r)$$

这个关系是十分重要的，因为在以均值方差来考虑问题的投资者那里，经常存在能够被假定成为具有（2.28）形式解的，并且其平均收益能被估计出来的投资组合（例如，股票指数），从而可通过（2.38）给出任意投资组合平均收益的估计。

原则（2.37）有另外一个重要的结果。任意确定某一个 $\hat{\rho}>r$，并且考察由（2.36）所给出的对应收益 $\hat{R}$。将 $\hat{R}$ 考虑成为与某一个投资组合
50 相对应的收益或者是与某一个可用于投资的共同基金（Mutual Fund）的收益。假设一个投资者把其资金的分数形式 λ 部分投资于无风险证券，而（$1-\lambda$）部分投资于这一共同基金，其中 $\lambda=(\hat{\rho}-\rho)/(\hat{\rho}-r)$，并且 $\rho\geqslant r$（$\lambda<0$ 对应于以无风险利率来借入资金）。由于这个投资组合收益 $R=\lambda r+(1-\lambda)\hat{R}$，人们能通过繁杂的代数运算来证实，实际上 R 是由（2.36）准确地给出，仅仅是在右边用 ρ 代替 $\hat{\rho}$。因此，为获得均值方差投资组合问题（2.28）的任一个解，如果存在一个与该解对应的可用于投资的共同基金，那么个人就没有必要去做买卖证券的交易。它仅是一个在无风险证券和共同基金之间分配投资资金的问题。由于所有风险证券都处于共同基金里，这点表明投资于风险证券的资金相对比例数（也就是，投资于证券 n 的资金数除以投资于共同基金的资金数）是相对于 ρ 而言的一个常数。所有这一切能够归纳概括如下：

(2.39) 共同基金原则（Mutual Fund Principle）：假设你拥有某一投资组合，其收益是对应于某个平均收益 $\hat{\rho}>r$ 的均值方差投资组合问题（2.28）的一个解，那么（2.28）的解对于另外任何均值收益而言，可凭借投资于无风险证券和固定的投资组合所构成的投资组合来达到。

因此，在以均值方差来考虑问题的投资者那里具有十分漂亮的性质；投资者喜欢这些十分漂亮的性质。然而，应该强调的是，这些漂亮的性质在其投资决策与二次效用函数不相一致的投资者那里没有出现。例如，正如在 2.2 节中所看到的，具有对数效用的投资者将选择那种投资组合，即其在时间 $t=1$ 时的价值与状态价格密度的反函数是成比例的。在此情况下，财富通常不能表示成为状态价格密度的仿射函数，同时，证券市场线的结论对于具有对数效用投资者企图投资于任何投资组合的情况将不成立。

事实上，CAPM 证券市场线的结果对一类合理效用函数来说是成立

的，这点几乎显得特别的幸运。对于相当多的效用函数来讲，最优投资组合的收益不是状态价格密度的仿射函数，因而，(1.35) 中 R' 的作用不能发挥出来。结果 (1.35) 在一定意义上是最基本的，这里的一定意义是指把其应用到任何的单时期证券市场中，只要它的一般假设得以满足，而 CAPM 的结果 (2.38) 就是一种特例或者推论。但是，一般形式不是特别地有用，除非你使 R' 与一种经济上有意义的投资组合相关联。在以均值方差来考虑问题的世界中，你能够做到这点，还有为什么 CAPM 结果 (2.38) 是那样的重要。

例 2.4 假设 $N=2$，$K=3$，并且收益过程 R_n 和概率度 P 如表 2.1 所示：

表 2.1 **例 2.4 数据** 51

	ω_1	ω_2	ω_3
$R_1(\omega)$	0.2	-0.2	0.05
$R_2(\omega)$	0.15	0	-0.1
$P(\omega)$	1/3	1/3	1/3
$R_1^*(\omega)$	$\frac{0.2-r}{1+r}$	$\frac{-0.2-r}{1+r}$	$\frac{0.05-r}{1+r}$
$R_2^*(\omega)$	$\frac{0.15-r}{1+r}$	$\frac{-r}{(1+r)}$	$\frac{-0.1-r}{1+r}$
$Q(\omega)$	$0.258+4.52r$	$0.355-1.3r$	$0.387-3.22r$
$L(\omega)$	$0.774+13.56r$	$1.065-3.9r$	$1.161-9.66r$

为了拥有风险中性概率测度 Q，求解 $E_Q R_n^* = 0$，显然这是存在的，只要 $r<0.387/3.22=0.12$。这些量连同作为结果的状态价格密度 L 在表 2.1 中已列出。

为解出经典的均值方差问题 (2.29)，我们首先计算出 $ER_1 = ER_2 = 1/60$，$\mathrm{var}(R_1) = 0.02722$，$\mathrm{var}(R_2) = 0.01056$ 以及 $\mathrm{cov}(R_1, R_2) = 0.00805$。假定从现在起 $r=0$（为简单起见），这将导致解是 $F_1 = 6.95\rho$ 和 $F_2 = 53.05\rho$。因此，例如如果 $\rho = 1\%$，那么资金额的 6.95% 应该投资于第一种风险证券，资金额的 53.05% 投资于第二种风险证券，资金额的 40% 投资于无风险证券。此外，此投资组合的收益是

$$R = F_1R_1 + F_2R_2 = \begin{cases} 0.0936, & \omega = \omega_1 \\ -0.0140, & \omega = \omega_2 \\ -0.0496, & \omega = \omega_3 \end{cases}$$

作为一种选择，人们运用公式（2.33）和（2.34）计算出 $E_QL = 1.207$，$\beta = v[1 + 38.04\rho]$，$\hat{V} = v[1 + 38.04\rho - 37.04\rho L]$ 和 $\hat{R} = 38.04\rho - 37.04\rho L$。为了得到 F_1 和 F_2，你求解 $\hat{R} = F_1R_1 + F_2R_2$。因此，例如，如果 $\rho = 1\%$，那么你将获得如上表所示的价值。

习题 2.8 已知风险中性概率测度 Q，原始概率测度 P 以及对应的状态价格密度 L，证明 $E_QL \geqslant 1$，等式成立当且仅当 $Q = P$（提示：对 $\sum Q^2(\omega_k)/P(\omega_k)$ 求最小值，在适当的约束条件下）。

习题 2.9 验证方程（2.33）。

习题 2.10 验证与共同基金原则（2.39）相联系的命题：

$R = \lambda r + (1-\lambda)\hat{R}$ 满足（2.36），其中 $\lambda = (\hat{\rho} - \rho)/(\hat{\rho} - r)$。

---

52 2.5 带卖空约束及类似限制的投资组合管理

在前面的一些节中所研究的基本最优投资组合问题，对许多实际情况而言是不合时宜的，因为一些重要约束被忽略不计。例如，股票交易规则禁止投资者卖空股票或禁止以借入资金的方式来达到融资股票的目的。因此，重要的是能够求解问题（2.1）的形式，其中约束条件将对可取的交易策略产生影响。

在许多现实情况下，通常更自然的表述约束是以投资于证券 n 的资金比例份额的分数形式 $F_n \equiv H_nS_n(0)/V_0$ 来表示的，其中 $n = 1, \cdots, N$，而不是以投资证券 n 的股份数量 H_n 来表示的。例如，不许卖空证券 n 表示为 $F_n \geqslant 0$，不许从银行账户借入资金表示为 $F_1 + \cdots + F_N \leqslant 1$，以及不许以多于财富的 4% 投资于证券 n 表示为 $F_n \leqslant 0.04$。因此，通常股份的约束将被表示成一种约定，$F \equiv (F_1 + \cdots + F_N) \in \mathbb{K}$，其中 $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^N$ 是一个

特定的子集，$\mathbb{K}$被假定成是闭的和凸的，为了本节后面表示简单起见，将假定有策略 $0\in\mathbb{K}$，也就是将所有的资金投资于银行账户总是可行的。例如，$\mathbb{K}$分别等于 $\{F\in\mathbb{R}^N: F_n\geqslant 0\}$， $\{F\in\mathbb{R}^N: F_1+\cdots+F_N\leqslant 1\}$ 且 $\{F\in\mathbb{R}^N: F_n\leqslant 0.04\}$，这三种情况如上所述。

对交易策略是以形式 F 来表示的情况而言，以投资组合的收益过程 R 来表示时间 $t=1$ 时财富 $V_1=V_0(1+R)$ 是方便的。考虑到（1.32），这是

$$R=(1-\sum_{n=1}^{N}F_n)r+\sum_{n=1}^{N}F_nR_n=r+\sum_{n=1}^{N}F_n(R_n-r)$$

其中，R_n 是证券 n 的收益过程。因此，最优投资组合问题能表示成

$$\max_{F\in\mathbb{K}}\quad Eu(v(1+r+\sum_{n=1}^{N}F_n(R_n-r))) \tag{2.40}$$

其中，$v=V_0$ 是投资组合的初始价值。

类似于 2.1 节中对无约束问题所运用的那些方法，运用传统方法可直接求解这类问题。通过考察一个简单的例子来阐述是最佳的方法。

例 2.5 证券投资过程与例 2.4 相同，但是现在 $r=0$，$P(\omega_1)=0.26, P(\omega_2)=P(\omega_3)=0.37$，同时效用函数是一个对数函数。这样，目标函数是

$$\begin{aligned}&0.26\ln[1+0.2F_1+0.15F_2]+0.37\ln[1-0.2F_1]\\&\quad+0.37\ln[1+0.05F_1-0.1F_2]\end{aligned}$$

而对应的偏导数是

$$\frac{\partial}{\partial F_1}=\frac{0.052}{1+0.2F_1+0.15F_2}-\frac{0.074}{1-0.2F_1}+\frac{0.0185}{1+0.05F_1-0.1F_2}$$

53

和

$$\frac{\partial}{\partial F_2}=\frac{0.039}{1+0.2F_1+0.15F_2}-\frac{0.037}{1+0.05F_1-0.1F_2}$$

因此，对于无约束问题的最优解，利用令这些偏导数等于零来得到，即 $F_1=-0.21333$ 和 $F_2=0.33467$。

现在假设卖空风险证券是被禁止的，也就是$\mathbb{K}=\{F\in\mathbb{R}^2: F_1\geqslant 0$ 且 $F_2\geqslant 0\}$。倘若这样，那么无约束的最优解就不是可行的，所以我们必须再做一些工作。显然，新的最优解必是在$\mathbb{K}$的边界上某一点达到，其中这点的方向导数是$\mathbb{K}$的法线。考虑到无约束最优解，我们猜测最优解满足 $F_1=0$ 和 $F_2>0$。因此，我们考察满足 $F_1=0$，$F_2>0$，$\partial/\partial F_2=0$ 以及 $\partial/\partial F_1<0$的点。运用上述偏导数的表示式，我们容易计算出约束问题的最优解是 $F_1=0$ 和 $F_2=0.21164$。注意到，最优可达财富是

$$W=v[1+F_1R_1+F_2R_2]=\begin{cases}1.03175v, & \omega=\omega_1\\ v, & \omega=\omega_2\\ 0.97884v, & \omega=\omega_3\end{cases}$$

从而，最优目标值为

$$E\ln W=\ln v+0.26\ln(1.03175)+0.37\ln(0.97884)=\ln v+0.00021$$

概括归纳求解问题（2.40）的传统方法，首先得到无约束最优解并检验它是否为可行解；然后如果不是，那么考察边界$\mathbb{K}$上的某一点，其中该点的方向导数是$\mathbb{K}$的法线，这里自始至终地运用了偏导数。虽然这方法容易应用于例子 2.5 的情况中，但在拥有多种证券以及/或者存在不同的效用函数类型时计算量变得难以克服的多。此外，当人们去处理多时期模型时，这些计算上的困难就是一种复合型的。因此，我们对一种可供选择的方法，即风险中性计算方法感兴趣。

有关约束投资组合的风险中性计算方法大致如下所述：对于某一子集 $\tilde{\mathbb{K}}\subset\mathbb{R}^N$ 中含有的每一个参数 κ 定义一种修正的证券市场（Modified Securities），记作 $\mathcal{M}_\kappa$（$\kappa=0$ 对应于初始市场）。然后，对市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 考虑一种约束问题。特别地，运用 2.2 节中所发展起来的注重于最优目标值的公式，记为$J_\kappa(v)$，对于每一个 $\kappa\in\tilde{\mathbb{K}}$。这样，求解对偶问题（Dual Problem）

$$\textbf{(2.41)} \qquad \min_{\kappa \in \widetilde{\mathbb{K}}} \quad J_\kappa(v)$$ 54

如果 $\hat{\kappa}$ 表示（2.41）的最优解，那么市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中的无约束问题的最优解将被证明是初始市场 $\mathscr{M}_0$ 中约束问题的最优解。此外，对应的最优目标值将是相同的。

尽管风险中性计算方法还要求人们去使用传统方法去求解一个约束最优化问题，但是可以证明求得（2.41）常常比求解（2.40）更容易。

现在转到某些细节上，集合$\widetilde{\mathbb{K}}$就是

$$\widetilde{\mathbb{K}} \equiv \{\kappa \in \widetilde{\mathbb{R}}^N : \delta(\kappa) < \infty\}$$

其中，函数 δ: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是由

$$\delta(\kappa) \equiv \sup_{F \in \mathbb{K}} (-F\kappa')$$

来定义的，其中 κ'表示行向量 κ 的转置。函数 δ 是凸的，并称为 $-\mathbb{K}$的支撑函数（Support Function）。注意到，由于 $0 \in \mathbb{K}$，所以 δ 是非负的。这里将假设$\mathbb{K}$是使得 δ 在$\widetilde{\mathbb{K}}$上为连续的。集合$\widetilde{\mathbb{K}}$称为 δ 的有效域（Effective Domain），它是包含点 $\kappa=0$ 的凸锥。例如，如果$\mathbb{K}=\{F \in \mathbb{R}^N: F_n \geqslant 0$，$n=1$，$\cdots$，$N\}$，那么

$$\textbf{(2.42)} \qquad \delta(\kappa) = \begin{cases} 0, & \kappa \in \mathbb{K} \\ \infty, & \kappa \notin \mathbb{K} \end{cases}$$

而且$\widetilde{\mathbb{K}}=\mathbb{K}$。考察另外一个例子，如果$\mathbb{K}=\{F \in \mathbb{R}^N: F_1+\cdots+F_N \leqslant 1\}$，那么

$$\textbf{(2.43)} \qquad \delta(\kappa) = \begin{cases} -\lambda, & \kappa_1 = \cdots = \kappa_N = \lambda \leqslant 0 \\ \infty, & \text{其他} \end{cases}$$

且$\widetilde{\mathbb{K}}=\{\kappa\in\mathbb{R}^N:\kappa_1=\cdots=\kappa_n\leqslant 0\}$。

为定义每一个 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$的辅助市场 $\mathscr{M}_\kappa$，我们依据

$$r \rightarrow r+\delta(\kappa)$$
$$R_n \rightarrow R_n+\delta(\kappa)+\kappa_n, \quad n=1,\cdots,N$$

简单地修改银行账户和风险证券的收益过程。换句话讲，在市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中银行的利率是由初始利率加上一个非负的量$\delta(\kappa)$ 等等。注意到，$\kappa=0$ 的情况实际上是与初始市场相一致的。

为了求解市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中的无约束问题，我们将需要使用相应的风险性概率测度，把它记作 Q_κ。本节自始至终地假设初始市场的风险中性概率测度 $Q=Q_0$ 存在且惟一。由于 Q_0 是满足

$$E_Q\left(\frac{R_n-r}{1+r}\right)=0, \quad n=1,\cdots,N$$

55 的惟一概率测度。对其他的 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$可得，$Q_\kappa$必是满足 $Q=Q_\kappa$

(2.44) $$E_Q\left(\frac{R_n+\kappa_n-r}{1+r+\delta(\kappa)}\right)=0, \quad n=1,\cdots,N$$

的概率测度。人们还不清楚对于所有的 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$，$Q_\kappa$ 是否存在，但是通过假设 $\delta(\cdot)$ 连续性知道，至少在 $\kappa=0$ 的某个开邻域内对于所有 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$，惟一的 Q_κ 将是存在的，并且函数 $\kappa\mapsto Q_\kappa$ 是连续的。

在市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中，状态价格密度与银行账户过程分别表示成

$$L_\kappa\equiv\frac{Q_\kappa}{P} \quad 与 \quad B_1^\kappa=1+r+\delta(\kappa)$$

此外，对给定的任何一个交易策略 F，市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中投资组合在时间 $t=1$

时的价值由

(2.45)

$$\begin{aligned}V_1^\kappa = v(1+R^\kappa) &= v\left[1+r+\delta(\kappa)+\sum_{n=1}^{N}F_n(R_n+\kappa_n-r)\right]\\&= v\left[1+r+\sum_{n=1}^{N}F_n(R_n-r)+\delta(\kappa)+\sum_{n=1}^{N}F_n\kappa_n\right]\\&= V_1^0+v[\delta(\kappa)+F\kappa']\end{aligned}$$

给出。重要的是注意到，如果 $F\in\mathbb{K}$，那么由 $\delta(\cdot)$ 的定义，人们有$\delta(\kappa)+F\kappa'\geqslant 0$，在此情况下，$V_1^\kappa\geqslant V_1^0$。另一方面，如果 $F\notin\mathbb{K}$，那么可能有 $\delta(\kappa)+F\kappa'<0$，在这一情况下，$V_1^\kappa<V_1^0$ 以及$Eu(V_1^\kappa)<Eu(V_1^0)$。这就是为什么可能有最优目标值满足$J_\kappa(v)<J_0(v)$ 的缘由。

现在我们有条件来阐述风险中性计算方法是如何起作用的。

例 2.5（续） 满足$\mathbb{K}=\{F\in\mathbb{R}^2:F_1\geqslant 0$ 且 $F_2\geqslant 0\}$，我们有$\widetilde{\mathbb{K}}=\mathbb{K}$以及$\delta(\cdot)$ 如上面（2.42）中所述。满足$r=\delta(\kappa)=0$ 对于 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$，（2.44）简化为

$$\begin{aligned}0.2Q_\kappa(\omega_1)-0.2Q_\kappa(\omega_2)+0.05Q_\kappa(\omega_3)&=-\kappa_1\\0.15Q_\kappa(\omega_1)-0.1Q_\kappa(\omega_3)&=-\kappa_2\end{aligned}$$

连同$E_{Q_\kappa}[1]=1$ 求解这个方程组得到

$$Q_\kappa(\omega)=\begin{cases}[8-40\kappa_1-100\kappa_2]/31, & \omega=\omega_1\\ [11+100\kappa_1-60\kappa_2]/31, & \omega=\omega_2\\ [12-60\kappa_1+160\kappa_2]/31, & \omega=\omega_3\end{cases}$$

这些概率都严格为正，从而 Q_κ 是市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 的一个正确的风险中性概率测度，只要 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$且 $40\kappa_1+100\kappa_2<8$。

下一步是求解市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 的约束最优化问题。令 W_κ 表示对应的最优可达财富，在 2.2 节中我们由习题 2.2 知 56

$$W_\kappa = vB_1^\kappa / L_\kappa = vP/Q_\kappa \tag{2.46}$$

此外，目标函数的最优值是

(2.47)

$$\begin{aligned} J_\kappa(v) &= \ln(v) - E\ln(L_\kappa/B_1^\kappa) = \ln(v) + E\ln P - E\ln Q_\kappa \\ &= \ln(v) + [0.26\ln(0.26) + 2(0.37)\ln(0.37)] \\ &\quad - [0.26\ln(8 - 40\kappa_1 - 100\kappa_2) + 0.37\ln(11 - 100\kappa_1 - 60\kappa_2) \\ &\quad + 0.37\ln(12 - 60\kappa_1 + 160\kappa_2) - \ln(31)] \end{aligned}$$

接下来的步骤是对 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$ 求最小值 $J_\kappa(v)$。鉴于上述表达式，此解与求解

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.26\ln(8 - 40\kappa_1 - 100\kappa_2) + 0.37\ln(11 - 100\kappa_1 - 60\kappa_2) \\ & \quad + 0.37\ln(12 - 60\kappa_1 + 160\kappa_2) \\ \text{s.t.} \quad & \kappa_1 \geqslant 0, \quad \kappa_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

是相同的。以标准方式运用偏导数，该最优解经计算为 $\hat{\kappa}_1 = 0.0047$ 和 $\hat{\kappa}_2 = 0$。将这些值代入到（2.46）和（2.47）式中，得到与前面运用传统方法所获得的最优可达财富和最优目标值是相同的。

这种风险中性方法为什么起作用呢？关键是市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中关于可达财富表达式（2.45），以及此后立刻获得的观察。凭借相同的理由，初始市场 $\mathcal{M}_0$ 中约束问题的最优目标值，我们表示为 $J(v)$，其必小于或等于市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中对于任何 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$ 的约束问题的最优目标值。当然，后者必小于或等于市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中无约束问题的最优目标值。因而，我们必有

$$J(v) \leqslant J_\kappa(v), \quad 所有\ \kappa \in \widetilde{\mathbb{K}} \tag{2.48}$$

显然，对于将（2.48）右边最小化的 κ 而言，这个不等式能够成为等式，现解释如下。

(2.49) 假设对于某一个 $\hat{\kappa}\in\widetilde{\mathbb{K}}$，市场 $\mathcal{M}_{\kappa}$ 中无约束投资组合问题的最优交易策略 F 满足

(a) $F\in\mathbb{K}$

(b) $\delta(\kappa)+F\hat{\kappa}'=0$

那么对于初始市场 $\mathcal{M}_0$ 中约束问题而言，F 是最优的，并且 $J(v)=J_{\hat{\kappa}}(v)\leqslant J_{\kappa}(v)$ 对于所有 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$。

为理解这个结论，注意到，由（2.45）知（b）蕴含着 W，即市场 57
$\mathcal{M}_{\hat{\kappa}}$ 中在 F 下的可达财富满足

$$W=v\left[1+r+\sum_{n=1}^{N}F_n(R_n-r)\right]$$

其意味着 W 也是初始市场 $\mathcal{M}_0$ 中在 F 下的可达财富。由于 F 对约束问题是可行的，由此可知 $Eu(W)\leqslant J(v)$。然而，$Eu(W)=J_{\hat{\kappa}}(v)$，所以由（2.48）我们必须有 $Eu(W)=J(v)=J_{\hat{\kappa}}(v)\leqslant J_{\kappa}(v)$，对于所有 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$。

概括地讲，在（2.49）中关于 $\hat{\kappa}$ 的明显候选者是对偶问题（2.41）的解。通过计算这个 $\hat{\kappa}$，那么你就检验 F 是否满足 $F\in\mathbb{K}$ 和 $\delta(\hat{\kappa})+F\hat{\kappa}'=0$，其中 F 是市场 $\mathcal{M}_{\hat{\kappa}}$ 中无约束最优投资组合问题的最优交易策略（要使这两条件都得以满足是没有保证的，但是在许多广泛的情况下，它们都将自动地成立）。如果是这样的话，那么 F 是初始市场 $\mathcal{M}_0$ 中约束问题的最优解。

本节以另一个例子作为结束。

例 2.6 证券过程与例 2.4 和例 2.5 的相同，但是现在 $r=0$，$P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=1/3$，效用函数是一个对数函数，并且不允许从银行借款。这样 $\mathbb{K}=\{F\in\mathbb{R}^2:F_1+F_2\leqslant 1\}$，$\widetilde{\mathbb{K}}=\{\kappa\in\mathbb{R}^2:\kappa_1=\kappa_2\leqslant 0\}$，而且

$$\delta(\kappa)=\begin{cases}-\lambda, & \kappa_1=\kappa_2=\lambda\leqslant 0\\ \infty, & \text{其他}\end{cases}$$

因此为了容易解释，我们认为向量 $\kappa\in\widetilde{\mathbb{K}}$ 与纯量 $\lambda\leqslant0$ 是相匹配一致的。

市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中银行账户的利率将是 $-\lambda$，但市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中风险证券的收益过程将与初始市场 $\mathscr{M}_0$ 中的相同。因而，由（2.44）通过求解方程组

$$
\begin{aligned}
0.2Q_\kappa(\omega_1)-0.2Q_\kappa(\omega_2)+0.05Q_\kappa(\omega_3)&=-\lambda\\
0.15Q_\kappa(\omega_1)\qquad\qquad\qquad\qquad -0.1\ Q_\kappa(\omega_3)&=-\lambda\\
Q_\kappa(\omega_1)+\quad Q_\kappa(\omega_2)+\qquad Q_\kappa(\omega_3)&=1
\end{aligned}
$$

能得到风险中性概率测度 Q_κ。这样得到

$$
Q_\kappa(\omega)=\begin{cases}[8-140\lambda]/31, & \omega=\omega_1\\ [11+40\lambda]/31, & \omega=\omega_2\\ [12+100\lambda]/31, & \omega=\omega_3\end{cases}
$$

这些概率全是严格正的，从而 Q_κ 是一个合理的风险中性概率测度，如果 $-0.12<\lambda\leqslant0$。

58 满足 $B_1^\kappa=(1-\lambda)$，市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中无约束问题的最优目标值是由

$$
J_\kappa(v)=\ln(v)-E\ln(L_\kappa/B_1^\kappa)=\ln(v)-E\ln Q_\kappa+E\ln P+\ln(1-\lambda)
$$

给出。因此，对偶问题（2.41）是与

$$
\max_{-0.12<\lambda\leqslant0}\quad \frac{1}{3}\ln(8-140\lambda)+\frac{1}{3}\ln(11+40\lambda)+\frac{1}{3}\ln(12+100\lambda)-\ln(1-\lambda)
$$

相同的。虽然这个目标函数在实直线上不是凹的，但是此约束问题的解容易似近地确定为 $\lambda=-0.00711$，也就是 $\hat{\kappa}=(-0.00711,\ -0.00711)$。

接下来的一步是计算出市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中无约束问题的最优交易策略 F。相对应的最优可达财富是

$$W_{\hat{\kappa}} = vB_1^{\hat{\kappa}}/L_\kappa = \frac{1.0071vP}{Q_{\hat{\kappa}}} = \begin{cases} 1.157v, & \omega = \omega_1 \\ 0.972v, & \omega = \omega_2 \\ 0.921v, & \omega = \omega_3 \end{cases}$$

这样，F 能借助于求解（2.45）来计算出，也就是

$$W_{\hat{\kappa}}(\omega) = v[1.00711 + F_1(R_1(\omega) - 0.00711) + F_2(R_2(\omega) - 0.00711)]$$

这得出 $F = (0.14, 0.86)$。显然，$F \in \mathbb{K}$ 并且 $\delta(\hat{\kappa}) + F\hat{\kappa}' = 0$，所以由 (2.49) 知 F 必是约束问题的优解。把 $\hat{\kappa} = -0.00711$ 代入上面表达式 $J_\kappa(v)$ 得出，最优目标值等于 $\ln v + 0.01171$。

习题 2.11 假设 $P(\omega_1) = 0.5$，$P(\omega_2) = 0.3$ 和 $P(\omega_3) = 0.2$，求解例 2.6。

2.6 不完全市场中的最优投资组合

本章直到这节都假定模型是完全的，而这种假定对风险中性计算方法而言是极为重要的。在此假定下，可达财富集合是容易识别和刻画的，同样运用凸优化理论来识别最优可达财富，人们确信这一方法可找出生成这种财富的交易策略。在不完全市场情况下，所有这些原则是同样适用的，然而更多的工作是必须去准确地识别可达财富集合。只有这样做，人们才能像如前所述的那样算出最优可达财富，从而最后获得生成这种财富的交 59
易策略。

当然，人们常常会回到标准方法上，比如像一阶必要条件等等，与 2.1 节所述完全相同。对不完全市场情况而言，标准方法的困难程度不会超过完全市场的情况，所以不完全市场模型中风险中性计算方法的相对优势减少了。然而，当处理某种类型效用函数时，风险中性计算方法还是比较受喜欢的，尤其在分析多时期模型的时候，这点将在后面看到。

可以证明，在不完全市场中甚至存在第三种方法用于求解最优投资组

合问题。这种方法依赖于在前一节中所表示的约束最优化方法，所以它完全适用于卖空约束的引进和/或者类似约束的情况。其思想是对市场引入虚构证券（Fictitious Securities），以这种方式来使模型成为完全市场的情况，然后运用约束条件来禁止这些虚构证券具有任何头寸。在仔细观察风险中性计算方法之后，在本节后面的内容中来阐述此种虚构证券的方法。

识别可达财富集合的一个关键要素是原则（1.23），其内容是说未定权益（也就是财富）W 是可达的，当且仅当$E_Q[W/B_1]$ 对于每一个风险中性概率测度 $Q\in\mathbb{M}$都取相同的值。这样，$\mathbb{W}_v$ 是由$\mathbb{W}_v=\{W\in\mathbb{R}^K:E_Q[W/B_1]=v$，所有 $Q\in\mathbb{M}\}$ 给出的，其中$\mathbb{W}_v$ 是能生成为开始具有初始资本 v 的财富集合。但是，$\mathbb{W}_v$ 的这个特性是不实用的，因为在不完全模型中风险中性概率测度集合包含有无穷多个元素。这个困难在关系式（1.17）的帮助下得以解决，而关系式（1.17）的内容表明，$\mathbb{M}$是一个线性子空间和严格正的概率测度集合的交集。特别，存在着$\overline{\mathbb{M}}$（即$\mathbb{M}$的闭集）中的有限个独立向量，比如，$Q(1)$，$Q(2)$，…，$Q(J)$，使得$\mathbb{M}$中的每一个元素能表示成为这 J 个向量的线性组合（参见线性组合（1.25）），其中权之和为 1，但是权中的一部分能为零或者负数。因此，$E_Q[W/B_1]=v$ 对于所有$Q\in\mathbb{M}$，当且仅当$E_{Q(j)}[W/B_1]=v$ 对于$j=1,\cdots,J$，所以

$$\mathbb{W}_v=\{W\in\mathbb{R}^K:E_{Q(j)}[W/B_1]=v,\quad \text{所有 } j=1,\cdots,J\}$$

由此可得，最优组合问题（2.1）（或者（2.9））能写成

$$\begin{aligned}\textbf{(2.50)}\qquad &\max\quad Eu(W)\\ &\text{s.t.}\quad E_{Q(j)}[W/B_1]=v,\quad j=1,\cdots,J\end{aligned}$$

像 2.2 节中那样，问题（2.50）能通过引入拉格朗日乘子来求解，同时 J 对应于状态价格密度$L_j\equiv Q(j)/P$：

$$\textbf{(2.51)}\qquad \max\quad Eu(W)-\sum_{j=1}^{J}\lambda_jE[L_jW/B_1]$$

一阶必要条件，对于每一个 $\omega \in \Omega$ 是 60

$$u'(W(\omega)) = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j L_j(\omega) / B_1(\omega), \quad \text{所有 } \omega \in \Omega$$

或者

$$W(\omega) = I\left[\sum_{j=1}^{J} \lambda_j L_j(\omega) / B_j(\omega)\right], \quad \text{所有 } \omega \in \Omega \tag{2.52}$$

其中$I(\cdot)$ 是 u'的反函数。像 J 的拉格朗日乘子的函数那样，这给出了 (2.51) 的解。把这个表达式代入到 (2.50) 的约束 J 中，人们就能够解出产生 (2.50) 解的拉格朗日乘子的值。换句话说，把拉格朗日乘子满足

$$E[L_j I(\lambda_1 L_1 / B_1 + \cdots + \lambda_J L_J / B_1) / B_1] = v, \quad j = 1, \cdots, J \tag{2.53}$$

的值代入到产生 (2.50) 最优解的 (2.52) 中。从此解中，即最优可达财富，人们最后以通常的方法计算出最优交易策略。

方程组 (2.53) 依赖于效用函数的性质，一般地有惟一的、非负的解。如果效用函数是严格凹的，那么 (2.50) 的解将是惟一的。这种计算程序现在通过例子来加以阐述。

例 2.7 证券模型与例 1.2 相同，即 $K=3$，$N=1$，$r=1/9$，$S_0=5$，并且

ω	$S_1(\omega)$	$S_1^*(\omega)$	$P(\omega)$
ω_1	20/3	6	1/3
ω_2	40/9	4	1/3
ω_3	30/9	3	1/3

在第 1 章中已经知道这一模型是不完全的，$\mathbb{M}$是由所有概率测度形式为

$$Q = (\theta, 2 - 3\theta, -1 + 2\theta), \quad \text{其中} \frac{1}{2} < \theta < \frac{2}{3}$$

所构成的，而且未定权益$X = (X_1, X_2, X_3)$ 成为可达的，当且仅当

$$(2.54) \qquad X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 0$$

在这种情况下，$\mathbb{M}$的一个基能通过在$\mathbb{M}$中取任何两个不同的元素来得到。事实上，人们对应于$\theta=1/2$，$\theta=2/3$，能够取两个端点，而这正是我们所要做的内容：

$$Q(1) = (1/2,1/2,0) \qquad Q(2) = (2/3,0,1/3)$$
$$L_1 = (3/2,3/2,0) \qquad L_2 = (2,0,1)$$

61 取$u(w)=\ln(w)$，人们有 $u'(w)=1/w$ 和 $I(i)=1/i$，所以方程组（2.53）在经过稍微的代数计算之后成为

$$\frac{1}{3\lambda_1 + 4\lambda_2} + \frac{1}{3\lambda_1} = v$$
$$\frac{4}{9\lambda_1 + 12\lambda_2} + \frac{1}{3\lambda_2} = v$$

惟一的、非负的解是

$$\lambda_1 = 0.46482v^{-1} \quad \lambda_2 = 0.53519v^{-1}$$

把这些数值代入到（2.52）中得出，最优可达财富

$$W(\omega) = \frac{v}{0.46482(9/10)L_1(\omega) + 0.53519(9/10)L_2(\omega)}$$
$$= \begin{cases} 0.62860v, & \omega = \omega_1 \\ 1.59360v, & \omega = \omega_2 \\ 2.07611v, & \omega = \omega_3 \end{cases}$$

注意到，通过检验知 W 满足方程（2.54）。求解 $H_0 + 6H_1 = (9/10)(0.6286)v$ 及$H_0 + 4H_1 = (9/10)(1.5936)v$ 得到最优交易策略

$$H_0 = 3.17124v \quad 及 \quad H_1 = -0.43425v$$

最优目标值是 $0.24409+\ln v$。

概括地讲，对不完全模型而言的风险中性计算方法本质上与完全模型的相同，但是计算困难有所增加，因为首先要规定（2.50）中的附加约束，然后再去处理它。

现在我们转到以虚构证券为特点的可选择的计算方法上。其思想是对模型增加一种或者多种证券，以此方式来使模型成为完全模型的情况（当然，没有增加任何套利机会）。然后，人们运用上一节方法来求解带约束条件的最优投资组合问题，而约束条件为：没有头寸能够吸纳任何一种附加的虚构证券。因为这种最优化问题是为完全市场而实施的，所以计算上会比两种可选择的方法更简单，甚至带约束条件的方法。

虽然这个概念是简单的，但一个关键的步骤是正确地规定附加的虚构证券。为此，一个好的方法是以第一章的 $K\times N$ 矩阵 A 开始： 62

$$A=\begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \cdots & S_N(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) & \cdots & S_N(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \cdots & S_N(1)(\omega_K) \end{bmatrix}$$

此矩阵的秩比 K 小，因为市场是不完全的。我们需要添加一些虚构证券，也就是添加一些非负的列向量，使得 A 的秩变成正好是 K。当选择一些列向量添加时，人们必须小心避免增加套利机会。正如下面例子所阐述的，一些线性代数的知识将保证具有一个满意的结果。

例 2.7（续） 增加一个虚构证券就能满足要求，使得矩阵 A 有形式

$$A=\begin{bmatrix} 10/9 & 60/9 & S_2(1)(\omega_1) \\ 10/9 & 40/9 & S_2(1)(\omega_2) \\ 10/9 & 30/9 & S_2(1)(\omega_3) \end{bmatrix}$$

比如取 $S_2(1)=(50/9,\ 20/9,\ 70/9)$，容易验证矩阵 A 将有满秩 3。由于初始市场中所有的风险中性概率满足 $Q=(\theta,\ 2-3\theta,\ -1+2\theta)$，对于 $1/2<\theta<2/3$，由此可得，在新的市场中惟一的风险性概率测度也必是这

种形式。例如，取 $\theta=7/13$，进而 $Q=(7/13, 5/13, 1/13)$，同时 $S_2(0)=E_Q[(9/10)S_2(1)]=4$。

在新的市场中仍需要求解最优投资组合问题，其约束为 #2 的证券头寸被禁止交易。利用上一节中所述方法，这意味$\mathbb{K}=\{F\in\mathbb{R}^2: F_2=0\}$

$$\delta(\kappa)=\sup_{F\in\mathbb{K}}(-F\kappa')=\sup_{F_1\in\mathbb{R}}(-F_1\kappa_1)=\begin{cases}0, & \kappa_1=0\\ \infty, & \text{其他}\end{cases}$$

以及$\widetilde{\mathbb{K}}=\{\kappa\in\mathbb{R}^2:\kappa_1=0\}$。市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中的收益过程是

	ω_1	ω_2	ω_3
$R_1(\omega)$	$1/3$	$-1/9$	$-1/3$
$R_2(\omega)$	$7/18+\kappa_2$	$-4/9+\kappa_2$	$17/18+\kappa_2$

并且对应的风险中性概率测度经计算为

$$Q_\kappa(\omega)=\begin{cases}7/13-(18/65)\kappa_2, & \omega=\omega_1\\ 5/13+(54/65)\kappa_2, & \omega=\omega_2\\ 1/13-(36/65)\kappa_2, & \omega=\omega_3\end{cases}$$

63 注意到，只要 $-25/54<\kappa_2<5/36$，这些概率就均是严格正的。由于 $B_1^\kappa=10/9$，我们再运用对数效用，所以市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中无约束问题的最优目标值是 $J_\kappa(v)=\ln v-\ln(9/10)-E\ln Q_\kappa+E\ln P$。因而，对偶问题与在$\widetilde{\mathbb{K}}$上求 $E\ln Q_\kappa$ 的最大值是相同的，也就是，对区间（$-25/54$，$5/36$）上的 κ_2 而言。经过简单的计算，得到最优解$\hat{\kappa}=(0, -0.18321)$。

对应的最优可达财富是

$$W_{\hat{\kappa}}=vB_1^{\hat{\kappa}}/L_{\hat{\kappa}}=\frac{10v}{27Q_{\hat{\kappa}}}=\begin{cases}0.62860v, & \omega=\omega_1\\ 1.59360v, & \omega=\omega_2\\ 2.07611v, & \omega=\omega_3\end{cases}$$

这是由交易策略 $F=(-2.17125, 0)$ 所生成的。由于 $F\in\mathbb{K}$和$\delta(\hat{\kappa})+$

$F\hat{\kappa}'=0$，由此可得，这也是不完全市场中初始无约束问题的解，同时是约束问题的最优解。

虚构证券方法的优点是，它容易适用于对真实证券（Real Securities）带有卖空约束或者类似限制的问题。人们处理问题的方法程序完全相同，只是在选择约束集合$\mathbb{K}$时要得到真实证券的显式约束，同时禁止在虚构证券头寸上进行交易。现在转到同一个例子上来阐述这个问题。

例 2.7（续） 假设我们禁止卖空，这样前面获得的解现在是可行的。运用与前面相同的虚构证券方法，取$\mathbb{K}=\{F\in\mathbb{R}^2: F_1\geqslant 0,\ F_2=0\}$所以

$$\delta(\kappa)=\sup_{F\in\mathbb{K}}(-F\kappa')=\sup_{F_1\geqslant 0}(-F_1\kappa_1)=\begin{cases}0, & \kappa_1\geqslant 0\\ \infty, & \text{其他}\end{cases}$$

以及$\widetilde{\mathbb{K}}=\{\kappa\in\mathbb{R}^2:\kappa_1\geqslant 0\}$。市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中的收益过程是

	ω_1	ω_2	ω_3
$R_1(\omega)$	$1/3+\kappa_1$	$-1/9+\kappa_1$	$-1/3+\kappa_1$
$R_2(\omega)$	$7/18+\kappa_2$	$-4/9+\kappa_2$	$17/18+\kappa_2$

并且，相对应的风险中性概率测度是

$$Q_\kappa(\omega)=\begin{cases}7/13-(45/26)\kappa_1-(18/65)\kappa_2, & \omega=\omega_1\\ 5/13+(9/13)\kappa_1\ +(54/65)\kappa_2, & \omega=\omega_2\\ 1/13+(27/26)\kappa_1-(36/65)\kappa_2, & \omega=\omega_1\end{cases}$$

注意到，在$\mathbb{R}^2$ 的三角形子集上，这些概率均严格为正的，其中 $\kappa_2<-(25/4)\kappa_1+35/18$，$\kappa_2>-(5/6)\kappa_1-25/54$ 以及 $\kappa_2<(15/8)\kappa_1+5/36$。市 64
场 $\mathscr{M}_\kappa$ 中无约束问题的最优目标值与前面有相同的形式，所以对偶问题转变为在此三角形子集和半平面 $\kappa_1\geqslant 0$ 交集上求最大值 $E\ln Q_\kappa$ 的问题。利用一阶条件，容易验证 $\hat{\kappa}=(4/27,\ -5/27)$ 是最优解。与此对应的 Ω 上的两个约束 $Q_{\hat{\kappa}}=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ 且 $W_{\hat{\kappa}}=10v/(27Q_{\hat{\kappa}})=(10v/9)$ $(1,\ 1,\ 1)$。生成 $W_{\hat{\kappa}}$ 的交易策略容易计算出来是 $F=(0,\ 0)$，也就是把所有的资金投资在银行账户上。显然，$F\in\mathbb{K}$及$\delta(\hat{\kappa})+F\hat{\kappa}'=0$，这样 F 也是初

始约束最优投资组合问题的最优交易策略，这正是我们开始所怀疑的内容。此最优目标值是 $\ln v + \ln(10/9)$。

习题 2.12 求解满足 $P(\omega_1)=0.5$，$P(\omega_2)=0.3$ 和 $P(\omega_3)=0.2$ 的例 2.7，假设

(a) 允许卖空；

(b) 禁止卖空。

2.7 均衡模型

直到现在，证券过程 S_1，S_2，…，S_N 的详细说明作为数据资料的一个组成部分，并对模型而言它是外生的。但是，重要的是理解价格，此后金融经济学家发展和研究了价格过程为内部变量的情况，也就是内生变量的模型。

此种类型中重要的一类是均衡模型（Equilibrium Model）。有时，价格既在时间 $t=0$ 又在时间 $t=1$ 时为内部的。而在其他时候，价格在 $t=1$ 时是详细说明的，并且仅仅在时间 $t=0$ 时是内部的，在本节中所要考察的模型就是这样的一类。

单一时期均衡模型的数据资料将由样本空间 Ω、概率测度 P、银行账户过程 B 以及表示时间 $t=1$ 时风险证券价格的 N 个随机变量 $S_1(1)$，$S_2(1)$，…，$S_N(1)$ 所构成。另外，存在着 I 个投资者（或者交易者或者消费者），其数目是 $i=1$，2，…，I。与每一个交易者相对应的是效用函数 u_i（可微的、凹的、严格递增的）和赋资过程（v_i，E_i）。

对模型而言，内部变量是这样三种类型：时间 $t=0$ 时证券价格 $S_1(0)$，$S_2(0)$，…，$S_N(0)$；每一位投资者的消费过程 $C^i=(C_0^i,\ C_1^i)$；以及每一位投资者的交易策略 $H^i=(H_0^i,\ H_1^i,\ \cdots,\ H_N^i)$。均衡解的概念（Equilibrium Solution Concept）包括寻找所有这些变量的值，以使一组固有的许多条件得到满足。特别，

65 变量 $S_n(0)$，$n=1,\cdots,N$ 和 $\{C^i, H^i\}$，$i=1,\cdots,I$ 称为是一个均衡解（Equilibrium Solution），如果对每一个 i 而言，消费投资计划 (C^i, H^i) 是投资者 i 最优的，也就是 (C^i, H^i) 是

$$\text{(2.55)} \qquad \begin{aligned} \max \quad & u_i(C_0^i) + E[u_i(C_1^i)] \\ \text{s.t.} \quad & C_0^i + H_0^i B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n^i S_n(0) = v_i \\ & C_1^i - H_0^i B_1 - \sum_{n=1}^{N} H_n^i S_n(1) = E_i \\ & H^i \in \mathbb{R}^{N+1} \end{aligned}$$

的解，而且证券市场是出清的（Clears），也就是对于每一种证券而言，总需求（Aggregate Demand）是零，即

$$\text{(2.56)} \qquad \sum_{i=1}^{I} H_n^i = 0, \quad \text{对于 } n = 0,1,\cdots,N$$

注意到，(2.55) 不包括任何要求消费为非负的显式约束，如果负消费成为一个问题的话，那么人们会详细规定效用函数，以此使消费成为非负的。虽然增加显式的非负性约束是可行的，但是这样却促使对均衡模型的分析变得更为复杂。总需求为零的要求对一些证券来说没有更多的意义，比如股票和债券，但是对像期货合约这一类它却是完全满足的。若其不然的话，人们设想一些个体作为厂商，通过销售股票和债券筹集资本，并对带来收益的技术进行投资。这些个体卖空股票处于空头，而投资者处于多头地位。通过汇总处理，证券的净头寸等于零，而真实的总财富等于对基本技术上的总投资。

由于交易者具有严格递增的效用函数，如果均衡问题存在着一个解，那么利用 (2.21) 必存在一个风险中性概率测度，比如说 Q。因而，由此可得，时间 $t=0$ 时价格必须满足

$$S_n(0) = E_Q[S_n(1)/B_1]$$

因此，如果我们能推导出均衡消费过程，那么其他的将从此开始：(2.21) 和前面的方程将提供时间 $t=0$ 时的价格，还有投资者 i 的交易策略 H^i 将是生成未定权益 $C_1^i - E_i$ 的那种策略（假定 $C_1^i - E_i$ 对所有 i 是可达的，如果模型是完全的，那么此种情况准会发生）。

可惜的是，计算出均衡消费过程还是困难的。事实上，通常均衡未必存在，所以我们将不试图去计算它。我们需要在均衡解与称为帕累托效 66

率（Pareto Efficiency）的概念之间的关系方面给出满意的研究结果。

然而，首先注意到，如果你在时间 $t=0$ 时对（2.55）中的预算约束通过 i 进行加总，并且重排一些项，得到

$$B_0\sum_{i=1}^{I}H_0^i+\sum_{n=1}^{N}S_n(0)\sum_{i=1}^{I}H_n^i=\sum_{i=1}^{I}v_i-\sum_{i=1}^{I}C_0^i$$

鉴于（2.56），如果这是一个均衡解，那么左边等于零，在此情况下对右边来说结果是相同的。人们从时间 $t=1$ 对（2.55）中的预算约束得到类似的结论，从而

(2.57) 如果消费过程 C^i，$i=1$，…，I 是均衡解的一个组成部分，那么

$$\sum_{i=1}^{I}C_0^i=\sum_{i=1}^{I}v_i \quad 并且 \quad \sum_{i=1}^{I}C_1^i=\sum_{i=1}^{I}E_i$$

满足这两个方程的消费过程集称为是可行的（Feasible）。换句话说，总消费等于总禀赋，其中总禀赋是一种预算约束。

消费过程集 $\{\hat{C}^1, \hat{C}^2, \cdots, \hat{C}^I\}$ 称为是帕累托有效的（Pareto Efficient），如果消费过程集是可行的（如同（2.57））且存在另外一个可行消费集 $\{C^1, C^2, \cdots, C^I\}$ 使得

(2.58) $u_i(C_0^i)+Eu_i(C_1^i)\geqslant u_i(\hat{C}_0^1)+Eu_i(\hat{C}_1^i),\quad i=1,\cdots,I$

其中至少有一个 i 严格地满足不等式。

帕累托效率的条件是说，不存在那样的消费过程可行集，使得所有投资者在可行集 $\{\hat{C}^1, \hat{C}^2, \cdots, \hat{C}^I\}$ 条件下拥有恰好一样的幸福满意程度，其中至少有一个是严格地比较幸福。因此，人们猜测 $\{\hat{C}^1, \hat{C}^2, \cdots, \hat{C}^I\}$ 成为均衡的一个组成部分的必要且充分条件是，这是帕累托有效的。虽然这不是严格地正确，但我们有下面的结论：

(2.59) 如果模型是完全的，并且 $\{\hat{C}^1, \hat{C}^2, \cdots, \hat{C}^I\}$ 是均衡解的一个组成部分，

那么 $\{\hat{C}^1, \hat{C}^2, \cdots, \hat{C}^I\}$ 是帕累托有效的。

为了理解这为什么是正确的，假设 $\{\hat{C}^1, \hat{C}^2, \cdots, \hat{C}^I\}$ 是均衡解的一个组成部分，但是存在如同（2.58）中的消费过程 $(C^1, C^2, \cdots, C^I)$ 集合，其中至少有一个不等式为严格成立。我们将证明这导致一个矛盾。由于模型是完全的，对于每一位投资者 i 存在一个满足

$$H_0^i B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n^i S_n(1) = C_1^i - E_i \tag{2.60}$$

的一个交易策略 H^i。鉴于（2.56），这意味着 67

$$0 = \sum_{i=1}^{I}\left[H_0^i B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n^i S_n(1)\right] = \left(\sum_{i=1}^{I} H_0^i\right) B_1 + \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{I} H_n^i\right) S_n(1)$$

这样，借助于

$$\widetilde{H}_n = \sum_{i=1}^{I} H_n^i, \quad n = 0, 1, \cdots, N$$

定义出一个新的交易策略。我们看到时间 $t=1$ 时对应于 $\widetilde{H}$ 的投资组合价值是零。由于不存在套利机会（回想起必存在一个风险中性概率测度），所以利用一价定律，这个投资组合在时间 $t=0$ 时的价值必是零，也就是

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{H}_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} \widetilde{H}_n S_n(0) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{I} H_0^i\right) B_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{I} H_n^i\right) S_n(0) \end{aligned} \tag{2.61}$$

这个方程过一会将用到。同时，定义一个纯量

$$\psi_i \equiv C_0^i - v_i + H_0^i B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n^i S_n(0), \quad i = 1, \cdots, I \tag{2.62}$$

考虑到 $C_0^i-\psi_i$ 作为时间 $t=0$ 时投资者 i 的消费。由（2.60）和（2.62）知，消费过程 $\{C_0^i-\psi_i,\ C_1^i\}$ 是可达的。如果$\psi_i<0$，那么投资者 i 与消费过程 $\{C_{0i}^i,\ C_1^i\}$ 对比而言，严格地偏好消费过程 $\{C_0^i-\psi_i,\ C_1^i\}$。另外，$\{C_0^i-\psi_i,\ C_1^i\}$ 满足投资者 i 的最优化问题（2.55）的预算约束，而由不等式（2.58）知 $\{C_{0i}^i,\ C_1^i\}$ 偏好于 $\{\hat{C}_{0i}^i,\ \hat{C}_1^i\}$。因而，$\psi_1<0$ 蕴含着 $\{C_{0i}^i,\ C_1^i\}$ 严格地偏好于 $\{\hat{C}_{0i}^i,\ \hat{C}_1^i\}$，由此导出后者是（2.55）的最优解矛盾的事实。从而必是$\psi_i\geqslant 0$，对于所有 $i=1,\ \cdots,\ I$。

运用几乎相同的逻辑，如果对投资者 i 而言（2.58）是严格的，那么 $\psi_i=0$ 导致矛盾，所以这一同样的ψ_i 必是严格正的。由于在（2.58）中至少有一个不等式被假设为严格地成立，如果我们通过 i 来对方程（2.62）加总，那么就看出作为结果的方程两边必是严格正的。利用（2.61），我们看到右边简直就是

$$\sum_{i=1}^{I} C_0^i - \sum_{i=1}^{I} v_i > 0$$

但是这与假设 $\{C^1,\ C^2,\ \cdots,\ C^I\}$ 满足可行性要求（2.57）相矛盾；我们得出结论，集合 $\{\hat{C}^1,\ \hat{C}^2,\ \cdots,\ \hat{C}^I\}$ 必是帕累托有效的。

概括地讲，如果市场是完全的，那么消费过程集合要想成为均衡解的一个组成部分的必要条件是，此消费过程集合为帕累托有效的。因而，为了计算出一个均衡解，一种合理的方法首先是识别出所有帕累托有效的
68 消费过程集合，然后在这些集合中寻找成为均衡解的一个组成部分的那一个。可惜的是，通常这一方法说着容易，做起来难，所以这样的思想不会有任何更进一步的结果。相反，我们将研究一种均衡问题的变形，它比较容易地计算出均衡解。

假设我们通过对每一位投资者 $i=1,\ \cdots,\ I$ 规定 $C_0^i=0$ 和 $E_i=0$，以及忽略时间 $t=0$ 时的消费效用来简化基本的均衡问题，以使（2.55）对每一位投资者均是一个简单的标准投资组合问题。此外，对均衡解而言，条件（2.56）由

(2.63) $$\sum_{i=1}^{I} H_n^i = s_n, \quad 对于\ n = 1,\cdots,N$$

代替，其中 $s_n>0$ 表示在市场上提供的证券 n 的总供给或单位数目或股份。现在，均衡问题能够被看成是那样的一种市场，即所有投资者分享有关时间 $t=1$ 每一种状态价格的共同信念的一种市场，进而提出的问题是“时间 $t=0$ 时恰当的价格是多少?”或者可能 N 个公司接受其初始公开上市的证券，它们能估价证券在时间 $t=1$ 时每一个状态的价格，同时想要正确定出上市证券在时间 $t=0$ 时的价格。不论怎样，均衡解现在将由时间 $t=0$ 时的价格和每一位投资者的交易策略所构成，以使最优投资组合问题（2.55）对每一位投资者都满足，同时市场出清条件（2.63）亦满足。

为了求解此类问题，一种好的方法是首先计算出 $H^i(S_0)=\{H_1^i(S_0),\cdots,H_N^i(S_0)\}$，投资组合问题的最优解作为时间 $t=0$ 时价格 $S_0=\{S_1(0),\cdots,S_N(0)\}$ 的指定函数。这样，$S_0\rightarrow H_n^i(S_0)$ 应该被认为是投资者 i 对证券 n 的需求“曲线”或者需求函数（Demand Function）。当对于所有的 i 和 n 知道这些需求函数时，剩下的就是把它们代入到（2.63）中以及求解出时间 $t=0$ 时的价格向量 S_0，以使市场出清条件（2.63）得以满足。

我们立刻知道一些有关的需求函数：它们在点 S_0 处是有限的，当且仅当在点 S_0 处存在一个风险中性概率测度。这是因为如果不存在风险中性概率测度，那么就存在着某种套利机会，在此情况下，投资者愿意采取购买或出售相当数量的一种或者多种证券，进而形成多头或者空头的局面。由此可得，需求函数的定义范围均是有限的，将其记为$\mathbb{S}$，它是 n 维区间的子集

$$\mathop{\times}_{n=1}^{N}[\min\{S_n^*(1)(\omega):\omega\in\Omega\},\quad \max\{S_n^*(1)(\omega):\omega\in\Omega\}]$$

如果 $N=1$，那么这一区间与$\mathbb{S}$相一致。对于 $N\geqslant 2$，$\mathbb{S}$或者能与 n 维区间相一致，或者成为其内部的真子集。对这种区间的考虑有助于组织需求函数的计算。 69

如果在实直线上取所有非负值的效用函数均满足适当光滑性的要求 $u'(\cdot)$，那么需求函数 $S_0\rightarrow H_n^i(S_0)$ 在$\mathbb{S}$上是连续的。这是因为一阶必要条件（2.4）对每一位投资者 i 而言都是满足的，也就是

$$(2.64)\qquad 0 = E[B_1 u'(v_i + H_1^i\{S_1^*(1) - S_1(0)\} + \cdots + H_n^i\{S_n^*(1) - S_n(0)\})\{S_n^*(1) - S_n(0)\}],\quad n = 1,\cdots,N$$

（回想起$S_n(0) = S_n^*(0)$）。这些方程对于$\mathbb{S}$中的每一个 S_0 借助于某个 H^i 才得以成立，同时运用所谓隐函数定理知，在适当的假设下解$H^i(S_0)$对于 S_0 而言将以连续形式变化。[②]另外，当 S_0 接近$\mathbb{S}$的边界时，需求函数的一个或者多个分量的绝对值将变得任意大。例如，在 $N=1$ 的情况下，当 S_0 接近区间$\mathbb{S}$中的下端点时（分别地，上端点），函数$H_1^i(S_0)$ 变得任意大（小）。

如上所述，为计算均衡解所推荐的方法首先是计算出需求函数，然后把其代入到市场出清条件（2.63）中来解出 S_0。但是，应该提醒的是，这一方法通常需要某些令人讨厌的计算；实际上，此方法也不能保证一定成功。现在考察一个例子作为一种启发性的阐述。

例 2.8　假设 $N=2$，$K=3$，$P=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$，$r=$常数，以及存在 I 位完全相同的投资者，满足$u_i(w)=\ln(w)$及 $v_i=v$。时间 $t=1$ 时的折现价格是：

n	$S_n^*(1)$		
	ω_1	ω_2	ω_3
1	6	8	4
2	13	9	8

回想起在第一章研究过的矩阵 A，显然存在一个风险性概率测度，那么这个市场必是完全的。为计算出作为时间 $t=0$ 时仍然未知的价格函数的风险中性概率测度，人们求解通常的方程组，并且得到

$$Q(\omega) = \begin{cases} \dfrac{-28 - S_1(0) + 4S_2(0)}{18}, & \omega = \omega_1 \\[2ex] \dfrac{-4 + 5S_1(0) - 2S_2(0)}{18}, & \omega = \omega_2 \\[2ex] \dfrac{50 - 4S_1(0) - 2S_2(0)}{18}, & \omega = \omega_3 \end{cases}$$

这三个分式的范围均与需求函数为有限的范围$\mathbb{S}$严格地正相关；通过某种 70
简单的代数运算揭示出这样的范围是三个顶点分别在（4，8）、（6，13）和（8，9）的三角形的内部。由于对数效用最优可达财富是$W = vP(1+r)/Q$（参见习题 2.2），所以人们求解方程$H_0(1+r)+H_1S_1(\omega)+H_2S_2(\omega)=W(\omega)$，得到需求函数

$$\begin{aligned}
H_1^i(S_0) &= \frac{-(1/3)v}{-28-S_1(0)+4S_2(0)}-\frac{(4/3)v}{50-4S_1(0)-2S_2(0)} \\
&\quad +\frac{(5/3)v}{-4+5S_1(0)-2S_2(0)} \\
H_2^i(S_0) &= \frac{(4/3)v}{-28-S_1(0)+4S_2(0)}-\frac{(2/3)v}{50-4S_1(0)-2S_2(0)} \\
&\quad -\frac{(2/3)v}{-4+5S_1(0)-2S_2(0)}
\end{aligned}$$

因此，当知道s_1，s_2，I 和r 的值，人们能够把这两个函数代入到两个市场出清方程（2.63），从而求解出时间$t=0$时的两个未知价格。例如，如果有$I=2$位投资者，每个人拥有$v=6000$美元来投资，并且分别存在对证券 1 和 2 的可行投资$s_1=4000$和$s_2=2000$，那么由方程组（2.63）知$S_1(0)=5$和$S_2(0)=9$。把这些值代回到需求函数，得出$H_1^i=2000$和$H_2^i=1000$，这些数值正是预料之中的，因为具有I位完全相同的投资者的均衡交易策略必须满足$H_n^i=s_n/I$。注意到$H_0=v-H_1S_1(0)-H_2S_2(0)=-13\,000$，所以每位投资者为交易进行融资将借入 13 000 美元。

习题 2.13　假设$N=1$，$K=2$，$r=$常数，$S_1(\omega_1)=6$，$S_1(\omega_2)=4$及$P(\omega_1)=2/3$。存在I位完全相同的投资者，每位投资者具有初始资本v和对数效用函数。

(a)　证明风险中性概率测度必是，满足$\mathbb{S}=(4/(1+r),6/(1+r))$的具有$Q(\omega_1)=[S_0(1+r)-4]/2$形式。

(b)　证明需求函数为

$$H(S_0)=\frac{v(1+r)\{3S_0(1+r)-16\}}{3\{4-S_0(1+r)\}\{6-S_0(1+r)\}}$$

且在$\mathbb{S}$上为严格递减的。

(c) 依据一般的参数 I，v，s_1 和 r，推导出均衡价格 S_0 的公式。当 $I=3$，$v=s_1=1000$ 及 $r=0$ 时，均衡价格是多少？

71

注释

① 仿射（Affine）函数等于一个常数加上一个线性函数。

② 对此处的情况而言，假设（2.64）对每一个 H_n^i 和每一个$S_n(0)$ 来说，其右边 N 个偏导数是连续函数。另外假设（2.64）对每一个 H_n^i，$n=1$，…，N 来说，其右边偏导数的 $N\times N$ 矩阵行列式［这称为雅可比的（Jacobian）］在（2.64）得以满足的某一点 $\hat{S}_0$ 的值是非零的。于是隐函数定理表述为：存在一些连续函数$H_1^i(S_0)$，…，$H_N^i(S_0)$ 使得当将其代入到（2.64）中时，此方程对$\hat{S}_0$ 的某个邻域中的所有 S_0 均成立。

3 多时期证券市场

3.1 模型说明、域流与随机过程

证券市场的多时期模型比单时期模型更加现实。实际上，多时期模型在金融行业中大量地应用于实践性目的的活动中。

下面对多时期模型的一些基本要素作出详细说明：

- $T+1$ 个交易日期：$t=0$，1，…，T。
- 具有 $K<\infty$ 个元素的有限样本空间 Ω：

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_K\}$$

- Ω 上的概率测度 P，满足$P(\omega)>0$,对于所有的 $\omega\in\Omega$。
- 域流（Filtration）$\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t:t=0,1,\cdots,T\}$,它是描述有关证券价格信息是如何被投资者所揭示的子模型。
- 银行账户（Bank Aclount）过程$B=\{B_t:t=0,1,\cdots,T\}$，其中 B 是随机过程，满足 $B_0=1$ 和 $B_t(\omega)>0$ 对于所有的 t 和 ω。这里的 B_t 应该被看成是当 1 美元在 $t=0$ 时存入账户时，储蓄账户在 t 时间的价值。通常 B 是非递减的过程，同时（可以作为随机的）量 $r_t\equiv(B_t-B_{t-1})/B_{t-1}\geqslant0$，$t=1$，…，$T$，应该被看成是时间区间（$t-1$，$t$）内的利率（Interest Rate）。

73 • N 个风险证券（Risky Security）过程 $S_n = \{S_n(t): t = 0, 1, \cdots, T\}$，其中 S_n 是非负的随机过程对于每一个 $n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$。这里的 $S_n(t)$ 应该被看成是风险证券 n 在时间 t 时的价格，比如某一特定公司一股普通股票的价格。

注意到，多时期证券市场具有两个新特点，它们是单时期模型所不具备的：信息子模型和价格的随机过程子模型。现在就来描述它们。

3.1.1 信息结构

拥有一种关于证券价格是如何被投资者所揭示的清晰思路是重要的。这样做，人们要依照样本空间 Ω 的子集来展开。

考察在时间 $t = 0$ 时每一种状态 $\omega \in \Omega$ 是可行的。某些状态可能会更相似于其他的一些状态，但是没有一个可以被排除掉。同时，在时间 $t = T$（经常这样假定它）投资者知道现实世界的真实状态 ω（从而知道每一个随机变量的真实值）。这是因为随着时间演化，投资者通过观察信息来推断出真实状态，其理由是在每一种可行的信息结果和每一种状态之间将存在着一种一一对应关系的假设。

时期中间的信息会是怎样的呢，也就是当 $0 < t < T$ 时，其信息如何呢？我们怎样对信息演化的方式建模呢？当然，投资者在一个时期中所观察到的新信息，能促使其将某一类不可能发生的状态剔除。因此，人们能把信息演化看成是 Ω 中子集 $\{A_t\}$ 的随机序列，其中 $A_0 = \Omega$，$A_T = \{\omega\}$ 对于某一个 $\omega \in \Omega$，而且 $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_{T-1} \supseteq A_T$。投资者在时间 t 时知道某一个子集 A_t 的真实状态就是指 $\omega \in A_t$，但投资者不能确定它究竟是哪一个。虽然某些状态 $\omega \in A_t$ 可能会更像其他的一些状态，但是没有一个可以被排除掉。另一方面，投资者在时间 t 时将每一个状态 $\omega \in A_t^c$（即 A_t 的补集）给予除掉。投资者知道现实世界的真实状态不在 A_t 的外部。可以推想而知，一个时期以后描述投资者的相关信息必是 A_t 的子集。这样，被投资者所揭示的子集序列必满足 $A_{t+1} \subseteq A_t$ 对于所有 t。

注意到，存在着子集的 K 可行信息序列 $\{A_t\}$。在时间 $t = 0$ 时投资者意识到所有这些信息序列，但是他们不知道其中的哪一个会被揭示出。任意选取一个这样的序列 $\{\hat{A}_t\}$，以及某一个时间 $s < T$，然后通过时间 s 考察与 $\{\hat{A}_t\}$ 相一致的所有序列 $\{A_t\}$。特别地，考虑时间 $s+1$ 时在此

种集合中来自于这些序列的子集 A_{s+1}。如果 $\omega\in\hat{A}_s$，那么必至少存在着一个包含 ω 的子集 A_{s+1}（如果通过时间 s 与 $\{\hat{A}_t\}$ 相一致的这种序列没有一个在状态 ω 结束，那么 ω 不应该一开始就在 $\hat{A}_s$ 里存在）。因而，所有这些可能跟随 $\hat{A}_s$ 的子集 A_{s+1} 并集必等于 $\hat{A}_s$。此外，这种子集 $\{A_{s+1}\}$ 集合必是相互排斥的（如果说 ω 是包括在两个不同的子集中，那么会存 74
在两个或者更多个序列 $\{A_t\}$ 对应于状态 ω，这就产生矛盾）。因此，可能跟随 $\hat{A}_s$ 的子集 $\{A_{s+1}\}$ 集合形成 $\hat{A}_s$ 的一个分割（Partition），也就是不相交的子集集合，其并集等于 $\hat{A}_s$。

特别，取 $s=0$ 我们看到时间 $t=1$ 时所有可行的子集 $\{A_1\}$ 集合形成 Ω 的一个分割。此分割表示成 $\mathscr{P}_1$。此外，时间 $t=2$ 时所有可行的子集 $\{A_2\}$ 集合也形成 Ω 的一个分割，表示成 $\mathscr{P}_2$；它具有那种性质：每一个 $A\in\mathscr{P}_1$ 等于 $\mathscr{P}_2$ 中的一个或者多个元素的并。因此，由此可见，信息结构完全由 Ω 的分割 $\mathscr{P}_0$，$\mathscr{P}_1$，…，$\mathscr{P}_T$ 序列所描述，满足 $\mathscr{P}_0=\{\Omega\},\mathscr{P}_T=\{\{\omega_1\},\cdots,\{\omega_K\}\}$，同时还满足性质：每一个 $A\in\mathscr{P}_t$ 等于 $\mathscr{P}_{t+1}$ 中某一些元素的并对于时间 $t<T$。这样分割序列 $\{\mathscr{P}_t\}$ 惟一地由可行信息序列 $\{A_t\}$ 的集合所构成。相反，给定如上分割的一种序列 $\{\mathscr{P}_t\}$，则存在惟一的相对应的可行信息序列 $\{A_t\}$ 的集合。

存在着几种好的方法促使信息结构形式化。当然，分割的序列能够被描述成样本空间图像的一个序列，其中每一个点的一个图像依时间表示相对应的分割。如其不然，分割序列能够被描述成称为树（Tree）的网络图，其中每一个结点（Node）对应于时间 t 时分割的一个元素 A_t，而且存在从这一结点到对应于某个 $A_{t+1}\subseteq A_t$ 的每一个结点的一个弧。这样，从时间 $t=0$ 结点（也就是 $A_0=\Omega$）到时间 $t=T$ 的每一个结点（也就是 $A_T=\omega$ 对于每一种状态 ω）将有一个路径（Path），并且每一种这样的路径将表示一种可行的信息序列 $\{A_t\}$。

例 3.1 满足 $K=8$ 和 $T=3$，假设时间 $t=1$ 时分割是

$$\mathscr{P}_1=\{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}\}$$

然后对于时间 $t=2$ 时的分割，我们能取

$$\mathscr{P}_2=\{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6\},\{\omega_7,\omega_8\}\}$$

或者

$$\mathscr{P}_2=\{\{\omega_1\},\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}\}$$

但是，比如我们不能取

$$\mathscr{P}_2=\{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6\},\{\omega_7,\omega_8\}\}$$

这是因为其中的两个子集不是不相交的，比如我们也不能取

$$\mathscr{P}_2=\{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4,\omega_5\},\{\omega_6,\omega_7,\omega_8\}\}$$

75 因为这些子集中的任何一种并集没有等于 $\{\omega_5,\ \omega_6,\ \omega_7,\ \omega_8\}$ 的。对于时间 $t=2$ 的分割来说，采用第一种建议，此例子能借助于图 3.1 中所示的图像序列方便地描述出来，或借助于图 3.2 中树形图来描述。

概括地讲，信息结构子模型能够组织成为分割的序列，因为每一种连续不断的分割是比较精制的（Finer）。它或者能够组织成为一个树。还有另外一种方式来规定这一子模型。

Ω 的子集集合 $\mathscr{F}$ 称为 Ω 上的一个代数（Algebra），如果

(a)　$\Omega\in\mathscr{F}$

(b)　$F\in\mathscr{F}\Rightarrow F^c=\Omega\setminus F\in\mathscr{F}$

(c)　F 和 $G\in\mathscr{F}\Rightarrow F\cup G\in\mathscr{F}$。

注意到空集 $\emptyset=\Omega^c$，所以如果 $\mathscr{F}$ 是一个代数，那么 $\mathscr{F}$ 必包含空集 $\emptyset$。同时注意到 $F\cap G=(F^c\cup G^c)^c$，这样如果 $\mathscr{F}$ 是一个包含 F 和 G 的代数，那么 $\mathscr{F}$ 必是包含 F 和 G 的交集 $F\cap G$。因此，Ω 上的代数是 Ω 的一个子集簇，其在有限次集合运算下是稳定的。

给定 Ω 上的一个代数，记为 $\mathscr{F}_t$，你总能够找出子集 F_n 的惟一集合 $\{F_n\}$，使得

(a)　每一个 $F_n\in\mathscr{F}_t$，

(b)　子集 $\{F_n\}$ 是不相交的，并且

(c)　子集 $\{F_n\}$ 的并集等于 Ω。

换句话说，与代数 $\mathscr{F}_t$ 相对应的是 Ω 的一个分割，它是惟一的。

相反，给定一个分割后你就能够实行一系列基本的集合运算（取补

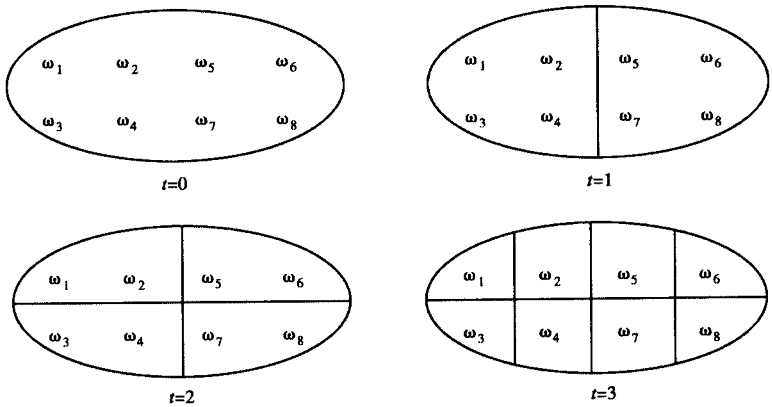


图 3.1　例 3.1 中对应于信息子模型的分割 76

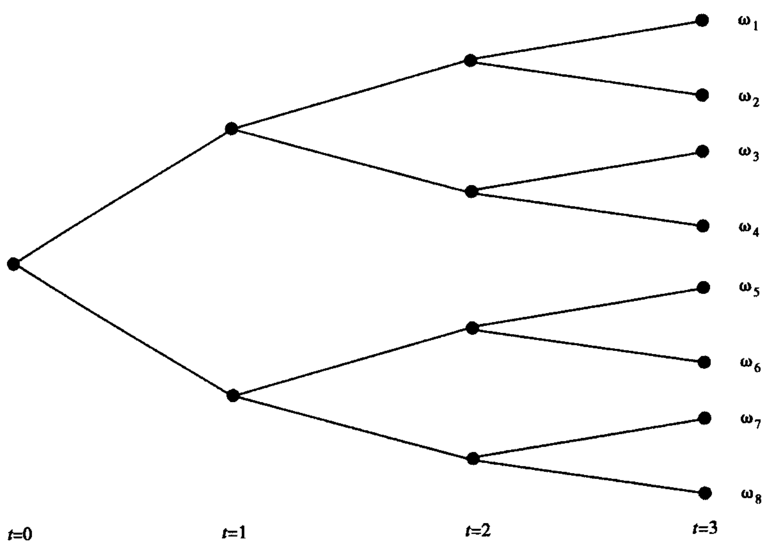


图 3.2　例 3.1 中信息树子模型

集、交集、并集等等)，尽可能多地生成一些新的子集。因而，你以一个代数来结束上述运算过程，而此代数是惟一的。

因此，在 Ω 的分割和 Ω 上的代数之间存在一种一一对应的关系，这样信息结构的子模型能够组织成为代数的一个序列 $\{\mathscr{F}_t\}$。我们记$\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t:t=0,1,\cdots,T\}$，并称$\mathbb{F}$为域流（Filtration）。注意到，$\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$以

及 $\mathscr{F}_T$ 是由 Ω 的所有子集构成的。由于在时间 t 时每一个子集的分割等于时间（$t+1$）时分割的一些子集的并集，所以我们必有$\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_{t+1}$，也就是 $\mathscr{F}_t$ 的每一个子集必是 $\mathscr{F}_{t+1}$中的元素。因而，能够说我们的域流是代数的一种嵌入序列。

例 3.1（续） 对应于时间 $t=1$ 的分割是代数

$$\mathscr{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$$

对应于时间 $t=2$ 我们可采用的分割是代数

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_2 = \{&\varnothing, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}, \{\omega_7, \omega_8\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},\\ &\{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_7, \omega_8\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},\\ &\{\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8\},\\ &\{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}\end{aligned}$$

77

3.1.2 证券价格的随机过程模型

一个随机过程（Stochastic Process）S_n 既是 t 又是 ω 的实值函数 $S_n(t,\omega)$。由此，其定义域是 $\{0, 1, \cdots, T\} \times \Omega$。对于每一个固定的 $\omega \in \Omega$，函数$\omega \to S_n(t,\omega)$称为样本路径（Sample Path）。对于每一个固定的 t，函数 $\omega \to S_n(t, \omega)$ 是一个随机变量。

为了建模的目的，我们要求证券价格的随机过程模型与信息结构相一致。特别地，我们要求对投资者来说在任何时间点上可获得的信息包括过去的证券价格和现在（指价格）的信息。这点由引入随机变量的可测性概念来完成。

随机变量 X 对代数$\mathscr{F}$而言称为是可测的（Measurable），如果函数$\omega \to X(\omega)$对应于$\mathscr{F}$分割上的在任何一个子集上均为常数。等价地，对于每一个实数 x，子集$\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\}$是代数$\mathscr{F}$中的一个元素。

例 3.2 如同在例 3.1 中那样，满足$\mathscr{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4,\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$，假设

$$X(\omega)=\begin{cases}6, & \omega=\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\\ 8, & \omega=\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\end{cases}$$

以及

$$Y(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7\\ 0, & \omega=\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8\end{cases}$$

那么 X 对 $\mathscr{F}$ 而言是可测的，而 Y 则不是可测的。

随机过程 $S_n=\{S_n(t):t=0,1,\cdots,T\}$ 对域流 $\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t:t=0,1,\cdots,T\}$ 而言称为是适应的（Adapted），如果随机变量 $S_n(t)$ 对 $\mathscr{F}_t$ 而言是可测的，对于每一个 $t=0$，1，…，T。总之，假设第 n 个风险证券的价格是一个适应的随机过程 S_n，对于 $n=1$，…，N，并且对于银行账户过程 B 也同样适用。

随机过程要成为适应的，怎样要求它才能确保每一位投资者拥有过去价格和现在价格的完全信息呢？投资者在时间 t 时知道真实状态 ω 包含于时间 t 分割 $\mathscr{F}_t$ 中的一个特殊子集里，每一种证券在时间 t 时的价格 $S_n(t)$ 必是在此子集上为常数，所以投资者能够计算出证券价格在时间 t 时实际上应为多少价值。另外，由于分割形成一种嵌入式的序列，所以投资者能推断出在比较靠前面的分割中（前面上一阶段分割中）所观察到的子集，由此推断早一些时间里的真实证券价格。

概括地讲，我们的证券市场模型将由对域流而言是适应的证券过程所构成，这样投资者将拥有过去价格和现在价格的完全信息。当信息和证券子模型能同时详细说明时，实际上，域流常常在首先规定证券的随机过程子模型之后才被具体说明。但是以对随机过程的明确说明作为开始，通常 78
可行的方式是，要规定说明两个或多个域流以使证券价格成为适应的。这些域流中的一些可能是不令人满意的，然而因为它们可能与允许投资者研究未来相一致。例如，如果在时间 $t+1$ 时价格是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，那么投资者在时间 t 时知道价格在 $t+1$ 时将饲多少。不过，总是存在一种对应于随时间变化而知道价格的域流，除此之外没有什么其他的信息。这种域流的推导在下面的例子中加以阐述。

例 3.3　考察投资者能够观察证券，并且知道证券如下演变：

ω_k	t=0	t=1	t=2
ω_1	$S_0=5$	$S_1=8$	$S_2=9$
ω_2	$S_0=5$	$S_1=8$	$S_2=6$
ω_3	$S_0=5$	$S_1=4$	$S_2=6$
ω_4	$S_0=5$	$S_1=4$	$S_2=3$

这里 N=1，同时我们运用当 N=1 时下标能够表示时间指标，而不是风险证券的习惯写法。此外，当 T=2 和 K=4，随机过程 S 对每一个（t，ω）均详细地说明。

现在，时间 t=0 时投资者观察到的所有内容就是 $S_0=5$；换句话说，投资者没有真实状态的线索，所以$\mathscr{F}_0=\{\varnothing, \Omega\}$。但是，在时间 $t=1$ 时投资者观察到的或者是 $S_1=8$ 或者是 $S_1=4$。在前者情况中投资者推测真实状态必是 ω_1 或 ω_2；在后者情况中，真实状态必是 ω_3 或 ω_4。因此，相关的分割是$\{\omega_1,\omega_2\}\cup\{\omega_3,\omega_4\}$，同时对应的代数是

$$\mathscr{F}_1=\{\varnothing,\Omega,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\}\}$$

在时间 $t=2$ 时，投资者观察到 S_2，进而推导出真实状态 ω（投资者凭借对 S_1 的记忆区分开 ω_3 和 ω_2）。因此，相关的分割是 $\omega_1\cup\omega_2\cup\omega_3\cup\omega_4$，同时 $\mathscr{F}_2$ 是 Ω 的所有子集的集合。作为结果的信息结构能够描述为像图 3.3 中树形图那样。实际上，注意到随机过程 S 对域流而言是适应的。

以例 3.3 中所述的方式来构造的域流称为是由随机过程所生成的(Generated)。这样产生的域流可能是最粗糙的，也就是各种各样代数有一个尽可能是最小的子集，以使讨论中的随机过程是适应的。

但是，存在另一种用来构造证券市场模型的方法。你或许能够以基于一系列信息报告的域流子模型开始。然后，你添加证券价格的随机过程模
79 型，为保证适当的投资者具有过去价格和现在价格的信息必须使此过程是适应的。这将在下面的例子中加以阐述。

例 3.4 满足 $K=4$，$N=1$ 和 $T=2$，假设在时间 $t=1$ 时市场营销调查即将发表，人们或者喜爱它（对应于子集$\{\omega_1,\omega_3\}$），人们或者不喜爱它（对应于 $\{\omega_2,\omega_4\}$）。此外，在两者情况下风险证券可能各自取两个不同的值。因此，在时间 $t=1$ 时相对应的分割是 $\omega_1\cup\omega_2\cup\omega_3\cup\omega_4$，同时对应的代数 $\mathscr{F}_1$ 是 Ω 的所有子集的集合。注意到，在例 3.3 中所定义的风险

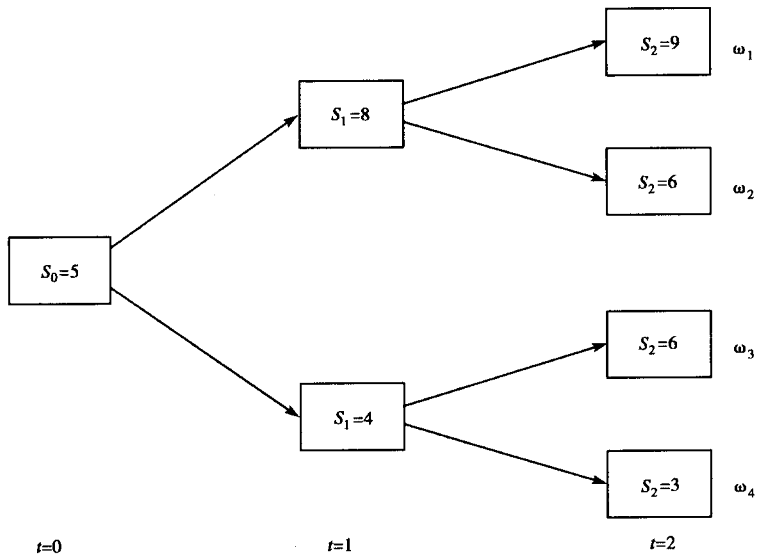


图 3.3　例 2.3 中信息结构与风险证券

过程对这个域流来说是适应的，进而与信息子模型相一致。但是，由于投资者能够在时间 $t=1$ 时通过观察市场营销报告区分出 ω_1 和 ω_2 以及 ω_3 和 ω_4，投资者他们这样做比仅仅观察价格过程知道更多的信息。实际上，投资者现在能够研究未来的情况，因为他们在时间 $t=1$ 时知道价格在时间 $t=2$ 将是多少。尽管例 3.3 和例 3.4 中的域流是不同的，但是它们的价格过程却是相同的。这种模型的灵活性正是我们为什么特意拥有信息结构的域流子模型的一个原因。

3.1.3　交易策略 80

交易策略（Trade Strategy）$H=(H_0,H_1,\cdots,H_N)$是一种随机过程 $H_n=\{H_n(t);t=1,2,\cdots,T\}$的向量，$n=0$，1，…，$N$。注意到，$H_n(0)$是不用具体指明的；这是因为对于 $n\geqslant1$，$H_n(t)$应该被解释成为投资者从时间 $t-1$ 到时间 t 所拥有的（也就是持有）的单位数目（比如股票的股数），然而$H_0(t)B_{t-1}$等于时间 $t-1$ 投资者银行账户的数目。还注意到，$H_n(t)$能够为负值，这点对应于从银行借入资金（在此情况下 $n=0$）或者卖空证券 n（在此情况下 $n\geqslant1$）。

把投资者的交易策略作为一种随机过程，看起来有点奇怪，但是一旦回想起随机过程仅仅是时间和状态的一种实值函数，这点意义是清楚的。交易策略应该是一种规则（比如函数），它详细说明投资者在时间上的每一时点上和世界的每一状态上对每一种证券的头寸。另外，这种规则应允许投资者在所有可获得信息的基础上选择证券的头寸，但是例如它不允许投资者“研究未来”。因此，交易策略必是仅仅以这种正常的方式与信息结构的域流模型联系起来，以至于投资者基于可获得信息形成交易策略，除此没有更多的其他什么信息。这样做，要利用引进的可料性概念。

一个随机过程 H_n 称为对域流$\mathbb{F}$而言是可料的（Predictable），如果每一个随机过程$H_n(t)$对于$\mathscr{F}_{t-1}$而言是可测的，对于所有 $t=1$，2，…，T。由于$\mathscr{F}_{t-1}\subseteq\mathscr{F}_t$，所以这意味着所有可料的随机过程均是适应的。

简言之，假设一种交易策略 H 的每一个分量都是可料的随机过程。因为投资者在时间 $t-1$ 时所建立的交易头寸在时间 $t-1$ 分割 $\mathscr{P}_{t-1}$所观察到的子集上均为常数，所以投资者能够在那时考虑所有可获得的信息，除以之外没有更多的其他什么信息。

例 3.1（续） 由于 $H_n(1)\in\mathscr{F}_0$，持有证券 n 的头寸从时间 $t=0$ 到时间 $t=1$ 必是相同的，对于所有 $\omega\in\Omega$。在时间 $t=1$ 交易者在可获得信息的基础上能够调整这一头寸，也就是基于观察真实状态是否为$\omega\in\{\omega_1，\omega_2，\omega_3，\omega_4\}$。因此，投资者能够对$H_n(2，\omega)$ 选择一个值，如果$\omega\in\{\omega_1，\omega_2，\omega_3，\omega_4\}$；同时对$H_n(2，\omega)$ 选择第二个值，如果 $\omega\notin\{\omega_1，\omega_2，\omega_3，\omega_4\}$。换句话说，在时间 $t=1$ 投资者新的头寸能够以任何一种规则$H_n(2)$采取一种新的头寸，满足$H_n(2)\in\mathscr{F}_1$。最后，以类似的方式，在时间 $t=2$ 投资者知道对应于 $\mathscr{F}_2$ 的信息；投资者能依据任何一种规则$H_n(3)$采取一个新的头寸，满足 $H_n(3)\in\mathscr{F}_2$；这种规则将具有 $H_n(3,\omega_1)=H_n(3,\omega_2),\cdots$,以及 $H_n(3,\omega_7)=H_n(3,\omega_8)$的性质。

81

3.1.4 价值过程和增益过程

价值过程（Value Process）$V=\{V_t:t=0，1，…，T\}$ 是一个通过

$$V_t=\begin{cases}H_0(1)B_0+\sum_{n=1}^{N}H_n(1)S_n(0), & t=0\\ H_0(t)B_t+\sum_{n=1}^{N}H_n(t)S_n(t), & t\geqslant 1\end{cases}$$

定义出的随机过程。这里 V_0 是投资组合的初始价值，V_t 是投资组合在时间t时任何交易达成之前的投资组合价值，对于 $t \geqslant 1$。注意到，V 是一个适应的随机过程（如果你知道 $\mathscr{P}_t$ 中的子集，那么就知道$H(t), B_t$ 和 $S_n(t)$，在这种情况下，你可以知道 V_t）。

记

$$\Delta S_n(t) \equiv S_n(t) - S_n(t-1)$$

表示随机过程 S_n 的价值在时间$t-1$和 t 之间的变化。于是，$H_n(t)\Delta S_n(t)$表示一个时期中的增益或损失，这是因为在时间 $t-1$ 和 t 之间拥有 $H_n(t)$个数量单位证券 n 的缘故。类似地，

$$\sum_{u=1}^{t} H_n(u)\Delta S_n(u)$$

表示经过时间 t 累加的增益或损失，这是因为对证券 n 进行投资的缘故。这种和是所谓（离散时间）随机积分（Stochastic Integral）的一个事例，它是作为一个随机过程（H_n）值的加权之和，其中权数是由另外一种随机过程的一个时期的变化给出的。最后，

$$G_t \equiv \sum_{u=1}^{t} H_0(u)\Delta B_u + \sum_{n=1}^{N}\sum_{u=1}^{t} H_n(u)\Delta S_n(u), \quad t \geqslant 1$$

定义出增益过程（Gains Process），并且它表示投资组合经过时间 t 累加增益或累加损失。这样，G 是交易策略对价格过程的随机积分。注意到，$G = \{G_t : t = 1, \cdots, T\}$是一个适应的随机过程。

例 3.3（续） 假设$B_t = (1+r)^t$，其中 $r \geqslant 0$ 是常数。于是，对于价值过程我们有 $V_0 = H_0(1) + 5H_1(1)$，

$$V_1 = \begin{cases} (1+r)H_0(1) + 8H_1(1), & \omega = \omega_1, \omega_2 \\ (1+r)H_0(1) + 4H_1(1), & \omega = \omega_3, \omega_4 \end{cases}$$

和

$$V_2=\begin{cases}(1+r)^2H_0(2)+9H_1(2), & \omega=\omega_1\\(1+r)^2H_0(2)+6H_1(2), & \omega=\omega_2,\omega_3\\(1+r)^2H_0(2)+3H_1(2), & \omega=\omega_4\end{cases}$$

82 这个增益过程是由

$$G_1=\begin{cases}rH_0(1)+3H_1(1), & \omega=\omega_1,\omega_2\\rH_0(1)-H_1(1), & \omega=\omega_3,\omega_4\end{cases}$$

和

$$G_2=\begin{cases}rH_0(1)+3H_1(1)+r(1+r)H_0(2)+H_1(2), & \omega=\omega_1\\rH_0(1)+3H_1(1)+r(1+r)H_0(2)-2H_1(2), & \omega=\omega_2\\rH_0(1)-H_1(1)+r(1+r)H_0(2)+2H_1(2), & \omega=\omega_3\\rH_0(1)-H_1(1)+r(1+r)H_0(2)-H_1(2), & \omega=\omega_4\end{cases}$$

给出的。

3.1.5 自融资交易策略

像上面早些时候提到的那样，对于 $t\geqslant 1$，量 V_t 表示投资组合在时间 t 时恰好在任何交易发生之前的价值。与此同时，

$$H_0(t+1)B_t+\sum_{n=1}^{N}H_n(t+1)S_n(t),\quad t\geqslant 1$$

表示投资组合在时间 t 时恰好在时间 t 任何交易发生之后的价值，也就是投资组合刚好持有到时间 $t+1$ 之前的价值。通常，这两个投资组合的价值是不同的，即意味着在时间 t 时有一些资金或者被添加进去，或者从投资组合中撤出。然而，对于许多应用来讲，资金除了在 $t=0$ 和 $t=T$ 时之外不能够往投资组合中添加或者撤出，从而这将引出自融资交易策略的概念。

一个交易策略 H 称为是自融资的（Self-financing），如果

$$(3.1)\qquad V_t = H_0(t+1)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)S_n(t), \quad t = 1, \cdots, T-1$$

换句话说，投资组合在时间 t 时在其任何交易发生之前的价值恰好与在时间 t 时在其任何交易发生之后的价值均相等。直观上讲，如果资金没有在时间 $t=0$ 和 $t=T$ 之间往投资组合中添加和从投资组合中撤出，那么投资组合价值上的任何变化必是归功于对投资的增益和损失。注意这个概念不是与单时期模型相关联的。此外，人们能够通过某种简单的簿记计算得到：

(3.2) 一个交易策略 H 是自融资的，当且仅当

$$V_t = V_0 + G_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T$$

例 3.3（续） 为使交易策略 H 成为自融资的，人们在时间 $t=1$ 时在状态 ω_1 和 ω_2 下，必有

$$V_1 = (1+r)H_0(1) + 8H_1(1) = (1+r)H_0(2) + 8H_1(2)$$

在状态 ω_3 和 ω_4 下必有 83

$$V_1 = (1+r)H_0(1) + 4H_1(1) = (1+r)H_0(2) + 4H_1(2)$$

等价地，运用 $V_t = V_0 + G_t$，对于 $t=1$ 和 $t=2$ 得出 $V_1 = V_2 - [G_2 - G_1]$。在状态 ω_1 下，计算出这个值得到

$$\begin{aligned} V_1 &= (1+r)^2 H_0(2) + 9H_1(2) - [r(1+r)H_0(2) + H_1(2)] \\ &= (1+r)H_0(2) + 8H_1(2) \end{aligned}$$

它与自融资方程（3.1）是相同的。类似地，人们得到在状态 ω_2 下的结果。在状态 ω_3 下，人们可计算出

$$
\begin{aligned}
V_1 &= (1+r)^2 H_0(2) + 6H_1(2) - [r(1+r)H_0(2) + 2H_1(2)] \\
&= (1+r)H_0(2) + 4H_1(2)
\end{aligned}
$$

其与前面的计算结果相同。

3.1.6 折现价格

引入某些价格过程的折现形式是方便的，价格过程的折现形式在前面已经做了介绍。对于相当多数的不断发展着的金融理论来说，最重要的是证券价格的行为相互之间是彼此联系的，而不是它们的绝对行为。因此，我们将对证券价格的标准化形式感兴趣，通过对各种各样的证券价格除以它们之中的一种价格进行标准化。为此，选择银行账户作为除数是十分方便的，也就是作为币制（Numeraire）。

折现价格过程（Discounted Price Process）$S_n^* = \{S_n^*(t): t = 0,1,\cdots,T\}$是由

$$S_n^*(t) \equiv S_n(t)/B_t,\quad t = 0,1,\cdots,T;\quad n = 1,2,\cdots,N$$

定义的。折现价值过程（Discounted Value Process）$V^* = \{V_t^*: t = 0,1,\cdots,T\}$是由

$$V_t^* \equiv \begin{cases} H_0(1) + \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n^*(0), & t = 0 \\ H_0(t) + \sum_{n=1}^{N} H_n(t)S_n^*(t), & t = 1,\cdots,T \end{cases}$$

定义的。最后，折现增益过程（Discounted Gains Process）$G^* = \{G_t^*: t = 1,2,\cdots,T\}$是由

$$G_t^* \equiv \sum_{n=1}^{N}\sum_{u=1}^{t} H_n(u)\Delta S_n^*(u),\quad t = 1,\cdots,T$$

定义的，其中记号$\Delta S_n^*(u)$意指 $S_n^*(u) - S_n^*(u-1)$，这点应该从前面的

（非折现）增益过程定义中猜测到。所有这些过程均是适应的随机过程。

通过实施某些簿记计算，直接验证得出

(3.3) $$V_t^* = V_t/B_t, \quad t=0,1,\cdots,T$$ 84

以及

(3.4) 一个交易策略是自融资的，当且仅当

$$V_t^* = V_0^* + G_t^*, \quad 对于\ t=0,1,\cdots,T$$

习题 3.1 验证（3.2）。

习题 3.2 验证（3.3）。

习题 3.3 验证（3.4）。

3.2 收益过程与股息过程

给定一个价格过程 $S_n, n=1,\cdots,N$，假设人们通过令 $R_n(0)=0$，以及对于所有 $t=1,\cdots,T$，

(3.5) $$\Delta R_n(t) \equiv \begin{cases} \Delta S_n(t)/S_n(t-1), & S_n(t-1)>0 \\ 0, & S_n(t-1)=0 \end{cases}$$

定义一个新的过程 $R_n=\{R_n(t): t=0,1,\cdots,T\}$。这一过程 R_n 称为对应于价格过程 S_n 的收益过程（Return Process）。收益过程 R_0 是以类似的方式按照银行账户过程 B 定义的，给定 $\Delta R_0(t)=r_t$。这些收益过程和其他形式的收益过程是经常用于各类计算中的。

注意到，$\Delta R_n(t) \geqslant -1$，这是因为价格过程是非负的。此外，$\Delta R_n(t) > -1$ 对于所有 t，当且仅当价格过程 S_n 是严格正的。

定义 R_n 的方程是与

$$\text{(3.6)} \qquad \Delta S_n(t) = S_n(t-1)\Delta R_n(t), \quad t = 1, \cdots, T$$

相同的。反过来，它与

$$\text{(3.7)} \qquad S_n(t) = S_n(0) + \sum_{u=1}^{t} S_n(u-1)\Delta R_n(u), \quad t = 1, \cdots, T$$

是相同的。还有，另外一个等价的方程是

$$\text{(3.8)} \qquad S_n(t) = S_n(0)\prod_{u=1}^{t}(1 + \Delta R_n(u)), \quad t = 1, \cdots, T$$

这最后两个方程表明：以满足 $\Delta R_n > -1$ 的一个收益过程 R_n 和一个初始价格$S_n(0)$开始，人们能够定义出一种严格正的价格过程。因此，在正的价格过程和由一个正的初始价格与一个收益过程所构成的对之间存在着一一对应的关系，其中收益过程具有比 -1 大的跳跃变化。* 这是一个十分有
85 用的事实，因为通过首先详细规定收益过程来建立一个证券市场模型比起直接地详细说明价格过程建立一个证券市场模型更容易。

3.2.1 折现价格过程的收益

与价值过程、折现价格过程等等相对应的收益过程能够以完全相同的方式定义出。由于$S_n^*(t) = S_n(t)/B_t$ 对于 $t = 1, \cdots, T$，所以人们想知道表示对应于 S_n^* 的收益过程R_n^* 如何与表示对应于非折现价格过程的R_n相联系起来。为了找出联系，我们能够计算

$$\begin{aligned}
\Delta S_n^*(t) &= S_n^*(t) - S_n^*(t-1) = S_n(t)/B_t - S_n^*(t-1) \\
&= \frac{S_n(t-1)[1 + \Delta R_n(t)]}{B_{t-1}[1 + \Delta R_0(t)]} - S_n^*(t-1) \\
&= S_n^*(t-1)\left[\frac{\Delta R_n(t) - \Delta R_0(t)}{1 + \Delta R_0(t)}\right]
\end{aligned}$$

通过定义，由于$\Delta S_n^*(t) = S_n^*(t-1)\Delta R_n^*(t)$，这蕴含着

$$\Delta R_n^*(t)=\frac{\Delta R_n(t)-\Delta R_0(t)}{1+\Delta R_0(t)}$$

此与

$$\begin{aligned} S_n^*(t) &= S_n^*(0)\prod_{u=1}^{t}(1+\Delta R_n^*(u)) \\ &= S_n(0)\prod_{u=1}^{t}\left[\frac{1+\Delta R_n(u)}{1+\Delta R_0(u)}\right] \\ &= S_n(t)/B_t \end{aligned}$$

相一致。

3.2.2 价值过程和增益过程的收益

由于$H_n(t)\Delta S_n(t)=H_n(t)S_n(t-1)\Delta R_n(t)$，由此可见，增益过程满足

$$\begin{aligned} G_t &= \sum_{u=1}^{t}H_0(u)B_{u-1}\Delta R_0(u)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{u=1}^{t}H_n(u)S_n(u-1)\Delta R_n(u) \\ &= \sum_{u=1}^{t}M_0(u)\Delta R_0(u)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{u=1}^{t}M_n(u)\Delta R_n(u) \end{aligned}$$

其中，量

$$M_n(t)\equiv\begin{cases} H_0(t)B_{t-1}, & \text{n}=0 \\ H_n(t)S_n(t-1), & \text{n}=1,2,\cdots,\text{N} \end{cases}$$

能够被解释成为开始在时间 $t-1$ 时投资于证券 n 的资金。换句话说，$M\equiv\{M_0,M_1,\cdots,M_N\}$是一种规定交易策略可选择的方法，同时前面对 G 的表达式表明，增益过程等于交易策略 M 对证券收益过程的随机积 86
分。注意到，$M_n=\{M_n(t):t=1,2,\cdots,T\}$是一个可料的随机过程。

其次，考察对应于价值过程 V 的收益过程，记为 R。由于

$$V_t = V_{t-1} + H_0(t)\Delta B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t)\Delta S_n(t)$$
$$= V_{t-1} + M_0(t)\Delta R_0(t) + \sum_{n=1}^{N} M_n(t)\Delta R_n(t)$$

由此可得

$$\Delta R(t) = [V_t - V_{t-1}]/V_{t-1}$$
$$= \frac{M_0(t)}{V_{t-1}}\Delta R_0(t) + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{M_n(t)}{V_{t-1}}\right]\Delta R_n(t)$$
$$= \sum_{n=0}^{N} F_n(t)\Delta R_n(t)$$

其中

$$F_n(t) \equiv M_n(t)/V_{t-1}, \quad n = 0, 1, \cdots, N$$

表示投资者在时间 $t-1$ 时对证券 n 投资的财富分数形式，并且持有到时间 t。R 的方程表示以单个证券的收益过程刻画价值过程的收益过程。注意到，$F_n = \{F_n(t): t = 1, 2, \cdots, T\}$是一个可料的随机过程。量$F_n(t)$对某些 n、t 和 ω 来说能够为负的，但人们总有 $F_0(t) = 1 - F_1(t) - \cdots - F_N(t)$。因此，$F \equiv \{F_1, \cdots, F_N\}$也是另外一种形式的交易策略。

概括地讲，交易策略能够以三种方式表示出来：作为投资于证券 n 的一些数量单位H_n；作为投资于证券 n 的资金数量M_n；或者作为投资于证券 n 的财富分数形式F_n。在后者情况下，如果你还知道每一种证券的收益过程，那么你会有一种方便可供选择的价值过程表达式，即

$$V_t = V_0 \prod_{u=1}^{t} [1 + \Delta R(u)] = V_0 \prod_{u=1}^{t}\left[1 + \sum_{n=0}^{N} F_n(u)\Delta R_n(u)\right]$$

这样，以投资的财富分数形式$F = \{F_1, \cdots, F_N\}$和单个的收益过程 $\{R_n\}$ 以及初始价值 V_0 为起点，人们能够计算出 V_t 和以货币形式表示的交易策略$M = \{M_0, M_1, \cdots, M_N\}$。此外，一旦知道初始价格 B_0 和$S_n(0)$，人们能计算出价格过程，最后还有以单位形式$H = \{H_0, H_1, \cdots, H_N\}$表示的交

易策略。

用$R^* = \{R^*(t): t=0,1,\cdots,T\}$表示对应于折现价值过程 V^* 的收益 87
过程，从上述结果中可得

$$\text{(3.9)} \qquad \Delta R^*(t) = \frac{\Delta R(t) - \Delta R_0(t)}{1 + \Delta R_0(t)}$$

因此

$$V_t^* = V_0^* \prod_{u=1}^{t} [1 + \Delta R^*(u)] = V_0 \prod_{u=1}^{t} \left[\frac{1 + \Delta R(u)}{1 + \Delta R_0(u)}\right]$$

其与 $V^* = V/B$ 的事实是一致的。

3.2.3 股息过程

证券种类非常多，诸如支付股息的股票，对其所有者在一个时期基础上发给现金支付。关于这点，这方面的特性被忽略了。对单时期模型而言不存在这一问题，因为$S_n(1)$表示投资者在时间 $t=0$ 时所购买的证券在时间 $t=1$ 时单位证券的价值，而且这在现金股息和时间 $t=1$ 时股票凭证的价值之间表明如何分配的问题，也就是说没有其他的后续问题存在。然而，对于多时期模型来讲，对任何股息支付的显性建模常常是重要的。例如，持有几个时期的股票投资者会得到现金股息，进而必须仔细地对无论是投资者把其现金重新投资到相同的股票上，或把其现金存入银行账户上，还是以其他方式使用现金来建模。

将股息支付并入到模型中有两种方法：隐性方式和显性方式。对于隐性方式来说$S_n(t)$应该解释为在时间 $t=0$ 时购买单位证券，并且无限期地持有，同时把得到的任何股息均重新投资到相同证券上的投资价值。例如，如果在时间 $t=1$ 时得到 1 美元的股息，那么在此时不带股息（Ex-dividend）的价格是$S_n(1)-1$，这意味着 1 美元股息被用来购买该种证券$(S_n(1)-1)^{-1}$个追加单位。但是，随着时间进一步地演化，簿记账户变得有些凌乱，因为人们企图去关注真实证券价格的变化，证券的真实头寸等等。不过，这种隐性方式有时把收益过程处理为重要因素考虑时是方便

的，因为尽管两种证券中的一个支付股息，而另一个证券不支付股息，但两种证券所拥有相同的收益过程（至少对某些目的而言）是等价的。换句话说，隐性方式确实是你能够仅仅处理收益过程而不是价格过程的一种手法；事实上，每一种带有支付股息的证券可由不支付任何股息但确实具有相同收益过程的证券所代替。

为了理解支付股息证券的收益过程，并阐述显性方式，我们称$D_n=\{D_n(t):t=0,\cdots,T\}$为证券 n 的股息过程（Dividend Process）对于 $n=1,\cdots,N$，其中$D_n(0)=0$,而$\Delta D_n(t)$表示在时间 t 时每单位证券所支付
88 的股息。这样 $D_n(t)$表示与一个单位证券相联系的累积股息支付。另外，$S_n(t)$表示不带股息（Ex-dividend）的证券价格，也就是在任何时间 t 支付股息之后的价格。人们经常假设股息过程是一个可料过程。由于证券支付了股息，所以股息过程应该被列入到数据资料的一个组成部分。

现在，拥有一个单位证券的投资者在时间 $t-1$ 时将获得接下来一个时期持有证券的利润 $\Delta S_n(t)+\Delta D_n(t)$，所以对应于一个时期的收益是（假定$S_n(t-1)>0$）

$$\Delta R_n(t)=\frac{\Delta S_n(t)+\Delta D_n(t)}{S_n(t-1)},\quad t=1,\cdots,T;\quad n=1,\cdots,N$$

这样，一旦知道证券的价格过程和股息过程，人们能够推导出证券的收益过程（当然，$R_n(0)=0$），但是，其逆则不成立。对于一个给定的收益过程，显然存在着具有这种相同收益过程的无限多个股息价格过程对，而这些成对中的每一个均满足 $D_n=0$。

支付股息证券的折现收益过程 R_n^* 是由令$R_n^*(0)=0$ 及

$$\Delta R_n^*(t)=\frac{\Delta S_n^*(t)+\Delta D_n(t)/B_t}{S_n^*(t-1)},\quad t=1,\cdots,T;\quad n=1,\cdots,N$$

定义的。不难验证前面用来推导无股息情况下的表达式$\Delta R_n^*(t)=[\Delta R_n(t)-\Delta R_0(t)]/[1+\Delta R_0(t)]$仍然成立。

总括起来可得，支付股息证券将具有以这种显性形式表示的其股息模型。这样，如果在没有对股息过程作规定说明的情况下，那么还仍然假设证券是不支付任何股息的。

习题 3.4 证明在例 3.3 中，人们有$R_1(1,\omega_1)=R_1(1,\omega_2)=0.6, R_1(1,\omega_3)=R_1(1,\omega_4)=-0.2, R_1(2,\omega_1)=0.725, R_1(2,\omega_2)=0.35, R_1(2,\omega_3)=0.3$以及$R_1(2,\omega_4)=-0.45$。在利率是常数 $r>0$ 的情况下，对应于 S_1^* 的收益过程 R_n^* 是多少？

习题 3.5 在 S_n 是严格正的情况下，证明(3.5)，(3.6)，(3.7)和(3.8)均是等价的。如果 S_n 能取到零时，结果会怎样呢？

习题 3.6 以两种不同的方式验证关系式（3.9）。

3.3 条件期望与鞅

正如单时期模型那样，多时期证券市场模型具有无套利机会，当且仅当存在一个风险中性概率测度。然而，在多时期情况下风险中性概率测度是依照称为鞅的概念来定义的，反过来，这些定义均用到了条件期望。因此，这节的目的是从概率论的知识世界中引入这两个概念。 89

正如我们假定的那样，在基础概率论里样本空间 Ω 是有限的，在已知事件 A 下离散随机变量 Y 的条件期望记作$E[Y|A]$，并依据条件概率分布$P\{Y=y|A\}$用

$$E[Y|A]=\sum_y yP\{Y=y|A\}$$

来定义的。利用贝叶斯定律，由于$P\{Y=y|A\}=P\{Y=y,A\}/P\{A\}$，由此可得

$$\begin{aligned}E[Y|A]&=\sum_y yP\{Y(\omega)=y,A\}/P\{A\}\\&=\sum_{\omega\in A}Y(\omega)P\{\omega\}/P\{A\}。\end{aligned}$$

因此，例如在例 3.3 中，其中$P\{\omega\}=1/4$，对于所有 $\omega\in\Omega$，人们有$P\{S_2=9\mid S_1=8\}=P\{S_2=6\mid S_1=8\}=(1/4)/(1/4+1/4)=1/2$，在此情

况下$E[S_2|S_1=8]=7.5$。类似地，$E[S_2|S_1=4]=4.5$。

当以定义在域流概率空间（Filtered Probability Space）上的随机过程开始研究问题时，当事件 A 跑遍代数 $\mathscr{F}$ 时，把$E[Y|\mathscr{F}]$作为所有形式$E[Y|A]$的条件期望集合是十分方便的。这一思想体现在，$E[Y|\mathscr{F}]$是由

$$E[Y|\mathscr{F}]1_A=E[Y|A], \quad \text{所有 } A\in\mathscr{P}$$

定义的，其中 $\mathscr{P}$是对应于 $\mathscr{F}$ 的 Ω 分割。因此，$E[Y|\mathscr{F}]$将是一个随机变量，它是关于 $\mathscr{F}$ 可测的。例如，在例 3.3 情况中，

$$E[S_2|\mathscr{F}_1]=\begin{cases}7.5, & \omega_1 \text{ 和 } \omega_2\\ 4.5, & \omega_3 \text{ 和 } \omega_4\end{cases}$$

由于$E[Y|\mathscr{F}]$ 是一个完好的随机变量，我们能够计算出它的期望：

$$\begin{aligned}
E\Big[E[Y|\mathscr{F}]\Big] &= E\left[\sum_{A\in\mathscr{P}}E[Y|A]1_A\right]\\
&= \sum_{A\in\mathscr{P}}P\{A\}E[Y|A]\\
&= \sum_{A\in\mathscr{P}}P\{A\}\sum_{\omega\in A}Y(\omega)P\{\omega\}/P\{A\}\\
&= \sum_{A\in\mathscr{P}}\sum_{\omega\in A}Y(\omega)P\{\omega\}\\
&= EY
\end{aligned}$$

这一情况稍微推广是下面的形式。

(3.10) 如果 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$，那么 $\mathrm{E}\Big[\mathrm{E}[\mathrm{Y}|\mathscr{F}_2]|\mathscr{F}_1\Big]=\mathrm{E}[\mathrm{Y}|\mathscr{F}_1]$

例如，在例 3.3 中$E\Big[E[S_2|\mathscr{F}_1]\Big]=7.5/2+4.5/2=6=ES_2$。

如果随机变量 $X\in\mathscr{F}$，那么人们能够写成

(3.11)
$$X=\sum_{A\in\mathscr{P}}x_A1_A$$

其中，x_A 是一个纯量，而 $\mathscr{P}$ 是对应于 $\mathscr{F}$ 的一个分割。因而 90

$$\begin{aligned} E[XY|\mathscr{F}] &= \sum_{A\in\mathscr{P}} E[XY|A]1_A \\ &= \sum_{A\in\mathscr{P}} E[x_A Y|A]1_A \\ &= \sum_{A\in\mathscr{P}} x_A E[Y|A]1_A \\ &= XE[Y|\mathscr{F}] \end{aligned}$$

以类似的方式，人们能验证下面的推广。

(3.12) 给定随机变量 X_1，X_2，Y_1 和 Y_2，并满足 X_1，$X_2 \in \mathscr{F}$，人们有

$$E[X_1Y_1 + X_2Y_2|\mathscr{F}] = X_1E[Y_1|\mathscr{F}] + X_2E[Y_2|\mathscr{F}]$$

如果 Y 是一个常量，那么显然 $E[Y|\mathscr{F}] = Y$。取 $Y = 1$，而且运用(3.12)，由此得出

(3.13) 如果 $X\in\mathscr{F}$，那么 $E[X|\mathscr{F}] = X$

比如，就例 3.3 来说，$E[S_1S_2|\mathscr{F}_1] = S_1E[S_2|\mathscr{F}_1]$，同时 $E[S_1|\mathscr{F}_1] = S_1$。

取 $A\in\mathscr{F}$ 蕴含着 $1_A\in\mathscr{F}$，所以（运用 3.12）有 $E[Y1_A|\mathscr{F}] = 1_AE[Y|\mathscr{F}]$。因此，由（3.10），人们有

$$E[1_AE[Y|\mathscr{F}]] = E[Y1_A], \quad 所有 A\in\mathscr{F}$$

可以证明，这一方程提供一种可供选择的 $E[Y|\mathscr{F}]$ 的定义，把其推广到概率空间上，其中 Ω 是非有限的。特别，假设 $X\in\mathscr{F}$，满足

(3.14) $E[1_AX] = E[Y1_A]$， 所有 $A\in\mathscr{F}$

像（3.11）中那样取 X，由此可得，当 $A\in\mathscr{P}$，$\mathscr{P}$ 是对应于 $\mathscr{F}$ 的分割时

$E[1_A X]=x_A P\{A\}$。与此同时，取相同的 $A\in\mathscr{P}$，人们有

$$E[Y1_A] = \sum_{\omega\in A} Y(\omega)P\{\omega\} = P\{A\}\sum_{\omega\in A} Y(\omega)P\{\omega\}/P\{A\}$$
$$= P\{A\}E[Y|A]$$

因此，(3.14) 蕴含着

$$x_A=E[Y|A], \quad 所有\ A\in\mathscr{P}$$

其意味着$X=E[Y|\mathscr{F}]$。$E[Y|\mathscr{F}]$的这种特性概括总结如下。

(3.15) 给定任何一个随机变量 Y，条件期望$E[Y|\mathscr{F}]$是惟一的随机变量使得

(a) $E[Y|\mathscr{F}]\in\mathscr{F}$

(b) $E[E[Y|\mathscr{F}]|1_A]=E[Y1_A]$， 所有 $A\in\mathscr{F}$

现在，我们转到鞅的专题内容上来。我们已知一个域流概率空间与一个适应的随机过程$Z=\{Z_t:t=0,1,\cdots,T\}$。过程 Z 称为鞅（Martingale），如果

$$E[Z_{t+s}|\mathscr{F}_t]=Z_t, \quad 所有\ s,t\geqslant 0$$

91 **例 3.5** 考察一个硬币，满足$P(头面)\equiv p$,其中$0<p<1$。设

$N_t\equiv$在 t 次独立地抛硬币后出现头面的次数，

$Z_t\equiv N_t-pt$，及

$\mathscr{F}_t\equiv$对应于从头 t 次开始观察抛硬币的代数。

容易看出，$E[N_t]=pt$。此外，Z 是一个鞅，因为

$$\begin{aligned}E[Z_{t+s}|\mathscr{F}_t] &= E[N_{t+s}-p(t+s)|\mathscr{F}_t]\\ &= E[N_{t+s}-N_t+N_t|\mathscr{F}_t]-p(t+s)\\ &= E[N_{t+s}-N_t|\mathscr{F}_t]+E[N_t|\mathscr{F}_t]-pt-ps\end{aligned}$$

$$=E[N_s] + N_t - pt - ps$$
$$=N_t - pt = Z_t$$

这里我们运用了不言自明的事实，抛硬币 $t+1$，$t+2$，…，$t+s$ 是从 t 次开始以后为相互独立的，在此情况下，在观察从 t 次开始抛硬币 $t+1$，$t+2$，…，$t+s$ 期间的头面期望数等于在抛硬币 s 次期间所观察到的期望数。

鞅经常被用于作为公平赌博游戏的模型，其中 Z_t 表示游戏在进行 t 次以后赌博者的赌本。

我通过说明与鞅密切联系的两类过程来得出结论。一个适应的随机过程 $Z=\{Z_t: t=0,1,\cdots,T\}$ 称为是上鞅的（Supermartingale），如果

$$E[Z_{t+s}|\mathscr{F}_t] \leqslant Z_t, \quad \text{所有 } s,t \geqslant 0$$

所以上鞅类似于鞅，只是未来值的条件期望小于或等于现值。所有的鞅都是上鞅，但是反之则不成立。

最后，一个适应的随机过程 $Z=\{Z_t: t=0,1,\cdots,T\}$ 称为是下鞅的（Submartingale），如果

$$E[Z_{t+s}|\mathscr{F}_t] \geqslant Z_t, \quad \text{所有 } s,t \geqslant 0$$

因此，Z 是下鞅的，当且仅当 $-Z$ 是上鞅的。同时，Z 是一个鞅，当且仅当它既是上鞅的又是下鞅的。

习题 3.7　验证（3.10）。

习题 3.8　验证（3.12）。

习题 3.9　一个满足 $X=\{X_t: t=0,1,\cdots,T\}$ 的适应随机过程，证明下面内容是等价的：

(a)　X 是一个鞅。

(b)　$X_t = E[X_T|\mathscr{F}_t]$，$t=0,1,\cdots,T-1$。

(c)　$E[\Delta X_{t+1}|\mathscr{F}_t]=0$，$t=0,1,\cdots,T-1$。

3.4 经济背景

现在转到我们的证券模型上，同时发展一种类似于单时期模型的关系：存在无套利机会当且仅当存在一个风险中性概率测度。这点和相当多数的由单时期模型所发展起来的其他经济概念在类似的多时期模型环境中仍然成立一样；确实仅在一些细节上有所不同。

在多时期证券市场的情况下，一个套利机会（Arbitrage Opportunity）是指某一个交易策略 H，使得

(a) $V_0=0$,

(b) $V_T\geqslant 0$,

(c) $EV_T>0$ 以及

(d) H 是自融资的。

如同单时期模型一样，套利机会的存在是与经济均衡不相协调的，在没有任何损失资金的条件下，把零美元变成一个正数值美元可能性的存在会促使产生一种导致证券价格基础结构瓦解的市场力量。

鉴于（3.3），立刻得到

(3.16) 一个自融资交易策略 H 是一个套利机会，当且仅当

(a) $V_0^*=0$,

(b) $V_T^*\geqslant 0$ 以及

(c) $EV_T^*>0$。

同时由于（3.4），所以我们还有

(3.17) 一个自融资交易策略 H 是一个套利机会，当且仅当

(a) $G_T^*\geqslant 0$,

(b) $EG_T^*>0$ 以及

(c) $V_0^*=0$。

例 3.3（续） 如果 $B_1=1$ 对于 $t=0$，1 及 2，那么存在无套利机会。如果投资者在时间 $t=1$ 时在风险资产上具有任何一个头寸，那么常常存在价格将朝着损失方向上运动的可能性。如果在时间 $t=0$ 时，投资者吸

纳风险资产构成任何一个头寸，那么就存在着因为没有保证覆盖住下一时期的方式在时间 $t=1$ 时“出现亏损”的可能性。

另一方面，假设$B_t=(1+r)^t$，其中纯量 r 满足$r\geqslant 12.5\%$，考虑在时间 $t=0$ 或者在时间 $t=1$ 如果 $S_1=4$，你以零美元开始，同时什么也不做的交易策略，除非如果 $S_1=8$，那么在时间 $t=1$ 你卖空一股风险资产(也就是$H_1(2)=-1$)，而且把 8 美元投资到银行账户上（也就是$H_0(2)=8/(1+r)$）。因而，在时间 $t=2$ 投资组合的价值是

$$V_2=\begin{cases}(1+r)^2H_0(2)+9H_1(2)=8(1+r)-9\geqslant 0, & \omega=\omega_1\\ (1+r)^2H_0(2)+6H_1(2)=8(1+r)-6\geqslant 0, & \omega=\omega_2\end{cases}$$ 93

因此，这个交易策略是一个套利机会。

可以证明，如同单时期模型那样，存在无套利机会，当且仅当存在一个风险中性概率测度。但是，对单时期模型而言，风险中性概率是以普通的期望来定义的，而多时期模型的风险中性概率测度是用鞅来定义的。

风险中性概率测度（Risk Neutral Probability Measure）［也称为鞅测度（Martingale Measure)］是一种概率测度 Q，使得

1 $Q(\omega)>0$，对于所有 $\omega\in\Omega$ 以及

2 折现价格过程 S_n^* 在 Q 下是一个鞅，对于每一个 $n=1,2,\cdots,N$。

换句话说，鉴于鞅的定义，一个风险中性概率测度 Q 必须满足

$$E_Q[S_n^*(t+s)\mid\mathscr{F}_t]=S_n^*(t),\quad t,s\geqslant 0$$

也就是，

$$\textbf{(3.18)}\qquad E_Q[B_tS_n(t+s)/B_{t+s}\mid\mathscr{F}_t]=S_n(t),\ t,s\geqslant 0$$

例3.3（续） 假设$B_t=(1+r)^t$，其中 $r\geqslant 0$ 是一个常数。我们想要计算出一个鞅测度，如果它存在的话。为此，我们对不同 s 和 t 的值运用(3.18)，给出下列方程

$$t=0,s=1:\quad 5(1+r)=8[Q(\omega_1)+Q(\omega_2)]+4[Q(\omega_3)+Q(\omega_4)]$$
$$t=0,s=2:\quad 5(1+r)^2=9Q(\omega_1)+6Q(\omega_2)+6Q(\omega_3)+3Q(\omega_4)$$
$$t=1,s=1:\quad 8(1+r)=[9Q(\omega_1)+6Q(\omega_2)]/[Q(\omega_1)+Q(\omega_2)]$$
$$t=1,s=2:\quad 4(1+r)=[6Q(\omega_3)+3Q(\omega_4)]/[Q(\omega_3)+Q(\omega_4)]$$

取这些方程中的任何三个方程连同方程$Q(\omega_1)+\cdots+Q(\omega_4)=1$，均会使人们求解出四个未知量：

$$Q(\omega_1)=\left(\frac{1+5r}{4}\right)\left(\frac{2+8r}{3}\right)\qquad Q(\omega_2)=\left(\frac{1+5r}{4}\right)\left(\frac{1-8r}{3}\right)$$
$$Q(\omega_3)=\left(\frac{3-5r}{4}\right)\left(\frac{1+4r}{3}\right)\qquad Q(\omega_4)=\left(\frac{3-5r}{4}\right)\left(\frac{2-4r}{3}\right)$$

注意到，如果$0\leqslant r<1/8$，这些值均是严格正的，从而我们得到一个真实的概率测度。另一方面，如果$r\geqslant 1/8$，那么$Q(\omega_2)$不是严格正的，在此情况下不存在鞅测度。

如果$r<1/8$，那么你不能找到那样的任何一种状态（也就是任何时间和任意的状态），在此状态中下一个时期的折现价格能严格高于当前折
94 现价格，除非存在着下一个时期的折现价格是比较低的机会。你也不能找出那样的任何一种状态，在此状态里下一个时期的折现价格能严格地低于当前折现价格，除非存在着下一个时期的折现价格是比较高的机会。因而，在每一种状态中都存在着风险证券的非零头寸将会在下一个时期中损失资金的风险，因此存在无套利机会。

另一方面，如果$r\geqslant 1/8$，那么倘若在时间$t=1$时$S_1=8$（意味着状态是ω_1或ω_2），就有$S_2^*(\omega_1)\leqslant S_1^*(\omega_1)$及$S_2^*(\omega_2)<S_1^*(\omega_2)$。这就是下一个时期的折现价格能严格地低于现期价格，除非存在着下一个时期的折现价格能严格地高于现期价格的任何风险。当然，像前面所阐述的那样，现在就存在套利机会。

现在我们阐述本节的主要结果。

(3.19) 存在无套利机会，当且仅当存在一个鞅测度Q。

这一结果的证明类似于单时期模型中相似结果的证明。为了阐明此方

法，也就是鞅测度的存在为什么蕴含着无套利机会，我们首先提供一个实用概括性的结果：

(3.20) 如果 Z 是一个鞅，而 H 是一个可料过程，那么

$$G_t \equiv \sum_{u=1}^{t} H_u \Delta Z_u$$

也是一个鞅。

这可运用条件期望的某些性质通过一些直接的计算来得到。设 s，$t \geqslant 0$是任意的，于是

$$\begin{aligned}
E[G_{t+s} \mid \mathscr{F}_t] &= E[G_{t+s} - G_t + G_t \mid \mathscr{F}_t] \\
&= E[H_{t+1}\Delta Z_{t+1} + \cdots + H_{t+s}\Delta Z_{t+s} \mid \mathscr{F}_t] + G_t \\
&= E[E[H_{t+1}\Delta Z_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] \mid \mathscr{F}_t] \\
&\quad + E[E[H_{t+2}\Delta Z_{t+2} \mid \mathscr{F}_{t+1}] \mid \mathscr{F}_t] + \cdots \\
&\quad + E[E[H_{t+s}\Delta Z_{t+s} \mid \mathscr{F}_{t+s-1}] \mid \mathscr{F}_t] + G_t \\
&= E[H_{t+1} E[\Delta Z_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] \mid \mathscr{F}_t] \\
&\quad + E[H_{t+2} E[\Delta Z_{t+2} \mid \mathscr{F}_{t+1}] \mid \mathscr{F}_t] + \cdots \\
&\quad + E[H_{t+s} E[\Delta Z_{t+s} \mid \mathscr{F}_{t+s-1}] \mid \mathscr{F}_t] + G_t \\
&= E[H_{t+1} \cdot 0 \mid \mathscr{F}_t] + \cdots + E[H_{t+s} \cdot 0 \mid \mathscr{F}_t] + G_t \\
&= G_t
\end{aligned}$$

其中，接近于最后等式的获得是基于 Z 为鞅的事实。因此 G 也是一个鞅。 95

由（3.4）和（3.20）直接得出我们下面的结果，它在实践上具有相当大的重要性。

(3.21) 如果 Q 是一个鞅测度，同时 H 是一个自融资的交易策略，那么作为对应于 H 的折现价值过程 V^* 在 Q 下是一个鞅。

我们运用(3.21)来马上证明：鞅测度 Q 的存在蕴含不存在任何套利机会。假设 H 是一个任意的自融资交易策略，满足 $V_T^* \geqslant 0$ 和 $EV_T^* > 0$。这

蕴含着 $E_Q V_T^* > 0$。利用（3.21）知 V^* 在 Q 下是一个鞅，由此可得 $V_0^* = EQV_T^* > 0$。因此，利用（3.16）由 H 的任意选择知，H 不是套利机会，任何其他的交易策略也不是套利机会。

人们能够以几种方式来证明（3.19）的逆，比如通过运用在单时期模型情况下所使用的分离超平定理的扩展形式来论证。然而，基于我们已经知道的单时期模型理论，即类似于（3.19）的单时期结果之上，建立就显得更为容易。特别，当知道多时期模型存在无套利机会时，人们能构建出与风险中性相一致的单一时期条件概率。于是，鞅测度 Q 就能由这些条件概率计算出来，其中用到根据多时期模型的信息结构来将它们乘起来的结果。换句话说，多时期模型的鞅测度可通过“粘连”（Pasting Together）各种单时期模型构造出来。

为了更准确起见，对应于信息子模型树结构的每一个非终端的结点存在一个基本单时期模型，也就是每一个 $A \in \mathscr{P}_t$（对应于 $\mathscr{F}_t$ 的最小分割）对于每一个 $t < T$。单时期“时间 0”时风险证券 n 的折现价格是$S_n^*(t, \omega)$，$\omega \in A$，它在 A 上是常数。对应的单时期“样本空间”是由作为分割 $\mathscr{P}_{t+1}$（也就是信息子模型树结构上的结点所出现的每一个分支的一个状态）成分的每一个单元 $A' \subseteq A$ 的一个状态所构成的。最后，单时期模型“时间 1”时的折现价格是由$S_n^*(t+1, \omega)$的价值给出的，对于 $\omega \in A$。

如果任何的基本单时期模型在单时期意义上有套利机会，那么多时期模型在多时期意义上必存在套利机会。为了弄懂这点，假设单时期模型存在着对应于某一个 $A \in \mathscr{P}_t$ 套利机会 $\hat{H}$，对于 $t < T$。这意味着折现增益 $\hat{H}_1 \Delta S_1^*(t+1) + \cdots + \hat{H}_N \Delta S_N^*(t+1)$ 是非负的，且在事件 A 下不等于零。现在通过取

96

$$H_n(s, \omega) = \begin{cases} \hat{H}_n, & s = t+1, \omega \in A, n = 1, \cdots, N \\ -\hat{H}_1 S_1^*(t) - \cdots - \hat{H}_N S_N^*(t), & s = t+1, \omega \in A, n = 0 \\ \hat{H}_1 \Delta S_1^*(t+1) + \cdots + \hat{H}_N \Delta S_N^*(t+1), & s > t+1, \omega \in A, n = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

来构造一个多时期交易策略 H。因而，只需一些验算就能证明 H 是一个以零资金开始，并且什么也不做的自融资交易策略，除非事件 A 在时间 t 发

生,在此情况下在时间 t 的头寸 $\hat{H}_n$ 吸纳第 n 个风险证券,而银行账户上的头寸以自融资的方式来选择。结果,没有任何头寸来吸纳任何风险证券;任何非零价值的投资组合由银行账户的头寸反映出来。如果 $\hat{H}$是单时期模型的套利机会,那么银行账户的这个后续头寸事实上将是非负的,对于所有 $\omega\in\Omega$,并且对于至少一个 $\omega\in A$ 是严格正的。特别,在 H 下人们将有 $V_0^*=0$,$V_T^*\geqslant 0$ 且 $V_T^*(\omega)>0$,对于至少一个 $\omega\in\Omega$,也就是 H 将是一个套利机会。

换句话说,我们知道

(3.22) 如果多时期模型没有套利机会,那么没有一个基本单时期模型在单时期意义上有任何的套利机会。

结果,鉴于我们对单时期模型的了解,对应的每一个基本单时期模型是风险中性概率测度的。例如,对应于每一个 $A\in\mathscr{P}_t$ 是单时期模型样本空间上的一个概率测度对于 $t<T$,记作$Q(t,A)$。这一概率测度对分割 $\mathscr{P}_{t+1}$中每一个单元 $A'\subseteq A$ 给出了正的质量,其在这些单元上的和等于 1,而且它满足$E_{Q(t,A)}\Delta S_n^*(t+1)=0$ 对于 $n=1,\cdots,N$。

注意到,$Q(t,A)$对信息树中每一个分支产生一个概率,而信息树是由对应于 (t,A) 的结点而出现的。一旦给定事件 A 在时间 t 时,这些概率应被认为是条件风险中性概率。因而,以风险中性概率测度$Q(t,A)$集合为开始,对于所有 $A\in\mathscr{F}_t$ 和 $t<T$,人们通过前面明确的方式能够构造整个多时期模型的一个概率测度Q:$Q(\omega)$ 是等于沿着从 $t=0$ 时结点到对应于 (T,ω) 的结点路径的条件概率乘积的集合。显然 $\sum_{\omega\in\Omega}Q(\omega)=1$。此外,因为所有的条件风险中性概率均是严格正的,所以$Q(\omega)>0$ 对于每一个 $\omega\in\Omega$。

剩下的就是阐述被构造出来的概率测度 Q 为什么确实是一个鞅测度。由于$E_{Q(t,A)}\Delta S_n^*(t+1)=0$,对于 $n=1,\cdots,N$,$A\in\mathscr{P}_t$ 和$t<T$,由此可得

(3.23) $$E_Q[\Delta S_n^*(t+1)\mid\mathscr{F}_t]=0 \quad 对于\ n=1,\cdots,N\ 和\ t<T$$

现在取任意的 s,$t\geqslant 0$ 及 n:

97

$$
\begin{aligned}
E_Q[S_n^*(t+s)|\mathscr{F}_t] &= E_Q[\Delta S_n^*(t+s)+\cdots+\Delta S_n^*(t+1)+S_n^*(t)|\mathscr{F}_t] \\
&= E_Q[E_Q[\Delta S_n^*(t+s)|\mathscr{F}_{t+s-1}]|\mathscr{F}_t]+\cdots \\
&\quad + E_Q[E_Q[\Delta S_n^*(t+1)|\mathscr{F}_t]|\mathscr{F}_t]+S_n^*(t) \\
&= E_Q[0|\mathscr{F}_t]+\cdots+E_Q[0|\mathscr{F}_t]+S_n^*(t) \\
&= S_n^*(t)
\end{aligned}
$$

其中最后一个等式是由（3.23）（注意到，这个计算式表明通常像（3.23）表达式等价于鞅定义中所使用的形式一样）得到的。因此，S_n^* 在 Q 下是一个鞅，所以 Q 是风险中性概率测度。

前面基本原理（3.19）的解释会变得更抽象一些，但是如果你考察一个简单的多时期模型信息树的图形，那么理解变得明晰易懂。

例 3.3（续） 假设$B_t=(1+r)^t$，如上所述其中 r 是常数。考察对应于 $t=0$ 的结点（它有两个分支出现，分别对应于 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 和 $\{\omega_3, \omega_4\}$），人们看到条件概率测度 Q（0，Ω）能够通过求解$5=p8/(1+r)+(1-p)4/(1+r)$ 得到。因此，与 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 分支相联系的条件概率p 是$(1+5r)/4$，在此情况下与另外分支联系的条件概率是$(3-5r)/4$。以类似的方式人们分析（1，$\{\omega_1, \omega_2\}$）结点和最终（1，$\{\omega_3, \omega_4\}$）结点得到与导致（2，ω_1），（2，ω_2），（2，ω_3）和（2，ω_4）结点上的分支相联系的条件概率分别为$(2+8r)/3$，$(1-8r)/3$，$(1+4r)/3$ 和$(2-4r)/3$。注意到，当 $0\leqslant r<1/8$ 时，所有这些条件概率均是严格正的，这与我们前面观察的当 $r\geqslant 1/8$ 时将存在套利机会是相一致的。此外，注意到，这些条件概率是惟一的，也就是没有其他的选择将产生基本单时期模型的风险中性概率。因此，沿着导致 Ω 中四个状态的四个路径的条件概率的乘积，我们立即得出前面以不同方式推导出相同的鞅测度。事实上，现在我们认识到前面$Q(\omega)$的表达式简单地作为适当的条件概率的乘积。

鞅测度能够依照收益过程来定义，而不是依照价格过程。我们上面看到一个严格正的概率测度 Q 是一个鞅测度，当且仅当（3.23）满足。由于$\Delta S_n^*(t+1)=S_n^*(t)\Delta R_n^*(t+1)$，所以（3.23）是正确的，当且仅当$S_n^*(t) E_Q[\Delta R_n^*(t+1)|\mathscr{F}_t]=0$，对于所有 n 和 $t<T$。但是，利用收益过程的定义$S_n^*(t)=0$ 蕴含着 $\Delta R_n^*(t+1)=0$，所以，这最后的陈述是正确的，当且仅当

(**3.24**) $$E_Q[\Delta R_n^*(t+1)|\mathscr{F}_t]=0,\quad \text{所有 } n \text{ 和 } t<T$$

说得更精确些，当且仅当 R_n^* 在 Q 下是一个鞅对于所有 n。概括地说，我 98
们有

(**3.25**) 一个严格正的概率测度 Q 是一个鞅测度，当且仅当 R_n^* 在 Q 下是一个鞅，对于 $n=1,\cdots,N$。

以（未折现）收益过程 R_n 来表述相应的要求就不是那么精美的。不难证明

$$\Delta S_n^*(t+1) = S_n^*(t)\left(\frac{\Delta R_n(t+1) - \Delta R_0(t+1)}{1+\Delta R_0(t+1)}\right)$$

这样，如果所有的价格过程都是严格正的，那么（3.23）是与

(**3.26**) $$E_Q\left[\frac{\Delta R_n(t+1) - \Delta R_0(t+1)}{1+\Delta R_0(t+1)} \,|\, \mathscr{F}_t\right] = 0,\quad \text{所有 } n \text{ 和 } t<T$$

相同的。当然，我们立刻知道，鉴于 3.2 节中用 ΔR_n 表示 ΔR_n^* 的表达式，这等价于（3.24）。

现在假设一些证券支付股息。为检验是否存在任何的套利机会，真正起作用的东西是证券的收益过程，因此原理（3.25）仍是正确的。换句话说，存在无套利机会，当且仅当（3.24）（或者（3.26））成立，其中现在的收益过程是像 3.2 节中那样用股息过程来定义的：$\Delta R_n(t+1)=[\Delta S_n(t+1)+\Delta D_n(t+1)]/S_n(t)$ 和 $\Delta R_n^*(t+1)=[\Delta S_n^*(t+1)+\Delta D_n(t+1)/B_{t+1}]/S_n^*(t)$。这样，(3.24) 能够重新写成

(**3.27**) $$E_Q[S_n^*(t+1)+\Delta D_n(t+1)/B_{t+1}|\mathscr{F}_t]=S_n^*(t),\quad \text{所有 } n \text{ 和 } t<T$$

这表示的意义是：如果投资者在时间 t 购买一个单位证券 n，那么此投资在下一时期的预期折现价值等于时间 t 时头寸的折现价值。

运用（3.27）和条件期望的基本性质，容易看到

$$
\begin{aligned}
&E_Q\left[S_n^*(t+2)+\Delta D_n(t+2)/B_{t+2}+\Delta D_n(t+1)/B_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t\right]\\
&=E_Q\left[E_Q\left[S_n^*(t+2)+\Delta D_n(t+2)/B_{t+2}\,|\,\mathscr{F}_{t+1}\right]+\Delta D_n(t+1)/B_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t\right]\\
&=E_Q\left[S_n^*(t+1)+\Delta D_n(t+1)/B_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t\right]\\
&=S_n^*(t)
\end{aligned}
$$

对这种讨论做一个归纳推广，因此我们有：

(3.28) 如果 Q 是一个风险中性概率测度，那么对于每一个风险证券和每一个 t，$s\geqslant 0$

$$
S_n^*(t)=E_Q[\Delta D_n(t+1)/B_{t+1}+\cdots+\Delta D_n(t+s)/B_{t+s}+S_n^*(t+s)\,|\,\mathscr{F}_t]
$$

这样，时间 t 的折现价格等于经过时间 $t+s$ 的折现股息支付的条件期望
99 值加上经过时间 $t+s$ 的折现价格。

转到另外一个类似于单时期模型中所引进的概念专题上，即线性定价测度（Linear Pricing Measure）是一个非负向量 $\pi=(\pi_1, \cdots, \pi_k)$，使得对于每一个自融资交易策略 H，你有

$$
V_0=\sum_{\omega}\pi(\omega)V_T^*(\omega)
$$

如果 Q 是一个风险中性概率测度，那么显然它也是一个线性定价测度。相反，任何严格正的线性定价测度 π 必是一个风险中性概率测度。为了理解这点，首先，为推导结论 $\pi_1+\cdots+\pi_k=1$，取任何的交易策略满足 $H_1=\cdots=H_N=0$。其次，固定任意的 n，$t<T$，及某一事件 $A\in\mathscr{F}_t=1$，同时考虑在时间 $t=0$ 以 1 美元存入银行账户开始的一个自融资交易策略，并且不做交易除非事件 A 在时间 t 时发生，在此种情况下所有资产被转变成一个时期证券 n 的多头头寸，随后立即转回到银行账户上，一直持续到时间 T 为止。银行账户在时间 t 时等于 B_t，这样随着证券 n 具有价值 $S_n(t)1_A$（这里 1_A 表示事件 A 的示性函数，也就是如果 $\omega\in A$，那么 $1_A(\omega)=1$，而如果 $\omega\notin A$，那么 $1_A(\omega)=0$），如果事件 A 发生，此策略导致时间 t 时购买证券 n 为 $B_t/S_n(t)=1/S_n^*(t)$ 单位。由于所有资金在时间 $t+1$ 时转回到银行账户，所以在此交易策略下折现增益将是

$$G_T^* = (1_A / S_n^*(t))\Delta S_n^*(t+1) = 1_A \Delta R_n^*(t+1)$$

现在交易策略是自融资的，所以（3.4）成立。因而，如果 π 是一个线性定价测度，那么由此可见

$$\sum_{\omega} \pi(\omega) G_T^*(\omega) = 0$$

这对于每一个 $A \in \mathscr{F}_t$ 是成立的，所以取$Q(\omega) = \pi(\omega)$，我们利用（3.24）、(3.25）以及我们关于 G_T^* 的表达式得出结论：Q 是一个风险中性概率测度。

概括地讲，向量 π 是一个线性定价测度，当且仅当在所有折现价格过程为鞅的条件下它是 Ω 上的一个概率测度。

如同单时期模型那样，一价定律（Law of One Price）对多时期模型来说是成立的，如果不存在两个交易策略，比如说 $\hat{H}$和 $\widetilde{H}$，使得 $\hat{V}_T(\omega) = \widetilde{V}_T(\omega)$，对于所有 $\omega \in \Omega$，但是 $\hat{V}_0 \neq \widetilde{V}$。显然，线性定价测度的存在蕴含着一价定律成立。

记号

$$\begin{aligned}
\mathbb{W} &= \{X \in \mathbb{R}^K : X = G^* \text{ 对于某一个交易策略 H}\} \\
\mathbb{W}^\perp &= \{Y \in \mathbb{R}^K : X \cdot Y = 0 \text{ 对于所有 } X \in \mathbb{W}\} \\
\mathbb{A} &= \{X \in \mathbb{R}^K : X \geqslant 0,\ X \neq 0\} \\
\mathbb{P} &= \{X \in \mathbb{R}^K : X_1 + \cdots + X_K = 1,\ X \geqslant 0\} \text{ 以及} \\
\mathbb{P}^+ &= \{X \in \mathbb{P} : X_1 > 0,\ \cdots,\ X_K > 0\}
\end{aligned}$$

于是正如单时期模型那样，$\mathbb{P} \cap \mathbb{W}^\perp$是所有线性定价测度的集合，而$\mathbb{M} \equiv \mathbb{P}^+ \cap \mathbb{W}^\perp$是所有风险中性概率测度的集合。此外，基本原理（3.19）与说法$\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \emptyset$ 是相同的，当且仅当$\mathbb{M} \neq \emptyset$。注意到，$\mathbb{M}$是一个凸集，其闭包等于$\mathbb{P} \cap \mathbb{W}^\perp$。 100

习题 3.10 考察一个两时期问题，满足$\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_5\}$，$r=0$，及一个风险证券：

ω	$S_0(\omega)$	$S_1(\omega)$	$S_2(\omega)$
ω_1	6	5	3
ω_2	6	5	4
ω_3	6	5	8
ω_4	6	7	6
ω_5	6	7	8

域流是由这个风险证券生成的。证明所有鞅测度的集合是

$$\mathbb{M}=\{Q\in\mathbb{R}^5:Q_1=q/2,Q_2=(3-5q)/8,Q_3=(1+q)/8,\\ Q_4=Q_5=1/4,0<q<3/5\}$$

证明$\mathbb{P}\cap\mathbb{W}^{\perp}$即所有线性定价测度的集合等于$\mathbb{M}\cup\{(0,3/8,1/8,1/4,1/4)\}\cup\{(3/10,0,1/5,1/4,1/4)\}$。

习题 3.11 设 Q 是一个概率测度，例如风险中性概率测度，其等于 P，令$X_T(\omega)=Q(\omega)/P(\omega)$以及设 $X_t=E[X_T|\mathscr{F}_t]$对于 $t=0$，1，…，$T-1$。证明 X 是严格正的，满足 $X_0=1$。设 $\{Y_t:t=0,1,\cdots,T\}$ 是一个随机过程。证明 Y 在Q 下是一个鞅当且仅当过程 $\{X_tY_t:t=0,1,\cdots,T\}$ 在 P 下是一个鞅（提示：利用条件期望的抽象定义）。

习题 3.12 利用习题 3.11 证明如果存在一个鞅测度，那么必存在一个严格正的，适应的实值过程$Z=\{Z_t:t=0,1,\cdots,T\}$ 满足 $Z_0=1$，并且使得 B_tZ_t，$S_1(t)Z_t$，…，以及$S_N(t)Z_t$ 均在P 下是一个鞅。反之，证明如果存在一个像上面所说明的过程 Z，那么存在一个鞅测度 Q。此外，证明如何从一个特定的 Z 来计算Q [提示：这样的过程 Z 称为状态价格平减物价指数（State-price Deflator）]。

3.5 二项式模型

虽然“二项式模型”是简单的，但它却是单个风险证券价格方面最重

要的模型。例如，它被许多实践者广泛地应用于确定各种各样股票期权的价格。

每一个时期中存在两种可能性，证券价格或者由因素$u(u>1)$驱使 101
其上升，或者由因素$d(0<d<1)$促使其下跌。在一个时期中上升运动的概率等于参数p，同时，随着时间的变化运动是彼此之间相互独立的。因此，二项式模型与表示独立抛硬币t次后出现头面次数的过程N_t（在例3.4中引入的）是相关的。反过来，过程N_t是基于称为贝努利过程(Bernoulli Process)的。

随机过程$\{X_t : t=1, 2, \cdots\}$称为是满足参数p的贝努利过程，如果随机变量X_1，X_2，…是独立的，并且$P(X_t=1)=1-P(X_t=0)=p$对于所有t。因此，人们考虑事件为$\{X_t=1\}$意味着抛t次结果为“头面”的抛硬币序列。基本样本空间Ω是由所有形式

$$\omega=(0, 1, 0, 0, 1, 1, \cdots)$$

的序列构成的。其中每一个$\omega\in\Omega$在某种明确的意义上，规定出一种可能的抛硬币记录的结果。

严格地讲，贝努利过程是以无限次抛硬币为特征的，因此向量ω具有无限多个分量，同时样本空间具有无限多个状态。然而，我们的证券市场模型仅仅是以有限次时期T为特征的，所以就我们的目的而言，有必要考虑一种“修正”的仅对应于抛T次硬币的贝努利过程。现在每一种状态都有T个分量，每一个分量或是0或是1。像这样的向量存在着2^T个，同时我们修正的贝努利过程的样本空间确实是包括这里的每一个。无论是标准的还是修正的，当$\omega\in\Omega$第t个分量分别为1或者0时，$X_t(\omega)$将取值1或者0。此外，$\mathscr{F}_t$是对应于观察前t次抛硬币的代数，也就是$\mathscr{P}_t$是由2^t个组成单元所构成的分割，其组成单元表示抛t次硬币的每一种可能序列。因此，概率测度是由$P(\omega)=p^n(1-p)^{T-n}$给出的，其中$\omega\in\Omega$是对应于n次“头面”和$T-n$次“背面”的任何一种状态。

过程$\{N_t : t=1, 2, \cdots\}$是用贝努利过程（或者修正的贝努利过程）通过设

$$N_t(\omega)=X_1(\omega)+\cdots+X_t(\omega)$$

来定义的。由此，随机变量 N_t 应该被认为是前 t 次抛硬币出现头面的次数（或者证券价格在前 t 时期里上升运动的次数）。由于 $E[X_t]=p$ 和 $\mathrm{var}(X_t)=p(1-p)$，由此可得，对于任何 t，

$$E[N_t]=tp$$

和

$$\mathrm{var}(N_t)=tp(1-p)$$

此外，不难证明

(3.29) 对于所有 $t=1,2,\cdots$

$$p(N_t=n)=\binom{t}{n}p^n(1-p)^{t-n},\quad n=0,1,\cdots,t$$

102 此式称为二项式概率分布（Binomial Probability Distribution），并且

$$\binom{t}{n}=\frac{t!}{n!(t-n)!}$$

称为二项式系数（Binomial Coefficient）。

现在我们准备定义二项式证券价格模型。这种模型是以 4 个参数为特征的：p，d，u 和 S_0，其中 $0<p<1$，$0<d<1<u$，当然还有 $S_0>0$。时间 t 时证券价格是由

$$S_t=S_0u^{N_t}d^{t-N_t},\quad t=1,2,\cdots,T$$

直接给出的。因此，正如上面所知道的那样，每一个时期存在两种可能性：或者抛硬币以概率 p 出现头面，及由因素 u 促使其价格上升；或者抛硬币以 $1-p$ 概率出现背面，及由因素 d 导致其价格下跌。此外，鉴于(3.29)，S_t 的概率分布是由

$$P(S_t = S_0 u^n d^{t-n}) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, \quad n = 0,1,\cdots,t \tag{3.30}$$

给出的。

在基本样本空间中具有2^T元素，信息树以2^T结点来结束，如图 3.4 所示。特别地，存在着证券价格过程的 2^T 个可能样本路径。然而，运用更紧凑图形来阐述各种可能样本路径是方便的。事件$\{S_t(\omega) = S_0 u^n d^{t-n}\}$发生，当且仅当来自于前 t 次运动的n 次运动确实是“上升”运动；这些运动的次序无关紧要。例如，如果第一次运动是“上升”的，而第二次运动是“下跌”的，或者正好相反，那么$\{S_2(\omega) = S_0 ud\}$就一定发生。正 103
如你能从（3.30）中所看到的那样，在时间 t 时价格过程 S_t 能够仅仅取到$t+1$ 个可能值中的一个，尽管存在长度 t 的 2^t 个可样本路径。图 3.5 表明对应于形式$\{S_t(\omega) = S_0 u^n d^{t-n}\}$的每一个事件存在一个结点的网格图。注意到，这种事件能够发生的方式数目等于从开始结点到这一事件的路径数目，从而此值等于$\binom{t}{n}$。虽然图 3.5 所示的这类网格图对于我们的许多目的而言是方便的，但是它不应该成为混淆如图 3.4 中所示的信息结构网格图。

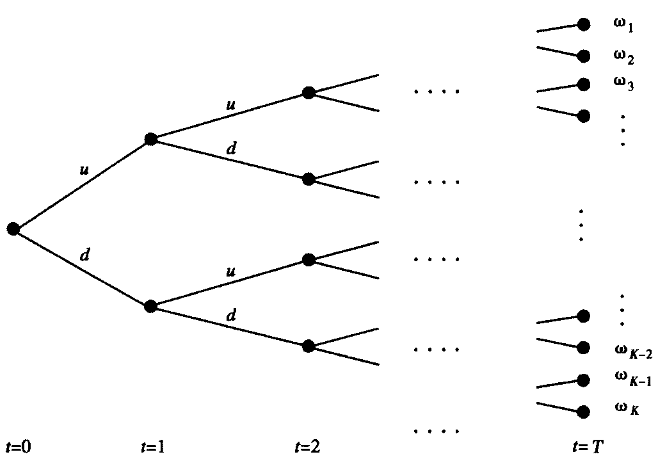


图 3.4　二项式模型的信息树（$K = 2^T$）

人们所预期的二项式证券价格的特征是，它的收益过程是直接由

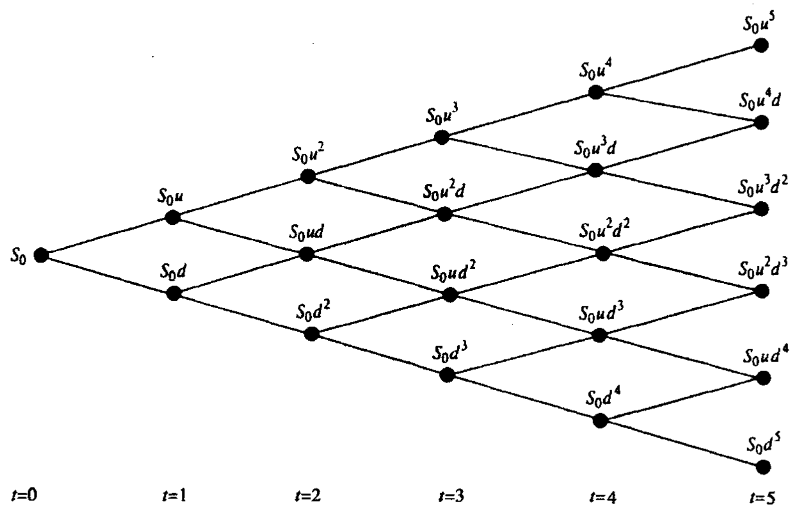


图 3.5　二项式模型（$T=5$）网格表示价格过程

$$\Delta R_1(t)=u^{X_t}d^{1-X_t}-1,\quad t=1,2,\cdots,T \tag{3.31}$$

所给出的。换句话说，或者以概率 p 有 $\Delta R_1=u-1$，或者以概率 $1-p$ 有 $\Delta R_1=d-1$。特别地，收益过程的价值独立于证券的现价，当人们对证券建模时，比如对普通股票建模，这种特性常常是人们所期望的。

鞅测度会怎样呢？假设利率是常数，那么$\Delta R_0(t)=r$ 对于所有 t，利用（3.26）和（3.31）我们必有

$$q\left[\frac{u-1-r}{1+r}\right]+(1-q)\left[\frac{d-1-r}{1+r}\right]=0$$

104 其中，q 是在任何时间 t 给定信息 $\mathscr{F}_t$ 时下一次运动为上升运动的条件概率。从而

$$q=\frac{1+r-d}{u-d}$$

对于所有 $\mathscr{F}_t$ 和 t。由于我们需要 $q<1$，我们认识到存在鞅测度，当且仅

当 $u>1+r$。在这种情况下，鞅测度是由

$$Q(\omega)=q^n(1-q)^{T-n}$$

给出的，其中 $\omega\in\Omega$ 是对应于 n 次"上升"和 $T-n$ 次"下跌"的任何一种状态。由此可得，S_t 的概率分布在风险中性概率测度下是由

$$Q(S_t=S_0u^nd^{t-n})=\binom{t}{n}q^n(1-q)^{t-n},\quad n=0,1,\cdots,t \tag{3.32}$$

给出的，对于所有 t。

二项式模式适合于某些有用的计算，例如在 T 时期由证券过程所促使的最大值的概率分布。我们将在特殊情况 $d=u^{-1}$下推导这个分布，由此导致一种简化 $S_t=S_0u^{2N_t-t}$。定义 $Y_T=\max\{S_t:t=0,1,\cdots,T\}$，105
并注意到此随机变量取 $T+1$ 个值 S_0，S_0u，$\cdots S_0u^T$。我们的目的是计算$P\{Y_T\geqslant S_0u^i\}$ 对于 $i=1,2,\cdots,T$。

固定 i，注意到，$S_t\geqslant S_0u^i$ 当且仅当 $2N_t-t\geqslant i$，所以$P\{Y_T\geqslant S_0u^i\}$ 是与$P\{2N_t-t\geqslant i$ 对于某一个 $t\}$ 相同的。我们将运用所谓的反射原理（Reflection Principle）来计算后者的概率，如图 3.6 所司。其思想是定义首次经过时间（First Passage Time）$\tau_i\equiv\min\{t:2N_t-t=i\}$，如果 $2N_t-t<i$ 对于所有 $t\leqslant T$，那么$\tau=\infty$，同时考虑所有$\tau_i\leqslant T$ 的样本路径。存在着三种相互排斥的事件。如果 i 等于值 T，$T-2$，$T-4$，$\cdots$，中的一个，那么它可能有 $2N_{T-T=i}$,当然在此情况下，$\tau_i\leqslant T$。其次，你能有$\tau_i<T$ 并且 $2N_T-T>i$。最后，你能得到 $\tau_i<T$ 且 $2N_T-T<i$。因此

$$\begin{aligned}P\{Y_T\geqslant S_0u^i\}&=P\{2N_t-t\geqslant i\text{ 对于某一个 }t\}\\&=P\{\text{事件 }1\}+P\{\text{事件 }2\}+P\{\text{事件 }3\}\end{aligned}$$

这第一个概率是

$$P\{\text{事件 }1\}=P\{N_T=(T+i)/2\}=\binom{T}{\frac{T+i}{2}}p^{(T+i)/2}(1-p)^{(T-i)/2}$$

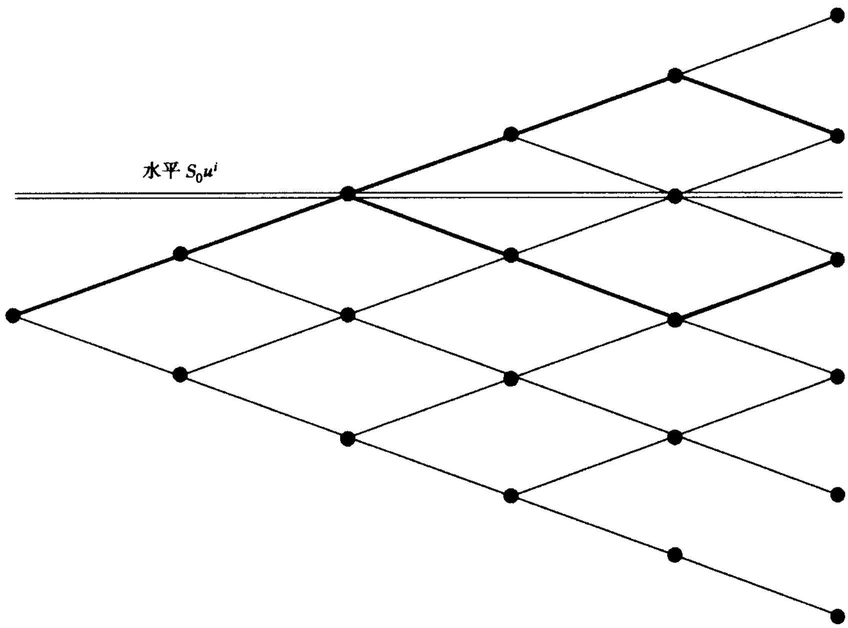


图 3.6 反射原理

当 $T+i$ 为偶数时，否则$P\{事件1\}=0$。第二个概率是容易计算的，因为如果 $2N_T-T>i$，那么自动地有$\tau_i<T$。这样

$$P\{事件2\} = P\{N_T > (T+i)/2\} = \sum_{n=n^*}^{T}\binom{T}{n}p^n(1-p)^{T-n}$$

其中 n^*表示严格大于$(T+i)/2$ 的最小整数（如果 $n^*>T$，那么这个和就取零)。

计算第三个概率显得更困难些，同时这是我们运用反射原理的地方。其思想是事件 2 中的每一个样本路径与事件 3 中惟一的样本路径配成一对，如图 3.6 所示。样本路径直到时间τ_i 才一致相合，于是每一个均是另外一个穿过水平 i 的镜像。因此，在两个事件中样本路径的数目是相等的，尽管这两个事件的概率不相等，除非 $p=1/2$。

为了完成$P\{事件3\}$ 的计算，我们要做某种簿记。考察来自于事件 2 的任意样本路径，同时假设它使得$N_T=n(\geqslant n^*)$。这种样本路径以概率

$p^n(1-p)^{T-n}$发生，同时存在具有 $N^T=n$ 的$\binom{T}{n}$个样本路径。现在一旦考察图 3.6，显然这个样本路径的“相伴者”（Partner）具有 $N_T=T+i-n$，在水平$(T+i)/2$下的对称距离停止。此“相伴者”的样本路径的概率是$p^{T+i-n}(1-p)^{n-i}$。由于在事件 3 中存在着满足 $N_T=T+i-n$ 的$\binom{T}{n}$个样本路径，由此可得

$$P\{\{\text{事件 } 3\}\cap\{N_T=T+i-n\}\}=\binom{T}{n}p^{T+i-n}(1-p)^{n-i}$$

在此情况下 106

$$P\{\text{事件 } 3\} = \sum_{n=n^*}^{T}\binom{T}{n}p^{T+i-n}(1-p)^{n-i}$$

因此，我们有

$$(3.33)\qquad P\{Y_T\geqslant S_0u^i\} = \binom{T}{\frac{T+i}{2}}p^{(T+i)/2}(1-p)^{(T-i)/2} + \sum_{n=n^*}^{T}\binom{T}{n}[p^n(1-p)^{T-n}+p^{T+i-n}(1-p)^{n-i}]$$

其中右边第一项当 $T+i$ 为奇数时是零，而其中 n^* 表示严格大于$(T+i)/2$的最小整数。

现在我们在原则上有了在 T 时期内最大证券价格的概率分布。更一般地，这些公式也能够应用于前 t 时期中最大证券价格的概率分布中，当 $t<T$ 时。由于事件 $\{Y_t\geqslant S_0u^i\}$ 是与事件 $\{\tau_i\leqslant t\}$ 相同的，所以我们也得到首次经过证券价格水平 S_0u^i 的概率分布。

人们能够推导出类似的对于最小证券价格和首次经过低于 S_0 的证券价格水平的公式。

习题 3.13 推导（3.29）。

习题 3.14 对于 $T=4$ 和 $d=1/u$ 的情况，计算出 Y_T 和τ_2 的概率分布。

3.6 马尔可夫模型

这节将引进一类具有所谓“马尔可夫性质”（Markov Property）的随机过程；当给定此过程的现值时，其未来值独立于其过去值。马尔可夫过程是证券价格的重要模型，因为它们经常是真实价格的现实表现，然而马尔可夫性质导致了简化的计算过程。

本节自始至终假设域流$\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t: t=0, 1, \cdots, T\}$ 是由随机过程 $X=\{X_t: t=0, 1, \cdots, T\}$所生成的。这一过程在某个有限集合 E 上取值，E 称为状态空间（State Space）。如果 $X_t=j\in E$，那么我们将说“此过程在时间 t 时处于状态j”。最常见的情况是状态作为一个纯量，但是大多数的时候认为状态作为一个向量更方便。通常，在状态集上存在一个样本空间 Ω 和一个概率测度 P，而信息 $\mathscr{F}_t$ 应该被认为是此过程 X 的现在和过去的历史。

107 随机过程 X 称为马尔可夫链（Markov Chain），如果

$$P\{X_{t+1}=j\mid\mathscr{F}_t\}=P\{X_{t+1}=j\mid X_t\}$$

对于所有 $j\in E$ 和所有 t。通过基本的概率计算，可得到

$$P\{X_{t+s}=j\mid\mathscr{F}_t\}=P\{X_{t+s}=j\mid X_t\},\quad \text{所有 } s\geqslant 1 \tag{3.34}$$

这样，马尔可夫链是一个随机过程，其中用于预测未来值的信息仅仅是现在状态，换句话说，给定此过程的历史，只要你知道现在，过去值就可以忽略。

马尔可夫链称为是平稳的（Stationary）或者时间齐次的（Time-homogeneous）（简称为时齐的），如果条件概率$P\{X_{t+1}=j\mid\mathscr{F}_t\}$不依赖于时间 t。在这种情况下，定义转移概率（Transition Probabilities）

$$P(i,j) \equiv P\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\}, \quad i,j \in E$$

是方便的，同时把转移概率组织成一个转移矩阵（Transition Matrix）

$$P \equiv [P(i,j)]$$

注意到，这是一个方阵，其行数等于状态空间 E 中元素的个数。此外，P 中的每一行元素之和等于 1。不论 P 表示概率测度、转移概率，还是转移矩阵，这从上下文中应该都能清晰地看出。

如果马尔可夫链不是平稳的，那么人们还是能够论及转移概率的，只不过现在它们依赖于时间：$P_t(i,j) \equiv P\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\}$。在这种更一般的情况下，对于时间上每一点都存在着不同的转移矩阵：

$$P_t \equiv [P_t(i,j)]$$

例 3.6 在 3.5 节中研究过的过程 $N=\{N_t: t=1,\cdots,T\}$ 表示在 t 次抛硬币中以概率 p 出现“头面”的次数，这是平稳马尔可夫链的一个例子。对于状态空间取 $\{0,1,\cdots,T\}$ 是方便的，在此情况下，转移矩阵是

$$P=\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-p & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由于马尔可夫链以状态零开始，它仅仅能在最终时间 T 时达到状态 T，因此来自于 T 的转移概率确实不起作用，只是它们相加和必须为 1。我们任意取 $P(T,T)=1$，意味着马尔可夫链永远留在状态 T，即使它在时间 T 后保持着运动。 108

马尔可夫链一个有用的性质是由下面提供的：

(3.35) 如果对某一个函数 f，$Y=f(X_t,X_{t+1},\cdots,X_T)$，那么

$$E[Y|\mathscr{F}_t]=E[Y|X_t]$$

这表明当给定现在值时，未来值与过去值是条件独立的。

现在假设我们有一个证券市场模型，其折现价格过程是马尔可夫链。这意味着$P\{S_{t+1}^*=j|\mathscr{F}_t\}=P\{S_{t+1}^*=j|S_t^*\}$对于所有 $j\in E$ 和 t。想知道何种特殊情况可否说成为是鞅测度的，这是很自然的事，如果鞅测度存在的话。特别地，人们应该询问折现证券价格在鞅测度下是否是马尔可夫链。这是一个重要的问题，因为当你从一个概率测度变换到另一个等价的概率测度时，随机过程会失去其马尔可夫性质。例如，通过变换与例子3.5中相联系的头面计数过程的概率，你能使第三次抛硬币依赖于第一次抛硬币。

然而，可以证明我们的问题能以肯定的方式回答出来：

(3.36) 如果不存在套利机会，倘若折现价格过程 S^* 在 P 下是一个马尔可夫链，同时如果域流$\mathbb{F}$是由 S^* 所生成的，那么在 S^* 是一个马尔可夫链的条件下存在一个鞅测度 Q。

为理解这点，假设马尔可夫链（在 P 下）是平稳的，同时考虑像3.4节中所发展起来的鞅测度构造法。特别，考察与“单时期模型”相联系的条件概率，而单时期模型是与信息树的单个结点相联系的。如果对应的、折现价格过程 S^* 的当前状态是 s，那么当然条件风险中性概率必使得在时期末尾的 S^* 的期望值等于 s。但是，由来自于这种结点引出的每一个分支和从严格为正的状态 s 中得出的转移概率$P(s,j)$之间存在着一一对应关系。换句话说，$P(s,j)>0$ 当且仅当 j 是时期末尾 S^* 的可行状态(Possible State)。因此，对于这种结点选取的风险中性条件概率恰好成为选取来自于状态 s 的新转移概率$Q(s,j)$，以此确保$Q(s,j)>0$ 当且仅当 $P(s,j)>0$，对于所有 j。由假设，我们知道这个选择能成功。

现在，在信息树中存在着许多其他的结点，而信息树对应于 S^* 的当前状态是 s，但是相同的情况会存在。单时期模型全部是恒等的，所以你能够选取相同的风险中性转移概率$Q(s,j)$的集合，对于所有这些结点。

109 以类似的方式，人们在信息树中为所有其他结点选取风险中性转移概率，以此确保概率对所有结点是相同的，其中所有结点对折现价格过程的当前状态来说共享相同的值。因此，这不仅导致像3.4节中所推导的风险中性概率测度 Q，而且在 S^* 是马尔可夫链的条件下这些转移概率形成一

个马可尔夫转移矩阵。由此，当 S^* 在 P 下是平稳的马尔可夫链时，(3.36) 是正确的，同时这种讨论很容易地扩展到覆盖 S^* 是马尔可夫链，但不是平稳的情况下。

由 (3.35) 和 (3.36) 可得，$E_Q[S_n^*(t+s)|\mathscr{F}_t]=E_Q[S_n^*(t+s)|S_t^*]$。因此，关于 Q 成为鞅测度的标准关系能写为

$$S_n^*(t)=E_Q[S_n^*(t+s)|S_t^*],\quad \text{所有 } n,\ t \text{ 和} s$$

如果初始价格过程 S_t 在P 下是一个马尔可夫链，同时银行账户 B_t 是一个确定性的，那么折现价格过程 $S_t^*=S_t/B_t$ 也将是一个马尔可夫链。然而，如果银行账户过程是随机的，甚至是一个马尔可夫链，那么折现价格过程将不一定是马尔可夫链。在此情况下，并不是所有的内容都失效；然而利用模型的马尔可夫性质还是可行的。

当 B_t 是随机过程时，一种方法是着手设立具有基本随机过程 X 在P 下是一个平稳的马尔可夫链，且域流是由此过程所生成的证券市场模型。例如，X_t 能够作为所有相关证券当前价格的一个向量。一旦人们这样做时，会正式地固定初始状态 $X_0=i_0$，其次，设样本空间 Ω 是 X 的所有可行样本路径。于是，如果 $\omega\in\Omega$ 对应于样本路径（i_0，i_1，i_2，…，i_T），那么人们可以取概率测度使得$P\{\omega\}=P(i_0,i_1)P(i_1,i_2)\cdots P(i_{T-1},i_T)$。

其次，对于每一个 t 假设 f_t 是状态空间 E 上的一个实值函数，使得银行账户过程满足$B_t=f_t(X_t)$。如果风险证券价格是以类似方式定义的，那么折现价格过程也能表示为基本马尔可夫链 X 的函数，成为两个这样函数的比值。现在这些价格过程中没有一个有必要是一个马尔可夫链；例如，函数 f 对于 E 中两个不同的状态产生相同的价格。然而，我们对于 (3.36) 会再作一次讨论从而寻回有用的结果。

此外，我们考察与信息树的每一个结点相联系的单时期模型，现在与每一个结点仅有的联系是马尔可夫链 X 的当前状态。如前所述我们构造条件概率$Q(i,j)$和鞅测度 Q，现在不过将证明 X 在Q 下是一个马尔可夫链。因此，由 (3.35) 关于结果 Q 我们得到$E_Q[S_n^*(t+s)|\mathscr{F}_t]=E_Q[S_n^*(t+s)|X_t]$，在此情况下，关于 Q 成为鞅测度的标准关系能够写为

$$S_n^*(t) = E_Q[S_n^*(t+s) \mid X_t] \quad 所有\ n,t\ 和\ s$$

110 **例 3.5（续）** 取$f_t(x) = S_0 u^x d^{t-x}$，我们对于 3.5 节中的二项式证券价格模型有$S_t = f_t(N_t)$，其中头面（朝上）计数过程 N_t 是一个如同前面所讨论的马尔可夫链。实际上，S_t 也是一个平稳的马尔可夫链，即使 f_t 依赖于t，因为价格过程中未来的变化仅仅依赖于未来"抛硬币"，其与时间是无关的。如果 s 是 $S_t = s$ 的状态，那么若 $j = su$，则转移概率 $P(s,j) = p$，若 $j = sd$，则 $P(s,j) = 1 - p$，在其他情况下则有 $P(s,j) = 0$。对于一般的参数 u 和d，状态空间是有些凌乱，因为它能够包括直到$(T+1)(T+2)/2$ 个不同的值，也就是网格中的结点数目像图 3.4 中的那样。然而，在重要的特殊情况 $d = u^{-1}$情况下，状态空间仅有 $2T+1$ 个不同的值，通过研究图 3.5 可以看清楚这点。

为论证前面鞅测度 Q 必须满足的方程，我们有$S_t^* = S_0 u^{N_t} d^{t-N_t}/(1+r)^t$和

$$\begin{aligned}
E_Q[S_{t+1}^* \mid S_t^*] &= E_Q[S_0 u^{X_{t+1}+N_t} d^{t+1-X_{t+1}-N_t}/(1+r)^{t+1} \mid S_t^*] \\
&= (S_t^*/(1+r)) E_Q[u^{X_{t+1}} d^{1-X_{t+1}} \mid S_t^*] \\
&= (S_t^*/(1+r)) E_Q[u^{X_{t+1}} d^{1-X_{t+1}}] \\
&= (S_t^*/(1+r)) \left[\frac{1+r-d}{u-d} u + \frac{u-1-r}{u-d} d\right] \\
&= S_t^*
\end{aligned}$$

类似地，人们可验证$E_Q[S_{t+1}^* \mid N_t] = S_t^*$。

马尔可夫链的优点是它可以直接计算某一特定时期的马尔可夫链状态的条件概率分布。例如

$$\begin{aligned}
P\{X_2 = j \mid X_0 = i\} &= \sum_{k \in E} P\{X_2 = j, X_1 = k \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k \in E} P\{X_2 = j \mid X_1 = k, X_0 = i\} P\{X_1 = k \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k \in E} P\{X_2 = j \mid X_1 = k\} P\{X_1 = k \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k \in E} P_1(k,j) P_0(i,k)
\end{aligned}$$

我们把这最后的表达式理解为矩阵乘法的结果。换句话说，$P\{X_{t+2}=j \mid X_t=i\}$将等于矩阵乘积 P_tP_{t+1}的第 ij 个元素。这种形式能扩展到任何时期上：$P\{X_{t+s}=j \mid X_t=i\}$将等于矩阵乘积 $P_tP_{t+1}\cdots P_{t+s-1}$的第 ij 个元素。当然，在平稳的情况下，人们简单地有 $P_tP_{t+1}\cdots P_{t+s-1}=P^s$。 111

例 3.7 考察满足 $d=u^{-1}$的二项式证券过程模型；价格过程是具有状态空间$E=\{S_0u^{-T}, S_0u^{-T+1}, \cdots, S_0u^{-1}, S_0, S_0u, \cdots, S_0u^{T-1}, S_0u^T\}$的马尔可夫链。但是，假设“上升”运动的条件概率是随状态而变化。特别地，假设$P\{S_{t+1}=S_0u^{i-1} \mid S_t=S_0u^i\}=1-p_i$ 和$P\{S_{t+1}=S_0u^{i+1} \mid S_t=S_0u^i\}=p_i$,对于 $2T-1$ 个参数 $p_i, i=-T+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, T-1$ (例如,建模者能通过设 $p_i>1/2$ 对于 $i<0$ 和 $p_i<1/2$ 对于 $i>0$ 给出价格水平 S_0 稳定性的测度)。这样转移矩阵是

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
1-p_{-T+1} & 0 & p_{-T+1} & & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & \\
 & & & 1-p_{-1} & 0 & p_{-1} & & & & & \\
 & & & & 1-p_0 & 0 & p_0 & & & & \\
 & & & & & 1-p_1 & 0 & p_1 & & & \\
 & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & 1-p_{T-1} & 0 & p_{T-1} \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

同时，例如$P\{S_3=S_0u\}=(1-p_0)p_{-1}p_0+p_0(1-p_1)p_0+p_0p_1(1-p_2)$。

习题 3.15 推导（3.35）。

习题 3.16 推导（3.34）（提示：利用（3.35））。

习题 3.17 对于具有转移矩阵 P 的平稳马尔可夫链 X，利用数学归纳证明$P\{X_{t+s}=j \mid X_t=i\}$等于 P 的 s 型折叠矩阵乘积的第 ij 个元素。

译者注

* 对此,我们假设 $S(t-1)>0$,有

$$
\begin{aligned}
&\Delta R(t)=R(t)-R(t-1)>-1\\
&\Longleftrightarrow S(t)-S(t-1)/S(t-1)>-1\\
&\Longleftrightarrow S(t)-S(t-1)>-S(t-1)\\
&\Longleftrightarrow S(t)>0
\end{aligned}
$$

换句话说，假设在时间 $t-1$ 时价格是正的，那么价格在时间 t 时将是正的，当且仅当收益过程上的跳跃变化满足$R(t)-R(t-1)>-1$。

112

4

期权、期货与其他衍生证券

4.1 未定权益

未定权益（Contingent Claim）是表示时间 T 时从“卖者”向“买者”所支付损益的随机变量 X。这个定义本质上与单时期模型的相同，而且可以证明基本思想也非常地相似。然而，说得更多些，主要是因为多时期模型的设置导致了一系列丰富的例子，许多例子照顾到了在金融行业中的实践应用。

在相当多数的例子中，随机变量 X 能作为原生证券（又称标的证券）价格的某种函数，所以未定权益是所谓衍生证券（Derivative Securities）的一个事例。对单时期模型而言，未定权益仅仅是你能够考虑的惟一衍生证券。但是对几个时期运动的模型，考察衍生证券的一些其他类型是可行的，也就是其价值依赖于原生证券，但不能以时间 T 时损益 X 来建模。衍生证券的其他类型将在本章后面的内容中给予讨论。

正如单时期模型一样，未定权益如同是两个参与者之间的一种合约或协议。由于一方（卖者）许诺在时间 T 时向另一方（买者）支付数量 X，所以买者将正式地支付一些资金给卖者，当他们达成其协议时，比如说在时间 $t<T$ 时。需要处理的基本问题是，什么数值是时间 t 时支付的恰当价值呢？换句话说，这个未定权益在时间 t 时的价值是多少？

通常，对某些现实世界 $\omega\in\Omega$ 的状态而言，时间 T 时支付损益 X 能

是严格负的。这个量相当于由买者向卖者支付的数量。相对比，最重要的是，买者在时间 T 时具有选择权，而恰在那个时候进行支付的情况。在
113 此情况下，称为欧式期权（European Option），支付将自然地发生当且仅当支付是正的。结果，欧式期权与非负的未定权益是相同的。

例 4.1 考察满足 $T=2$ 和 $K=4$ 的简单模型，像第 3 章中例 3.3 所引进的那样。单个风险证券如下：

ω_k	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	$S_0=5$	$S_1=8$	$S_2=9$
ω_2	$S_0=5$	$S_1=8$	$S_2=6$
ω_3	$S_0=5$	$S_1=4$	$S_2=6$
ω_4	$S_0=5$	$S_1=4$	$S_2=3$

如果 $X=S_2-5$，在时间 $T=2$ 以价格 5 来购买一个单位证券的利润，那么支付损益在状态 ω_4 时是负的。但是，如果这是一个欧式期权，那么人们应该取 $X=\max\{S_2-5,\ 0\}$，也就是$X(\omega)$在状态 ω_1，ω_2，ω_3 和 ω_4 时分别取值 4，1，1 和 0。这种欧式期权称为执行价格为 5 的买入期权（Call Option，又称看涨期权）。类似地，$X=\max\{e-S_2,0\}$称为是执行价格为 e 的卖出期权（Put Option，又称看跌期权），也就是 X 是在时间 $T=2$ 以价格 e 卖出一个单位证券的期权。

例 4.2 假设证券市场模型与例4.1中的相同，$X=\max\{[S_0+S_1+S_2]/3-5,0\}$，以致 $X(\omega)$在状态 ω_1，ω_2，ω_3 和 ω_4 分别取值 7/3，4/3,0 和 0。现在 X 是称为亚式期权（Asian Option）或平均期权（Averaging Option）的一个例子。像这样的期权是用来对冲交易者每一个时期均需要购买固定数量的证券引起的涨价情况。不像卖出期权和买入期权 X 的价值仅仅依赖于证券的最终价值，这里的 X 依赖于证券的整个历史。

本章自始至终地假设证券市场模型具有经济学上的意义，也就是存在一个风险中性概率测度 Q。未定权益称为是市销的（Marketable）或者可达的（Attainable），当且仅当存在一个自融资交易策略，使得 $V_T(\omega)=X(\omega)$对于所有 $\omega\in\Omega$。与之相对应的投资组合或者交易策略 H 称为可复制的（Replicate）或可生成的(Generate) X 。就单时期模型来说，未定权益在时间 $t=0$ 的价值被看成是此权益在折现价值的风险中性概率测度下的期望值。在多时期模型情况下，这个结论稍微推广为：

(4.1) 风险中性估值原理（Risk Neutral Valuation Principle）：一个市销的未定权益

X 时间 t 的价值等于 V_t，即复制 X 的投资组合在时间 t 的价值。此外，

$$V_t^* = V_t / B_t = E_Q[X / B_T | \mathscr{F}_t], \quad t = 0, 1, \cdots, T$$

对于所有风险中性概率测度 Q。

(4.1) 中的第一句话是一价定律的结果。事实上（下面将会更详细地 114
讨论），如果 X 在时间 t 以不是 V_t 的价值能够购买或者卖出的话，那么人们通过对此未定权益和其他证券采取一种恰当的头寸，就能够开发出一个套利机会。由于 $V_T = X$ 当且仅当 $V_T^* = X/B_T$，(4.1) 中的方程是由 V^* 在测度 Q 下作为鞅的事实而得出的（参见 (3.21)）。

例 4.1（续） 假设 $r=0$（参见例 3.3），所以 $Q=(1/6, 1/12, 1/4, 1/2)$。如果执行价格 $e=5$ 的买入期权是可达的，那么它在时间 $t=0$ 时的价值必是

$$V_0 = E_Q[X] = \frac{1}{6}(4) + \frac{1}{12}(1) + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{2}(0) = 1$$

在状态 ω_1 和 ω_2，我们有

$$V_1 = E_Q[X | S_1 = 8] = \frac{2}{3}(4) + \frac{1}{3}(1) = 3$$

而在状态 ω_3 和 ω_4，我们有

$$V_1 = E_Q[X | S_1 = 4] = \frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}(0) = \frac{1}{3}$$

类似地，执行价格 $e=5$ 的卖出期权支付损益在 ω_1 至 ω_4 时分别为 0，0，0 和 2，所以在状态 ω_1 和 ω_2，$V_0=1$，$V_1=0$ 以及在状态 ω_3 和 ω_4，$V_1=4/3$。

重要的是能够计算出生成一种特定权益的交易策略。首先，这要验证未定权益确实是可达的。此外，即使你知道未定权益是可达的，你或许想要运用复制的交易策略来对冲未定权益的头寸。

存在着几种计算复制交易策略的好方法。对第一种方法来说，你已经知道复制投资组合的价值过程 V，因此你利用

$$V_t = H_0(t)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t)S_n(t)$$

价值过程定义中的线性方程（每一种状态一个方程）求解交易策略 H，同时记住 H 是一个可料的。这点将在下面的例子中加以阐述：

例 4.1（续） 对于 $t=2$，我们有

$$V_2(\omega_1)=4=H_0(2)(\omega_1)1+H_1(2)(\omega_1)9$$
$$V_2(\omega_2)=1=H_0(2)(\omega_2)1+H_1(2)(\omega_2)6$$
$$V_2(\omega_3)=1=H_0(2)(\omega_3)1+H_1(2)(\omega_3)6$$
$$V_2(\omega_4)=0=H_0(2)(\omega_4)1+H_1(2)(\omega_4)3$$

由于 H 是可料的，我们也有

115 $$H_0(2)(\omega_1)1=H_0(2)(\omega_2) \quad H_0(2)(\omega_3)1=H_0(2)(\omega_4)$$
$$H_1(2)(\omega_1)1=H_1(2)(\omega_2) \quad H_1(2)(\omega_3)1=H_1(2)(\omega_4)$$

在状态 ω_1 和 ω_2 求解这些方程得到 $H_0(2)=-5$ 和 $H_1(2)=1$，而在状态 ω_3 和 ω_4 得到 $H_0(2)=-1$ 和 $H_1(2)=1/3$。与此同时，对于 $t=1$ 我们有

$$V_1(\omega)=3=H_0(1)(\omega)1+H_1(1)(\omega)8, \qquad \omega=\omega_1,\omega_2$$
$$V_1(\omega)=\frac{1}{3}=H_0(1)(\omega)1+H_1(1)(\omega)4, \qquad \omega=\omega_3,\omega_4$$
$$H_0(1)(\omega_1)=H_0(1)(\omega_2)=H_0(1)(\omega_3)=H_0(1)(\omega_4)$$
$$H_1(1)(\omega_1)=H_1(1)(\omega_2)=H_1(1)(\omega_3)=H_1(1)(\omega_4)$$

求解这些方程得出 $H_0(1)=-7/3$ 和 $H_1(1)=2/3$ 对于所有 ω。

对计算复制交易策略的第二种方法来说，假设你知道的全部内容就是 X。然后你立刻依时间倒推计算，同时推导出 V 和 H。由于 $V_T=X$，你首先求解

$$X = H_0(T)B_T + \sum_{n=1}^{N} H_n(T)S_n(T)$$

如同在第一种方法中那样得出 $H(T)$。由于 H 是自融资的，由此可得

$$V_{T-1} = H_0(T)B_{T-1} + \sum_{n=1}^{N} H_n(T)S_n(T-1)$$

所以，你现在知道 V_{T-1}。

其次，你求解

$$V_{T-1} = H_0(T-1)B_{T-1} + \sum_{n=1}^{N} H_n(T-1)S_n(T-1)$$

如同在第一种方法中那样得出$H(T-1)$，于是你计算出 V_{T-2}。你重复这种循环倒推的工作直到你最终计算出 V_0。

例 4.1（续） 我们首先运用第二种方法计算出状态 ω_1 和 ω_2 的 $H_0(2)=-5$ 和 $H_1(2)=1$，所以在这两种相同的状态下 $V_1=-5(1)+1(8)=3$。类似地，在状态 ω_3 和 ω_4 中$H_0(2)=-1$ 和 $H_1(2)=1/3$，所以在这两种相同的状态下 $V_1=-1(1)+(1/3)(4)=1/3$。其次，我们运用 V_1 的这些值来计算出$H_0(1)=-7/3$ 和 $H_1(1)=2/3$，对于所有 ω。最后，我们看出$V_0=(-7/3)(1)+(2/3)(5)=1$，对于所有 ω。

计算复制策略的另一种方法涉及折现价格和折现价值过程。自融资方程 $V_0^*+G_t^*=V_t^*$ 是与

$$V_{t-1}^*(\omega) + \sum_{n=1}^{N} H_n(t)(\omega)\Delta S_n^*(t)(\omega) = V_t^*(\omega)$$ 116

相同的。这样，如果你知道 V_t^*，那么你能运用这个方程组连同可料性的要求求解 V_{t-1}^*和头寸$H_1(t)$，…，$H_N(t)$。因而，你以 $t=T$ 和 $V_T^*=X/B_T$ 为开始，然后你立刻依时间倒推，计算出复制投资组合的折现价值过程 V^*，以及复制交易策略在所有风险证券上的头寸。这得出 $V=V^*B$。最后，你运用 V 或者V^*的定义计算出 H_0，即银行账户的头寸。这点在下面的例子中加以阐述。

例 4.2（续） 假设 $r=0$，方程在状态 ω_1 和 ω_2 分别是

$$V_1^* + H_1(2)(1) = 7/3$$

和

$$V_1^* + H_1(2)(-2) = 4/3$$

因此，在这些相同的状态中，$V_1^* = 2$ 和 $H_1(2) = 1/3$ 。类似地，方程

$$V_1^* + H_1(2)(2) = 0$$

和

$$V_1^* + H_1(2)(-1) = 0$$

给出了在状态 ω_3 和 ω_4 中的 $V_1^* = 0$ 和 $H_1(2) = 0$

由第二次迭代，我们有

$$V_0^*(\omega) + H_1(1)(\omega)(3) = 2, \qquad \omega = \omega_1, \omega_2$$
$$V_0^*(\omega) + H_1(1)(\omega)(-1) = 0, \quad \omega = \omega_3, \omega_4$$

因而，$V_0 = 1/2$ 和 $H_1(1) = 1/2$ 对于所有 ω。

剩下来的是计算 H_0。运用 $H_0(1) = V_0^* - H_1(1)S_0$ ，我们得出 $H_0(1) = -2$ 。类似地，我们得出在状态 ω_1 和 ω_2 中 $H_0(2) = -2/3$ ，以及在状态 ω_3 和 ω_4 中 $H_0(2) = 0$ 。注意到，$E_Q[X] = (1/6)(7/3) + (1/12)(4/3) = 1/2$ ，与已经计算出的 V_0^* 的值相同。

现在我们转到前面讨论过的套利定价上。如果未定权益的真实交易价格不同于其复制的投资组合的价值，那么人们能找出套利机会。为了理解这点，设 P_t 表示未定权益在时间 t 时的真实价值。

首先假设 $P_t > V_t$。于是以 P_t 卖出未定权益，收取这一数目款项。同时，以等于 V_t 的资本数量开始复制交易策略。将投资差额 $P_t - V_t$ 存入
117 银行得利息。在时间 T 时，你对未定权益的负债将是 $P_T = X$，但是这将与你的复制投资组合是一致的。与此同时，银行账户上的投资变为 $(P_t - V_t)B_T/B_t > 0$，即获得纯利润。

另一方面，如果 $P_t < V_t$，那么你反向地实施这些交易。你买入未定

权益，接着卖出复制交易策略（从而收取 V_t 美元），并且以差额 $V_t - P_t$ 投资于银行账户。在时间 T 时，你的负债 V_T 确实是由未定权益价值 $P_T = X$来抵消。与此同时，现在你在银行账户上有$(V_t - P_t)B_T/B_t > 0$。

转向另外一个专题上，如果银行账户过程 B 是确定的（参见习题 4.3），那么对证券的买入期权是市销的，当且仅当对同样证券的相同执行价格的卖出期权是市销的。如果它们两个都是市销的，那么人们得到一种期权平价原理（Put - Call Parity，或称为买入卖出平价关系）。

$$p = c + eE_Q[1/B_T] - S_0 \tag{4.2}$$

其中，c 和 p 分别是买入期权和卖出期权在时间 $t = 0$ 的价格，它们两个有相同的执行价格 e 和原生证券 S。人们感兴趣的期权（在这种情况下卖出期权）价格能表示成一个或者多个传统买入期权、原生证券价格和“远期”价格$E_Q[1/B_T]$的线性组合的一些事例中的一个。这里给出另外一个例子。

例 4.3 假设买者在时间 0 时获得一个期权，此期权提供在固定时间 t 在买入期权和卖出期权之间进行选择的权利，买入期权和卖出期权具有相同的执行价格 e 和到期日 T，其中 $0 < t < T$。这称为选择期权（Chooser Option）。如果 C_t 和P_t 表示它们在时间t 的价格，那么期权购买者将选择买入期权，当且仅当 $C_t \geqslant P_t$，在此情况下时间 T 时损益将是

$$(S_T - e)^+ 1_{\{C_t \geqslant P_t\}} + (e - S_T)^+ 1_{\{C_t < P_t\}}$$

其中 1_A 表示事件A 的示性函数，如果事件 A 发生，那么 1_A 等于 1；如果事件 A 不发生，那么 1_A 等于零。我们感兴趣的是运用风险中性估值原理（4.1）来计算这个期权在时间 0 时的价值。

现在通过相加和相减一项 $(S_T - e)^+ 1_{\{C_t < P_t\}}$，由此可得选择期权在时间 T 的损益等于

$$(S_T - e)^+ + (e - S_T) 1_{\{C_t < P_t\}}$$

因而利用风险中性估值，如果这种选择期权是市销的，那么它在时间 0 的

价格等于普通买入期权的价格 $(S_T-e)^+$ 加上一个量

$$E_Q[(e-S_T)1_{\{C_t<P_t\}}/B_T] \tag{4.3}$$

118 假设利率 r 是常数，以及买入期权 $(S_T-e)^+$ 是市销的，表达式 (4.3) 具有简单的形式。在时间 t 时应用期权平价原理 (4.2)，所以事件 $C_t<P_t$ 与事件$S_t<e(1+r)^{t-T}$是相同的。因此

$$\begin{aligned}
&E_Q[(e-S_T)1_{\{C_t<P_t\}}/B_T]=E_Q[E_Q[(e-S_T)1_{\{C_t<P_t\}}/(1+r)^T|\mathcal{F}_t]]\\
&\quad=E_Q[1_{\{C_t<P_t\}}E_Q[(e-S_T)/(1+r)^T|\mathcal{F}_t]]\\
&\quad=E_Q[1_{\{C_t<P_t\}}(1+r)^{-t}\{e(1+r)^{t-T}-E_Q[S_T(1+r)^{t-T}|\mathcal{F}_t]\}]\\
&\quad=E_Q[1_{\{C_t<P_t\}}(1+r)^{-t}[e(1+r)^{t-T}-S_t]]\\
&\quad=E_Q[1_{\{S_t<e(1+r)^{t-T}\}}[e(1+r)^{t-T}-S_t]/(1+r)^t]
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式运用了折现价格过程 $S^*=S/B$ 在 Q 下是鞅的事实。我们认为最后表达式是具有执行价格$e(1+r)^{t-T}$和到期时间t 的普通卖出期权在时间 0 的价格。因此，在指示性假设下，选择期权在时间 0 的价格等于某一个普通买入期权的价格加上某一个普通卖出期权的价格，关于后者借助于期权平价原理以另一种买入期权可表示出来。

例 4.1（续） 满足利率 $r=0$ 且执行价格 $e=5$，考察买入者在卖出期权和买入期权在时间 $t=1$ 时之间选择的选择期权。利用我们前面普通卖出期权和买入期权的计算，如果 $S_1=8$，那么此种选择期权的买入者选择买入期权；而如果 $S_1=4$，那么将选择卖出期权。因此，选择期权在状态 ω_1 至 ω_4 中将分别获得损益 4、1、0 和 2，在时间 2 时，这一选择期权时间 0 的价格是

$$V_0=\frac{1}{6}(4)+\frac{1}{12}(1)+\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{2}(2)=1\frac{3}{4}$$

与此同时，如果 $S_1=8$，那么执行价格为 5 的到期时间在 1 时的卖出期权将获得损益 0；而如果 $S_1=4$，那么获得损益 1，所以它在时间 0 时的价格是$\frac{1}{4}(0)+\frac{3}{4}(1)=\frac{3}{4}$。到期时间在 2 时买入期权在时间 0 的价格前面已

经计算过，并且结果为 1，所以这就说明选择期权的价格等于这个卖出期权的价格加上这种买入期权的价格。

当然，期权能够以两种或者更多原生证券来定义。例如，给定一个函数 $g:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$，人们能取 $X=g(S_1(T),\cdots,S_N(T))$。于是，如果你知道在鞅测度下的随机变量 $S_1(T),\cdots,S_N(T)$ 的联合概率分布，那么计算这种未定权益在时间 0 的价值是很容易的。特别，满足

$$g(s_1,\cdots,s_N)=(a_1s_1+\cdots+a_Ns_N-e)^+$$

对于正的纯量 a_1，…，a_N，你可以拥有对股票指数的一种买入期权。或 119
者满足

$$g(s_1,\cdots,s_N)=\max\{s_1,\cdots,s_N,e\}$$

你能拥有交割 N 个证券中的最佳者和现金流 e 的未定权益。

例 4.4 假设 $K=9$，$N=2$，$T=2$，$r=0$，同时价格过程和信息结构如图 4.1 所示。此模型存在惟一的风险中性概率测度 Q；它也如图 4.1 所示。现在考虑一种执行价格 $e=13$ 的在时间 $T=2$ 的股票指数价值为 $S_1(t)+S_2(t)$ 的买入期权。换句话说，这个未定权益 $X=(S_1(2)+S_2(2)-13)^+$，并且如图 4.1 所示。像在 4.4 节中解释的那样，X 是市销的。因此，它在时间 0 的价格容易计算出是 $E_QX=19/18$。

习题 4.1 考察满足 $r=0$，如同例 4.1 中的通常两个时期模型。计算下列欧式期权 $r=0$ 时的价值和复制交易策略。

(a) 执行价格为 7 的买入期权。

(b) 执行价格为 7 的卖出期权。

(c) 执行价格为 7 的亚式期权。

(d) 执行价格为 7、决策时间为 1 的选择期权。

习题 4.2 回顾型期权（Look-back Option）是指基于最近一个时期内原 120
生证券的最高价（或许最低价）来获得收益的一种期权。计算下面回顾型买入期权在时间 $t=0$ 的价值和复制策略：$X=\max\{0,S_0-7,S_1-7,S_2-7\}$。像前面一样，以例 4.1 中满足 $r=0$ 的两个时期模型来考察。

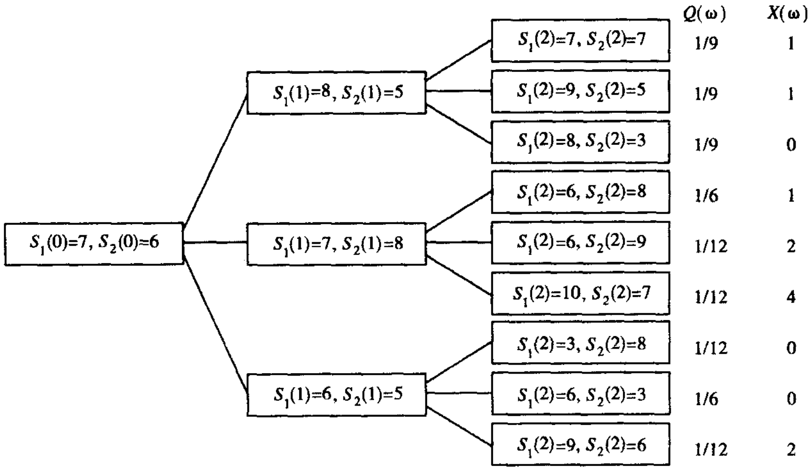


图 4.1　例 4.4 的数据资料

习题 4.3　考察基于相同证券 S 的一种欧式卖出期权和一种欧式买入期权，其中它们具有相同的到期日 T 和相同的价格 e。

(a)　证明 (4.2) 成立，如果卖出期权和买入期权两个都是市销的（提示：运用 $(S_T-e)^+-(e-S_T)^+=S_T-e$，证明满足在时间 T 支付等于常数 e 的权益也是市销的）。

(b)　证明如果银行账户过程 B 是确定的，那么买入期权是市销的当且仅当对应的卖出期权是市销的（提示：规定生成常数支付 e 的交易策略）。

(c)　证明如果银行账户过程 B 是可料的，但不是确定的，那么即使对应的卖出期权以及具有在时间 T 支付等于常数 e 的权益均不是市销的，买入期权成为市销的也是可能的。为此，可以考察满足 $T=2$，$K=6$，$N=1$，$\mathscr{P}_1=\{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6\}\}$，$S_0=40$，期权到期日在 $T=2$ 具有 $e=43\dfrac{48}{109}$，而且价格如下：

ω	$B_1(\omega)$	$S_1(\omega)$	$B_2(\omega)$	$S_2(\omega)$
ω_1	1.10	45	1.232	55
ω_2	1.10	45	1.232	40
ω_3	1.10	40	1.21	50
ω_4	1.10	40	1.21	35
ω_5	1.10	35	1.188	40
ω_6	1.10	35	1.188	30

习题 4.4 对于例4.4中的模型，计算下列期权在时间 0 时的价格和复制投资组合：

(a) 满足 $e=13$ 基于时间 2 时指数 S_1+S_2 价值的买入期权（提示：我们已经知道价格是 19/18)。

(b) 满足 $e=13$ 基于时间 2 时指数 S_1+S_2 价值的卖出期权。

(c) 获得$S_1(2)$和 $S_2(2)$中最大值的期权。

(d) 满足 $e=6$ 基于 $\max\{S_1(2),S_2(2)\}$的买入期权。

(e) 满足 $e=13$ 基于指数 S_1+S_2 的亚式（也就是平均型）买入期权。

4.2 二项式模型下的欧式期权

二项式模型已经在 3.4 节中做了介绍。它是由满足

$$S_t=S_0u^{N_t}d^{t-N_t},\qquad t=1,\ 2,\ \cdots,\ T$$ 121

的单个风险证券构成的，其中 $0<d<1<u$，而 $N=\{N_t:t=1,\cdots,T\}$是具有参数 p 的二项式过程，$0<p<1$。假设利率 r 是满足 $u>1+r$ 的常数，存在一个鞅测度；它是由

$$Q(\omega)=q^n(1-q)^{T-n},\qquad q=\frac{1+r-d}{u-d}$$

给出的，其中 $\omega\in\Omega$ 是对应于由风险证券引起的 n 次“上升运动”和 $T-n$ 次“下跌运动”的任何状态。

S_t 的概率分布在鞅测度下是由（3.32）给出的。因此，如果未定权益是

$$X=g(S_T)$$

一个特定的实值函数 g 的形式，那么 X 在时间 $t=0$ 时的价值是由

(4.4)
$$V_0 = (1+r)^{-T} E_Q g(S_T) = (1+r)^{-T} \sum_{n=0}^{N} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} g(S_0 u^n d^{T-n})$$

给出的。

二项式模型是实用原理的一种良好例证：如果原生证券是马尔可夫链的，那么你大概能在鞅测度下计算出证券在时间 T 时价值的显式概率分布；在此情况下，你能够计算出形式为$X = g(S_T)$的未定权益价值的显式公式。

例 4.5 对于执行价格 e 的买入期权，我们有

$$g(s) = (s-e)^+ = \begin{cases} s-e, & s \geqslant e \\ 0, & s \leqslant e \end{cases}$$

因此，$t = 0$ 的价格是

$$V_0 = (1+r)^{-T} \sum_{n=0}^{T} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \max\{0, S_0 u^n d^{T-n} - e\}$$

注意到

$$\begin{aligned} S_0 u^n d^{T-n} - e > 0 &\Leftrightarrow (u/d)^n > e/(S_0 d^T) \\ &\Leftrightarrow n log(u/d) > log(e/(S_0 d^T)) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{log\ (e/(S_0 d^T))}{log\ (u/d)} \end{aligned}$$

我们定义 $\hat{n}$ 为使这个严格不等式成立的最小非负整数 n。

现在，如果 $\hat{n} > T$，那么 $S_0 u^n d^{T-n} \leqslant e$ 对于所有 $n \leqslant T$，在此情况下 $V_0 = 0$ 。另一方面，如果 $0 \leqslant \hat{n} \leqslant T$，那么存在使这一买入期权稳获利润的机会，在此情况下 $V_0 > 0$。特别

122
$$V_0 = (1+r)^{-T} \sum_{n=0}^{\hat{n}-1} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} (0)$$

$$
\begin{aligned}
&+ (1+r)^{-T}\sum_{n=\hat{n}}^{T}\binom{T}{n}q^n(1-q)^{T-n}[S_0u^nd^{T-n}-e] \\
&= \frac{S_0}{(1+r)^T}\sum_{n=\hat{n}}^{T}\binom{T}{n}q^n(1-q)^{T-n}u^nd^{T-n} \\
&\quad - \frac{e}{(1+r)^T}\sum_{n=\hat{n}}^{T}\binom{T}{n}q^n(1-q)^{T-n} \\
&= S_0\sum_{n=\hat{n}}^{T}\binom{T}{n}\left[\frac{qu}{1+r}\right]^n\left[\frac{(1-q)d}{1+r}\right]^{T-n} \\
&\quad - \frac{e}{(1+r)^T}\sum_{n=\hat{n}}^{T}\binom{T}{n}q^n(1-q)^{T-n} \\
&= S_0\sum_{n=\hat{n}}^{T}\binom{T}{n}\hat{q}^n(1-\hat{q})^{T-n} - \frac{e}{(1+r)^T}\sum_{n=\hat{n}}^{T}\binom{T}{n}q^n(1-q)^{T-n}
\end{aligned}
$$

其中，$\hat{q} \equiv qu/(1+r)$。留给读者运用基本代数知识验证 $1-\hat{q}=(1-q)d/(1+r)$ 和 $0<\hat{q}<1$。因此，V_0 公式中的两项包含二项式概率 $T-\hat{n}+1$ 的和。

例 4.6 考察一个回顾型买入期权 $X=(Y_T-e)^+$，其中 $Y_T=\max\{S_t: t=0, 1, \cdots, T\}$，正如在 3.4 节引进的。假设 $d=u^{-1}$，因此，Y_T 将取 $T+1$ 个值 S_0，S_0u，…，或 S_0u^T 中的一个。在鞅测度下，概率 $P\{Y_T>S_0u^i\}$ 是由公式 (3.33) 给出的，对于 $i=1, \cdots, T$，仅用参数 q 代替 p。因而，原则上我们有 Y_T 的概率分布，从而直接计算出时间 $t=0$ 的价格 $(1+r)^{-T}E_Q(Y_T-e)^+$。类似的方法对回顾型卖出期权 $X=(e-Y_T)^+$，以及基于在时间 T 之前的最小证券价格水平到达的回顾型卖出期权和买入期权均起作用。

例 4.7 出局期权（Knockout Options）是指如果价格水平达到一个指定的价格水平时，比如说是 k，那么此期权在到期日则一文不值。例如，假设 $S_0<k$，$e<k$，如果最大价格 $Y_T<k$，那么 $X=(S_T-e)^+$；而如果 $Y_T \geqslant k$，那么 $X=0$。在 3.4 节中所发展起来的及在例 4.6 中运用的思想能够用于估值这种期权。

假设 $d=u^{-1}$ 且 i 使得 $S_0u^i=k$。正如 3.5 节中所阐述的那样，至少在原则上我们知道在 τ_i 鞅测度下的概率分布，即首次到达证券价格水平 k 的概率分布。注意到，τ_i 取 1，2，…，T 中的一个，或者如果证券价

123 格永远达不到价格水平 k，那么取τ_i 为无穷大。此外，我们知道条件概率$Q\{S_T=S_0u^j|\tau_i=t\}$与条件概率$Q\{S_{T-t}=S_0u^{j-i}|S_0=k\}$相同，其中整数 $j<i$。换句话说，这个条件概率与在时间 t 处于价格水平k 的价格过程在剩下的 $T-t$ 个时期之后确实有 $i-j$ 个价格水平比较低的概率是相同的。在鞅测度下，这个条件概率是

$$Q\{S_T=S_0u^j|\tau_i=t\}=\binom{T-t}{n}q^n(1-q)^{T-t-n},\quad j<i$$

只要$n\equiv(T-t+j-i)/2$ 是一个整数（这里 n 是在最后 $T-t$ 个时期中的“上升运动”的次数，以致价格从价格水平 k 运动到价格水平 S_0u^j)。因此，我们能计算出联合概率分布

$$Q\{S_T=S_0u^j,\tau_i=t\}=Q\{S_T=S_0u^j|\tau_i=t\}Q\{\tau_i=t\}$$

对于 $j<i$ 和$t=1$，…，T。其次，我们对于 $j<i$ 容易计算

$$Q\{S_T=S_0u^j,\tau_i=\infty\}=Q\{S_T=S_0u^j\}-\sum_{t=1}^{T}Q\{S_T=S_0u^j,\tau_i=t\}$$

当然，所有这些概率是在鞅测度 Q 下获得的。最后，我们运用$(1+r)^{-T}\sum_{j<i}Q\{S_T=S_0u^j,\tau_i=\infty\}(S_0u^j-e)^+$计算出局期权的价格 $(1+r)^{-T}E_QX$。

例 4.7 中的期权也称为向上出局买入期权（Up-and-out Call)，你也能有向下出局买入期权（Down-and-out Call）（$k<S_0$，$k<e$)、向上出局卖出期权（Up-and-out Put）（$S_0<k$，$e<k$）和向下出局卖出期权（Down-and-out Put）（$k<S_0$，$k<e$)。对于这些期权你能用类似的方法计算出时间 0 时的价格，也就是在鞅测度$Q\{S_T=S_0u^j,\tau_i=\infty\}$下通过推导联合概率分布的方法。

与这 4 种出局期权配对的每一种对偶形式均是成立的，当且仅当价格水平 k 曾经是达到的。例如，向上入局买入期权(Up-and-in Call)($S_0<k$，$e<k$)在到期日是无价值的，如果最大证券价格是严格小于 k，而到期价值 $(S_T-e)^+$在 $[0,T]$ 期间大于或等于 k。你也可以有向下入

局买入期权（Down-and-in Call）、向上入局卖出期权（Up-and-in Put）和向下入局卖出期权（Down-and-in Put）。所有这 8 种期权均称为障碍期权（Barrier Options）。再者，你能利用推导联合分布$Q\{S_T=S_0u^j,\ \tau_i<\infty\}$的方法计算这 4 种“入局”型期权在时间 0 时的价格。或者，如果你已经知道成对的出局期权，那么你能使用事实：普通买入期权（或者卖出期权）在时间 0 时价格等于成对形式出现的障碍期权价格的和。例如，具有参数 k 和 e 的向上入局买入期权的价格等于执行价格 e 的欧式买入期权的价格减去具有参数 k 和 e 的向上出局买入期权的价格。这是因为买入期权 124
的到期价值等于向上入局买入期权到期价值加上向上出局买入期权的到期价值。

习题 4.5 考察在二项式模型下具有 $T=2$，$e=1000$，$u=1.1$，$d=0.9$ 及 $r=1/100$ 的欧式买入期权。计算出作为初始股票价格 S_0 函数的期权价格，同时画出此函数的精确图形。

习题 4.6 假设 $S_0=80$，$T=3$，$u=1.5$，$d=0.5$ 及 $r=0.1$ 是二项式模型的参数，并考察执行价格 $e=80$ 的买入期权。

(a) 画出模型的网格（也就是重新组合的网络），同时标出具有证券价格 S_t 的结点。

(b) 计算 q 和 $\hat{q}$。

(c) 标出具有对应期权价值的每一个结点。

(d) 确定复制投资组合。

习题 4.7 假设 $S=36$，$T=2$，$u=1.5$，$d=2/3$ 及 $r=0$ 是二项式模型的参数，计算下面障碍期权的价格，利用推导联合概率分布$Q\{S_T,\ \tau\}$的方法，其中τ是首次经过障碍 k 的时间。

(a) 满足 $k=54$ 和 $e=24$ 的向上入局买入期权。

(b) 满足 $k=54$ 和 $e=24$ 的向上出局买入期权。

(c) 满足 $k=54$ 和 $e=40$ 的向上入局卖出期权。

(d) 满足 $k=54$ 和 $e=40$ 的向上出局卖出期权。

(e) 满足 $k=24$ 和 $e=30$ 的向下入局买入期权。

(f) 满足 $k=24$ 和 $e=30$ 的向下出局买入期权。

(g) 满足 $k=24$ 和 $e=54$ 的向下入局卖出期权。

(h) 满足 $k=24$ 和 $e=54$ 的向下出局卖出期权。

4.3 美式期权

对于欧式期权也就是未定权益而言，支付损益 X 仅仅能够在指定日期 T（到期日）才发生。美式期权与此相似，只是支付损益是在指定到期日 T 之前的任何时间τ来进行的。

如同欧式期权一样，你应把美式期权看成是两个交易者之间，即买者和卖者之间的一种合约。作为规定的背景资料是非负的、适应的随机过程 $Y=\{Y_t: t=0, 1, \cdots, T\}$。如果他们在时间 t 达成协议，那么在那时买者向卖者支付的数值 Z_t 等于时间 t 时此期权的价值。于是，买者有权力在任何时间τ来执行这一期权，其中 $t\leqslant\tau\leqslant T$。如果期权在时间$\tau$时执
125 行，那么卖者向买者支付 Y_τ。美式期权仅能执行一次。如果它永不执行，那么没有支付发生。当然，最主要的问题是确定时间 t 时此期权价值 Z_t，也就是美式期权 Y 的价值过程（Value Process）$Z=\{Z_t: t=0, 1, \cdots, T\}$。*

例 4.8 设 $Y_t=(S_n(t)-e)^+$ 生成执行价格为 e 的美式买入期权（American Call Option）。因此，买者有权力以数值 e 在日期 T 之前的任何时间购买一个单位的证券 n。类似地，设 $Y_t=(e-S_n(t))^+$ 生成美式卖出期权（American Put），它赋予期权购买者有权力以价格 e 在时间 T 之前的任何时间卖出一个单位的证券 n。

如果你购买美式期权，那么你能够总是延期执行决策直到时间 T，所以美式期权 Y 的价值 Z_i 至少是与具有支付损益 $X=Y_T$ 的欧式期权价值 V_t 一样。另外，在较早时间里收取值得要的支付损益的可能性会倾向于使美式期权比其对应的欧式期权更有价值。然而，令人惊奇的是，存在着两种价值相一致的重要情形。

(4.5) 考察美式期权 $Y=\{Y_t: t=0, 1, \cdots, T\}$ 及对应的在时间 T 支付损益 $X=Y_T$ 的欧式期权。设 V_t 表示这个欧式期权在时间 t 的价值。如果 $V_t\geqslant Y_t$ 对于所有 t 和 $\omega\in\Omega$，那么对于所有 t，V_t 等于美式期权在时间 t 的价值 Z_t，同时一直等到时间 T 时来执行才是最优的。

道理是非常简单的：如果你购买美式期权，并且 $V_t\geqslant Y_t$，那么在时间 t 时执行它肯定是愚蠢的，因为你总能够保证自己在时间 t 有支付损益

V_t。例如，你能够调整方向，并且卖出相应的欧式期权 V_t，或者你对复制相应的欧式期权的投资组合做空头。由于一直等到时间 T 来决策是否执行是最优的，所以这两个期权的价值必是相等的。

例 4.1（续） 假设 $Y_t=(S_t-5)^+$，其中 S_t 是例 4.1 中的价格过程。回想起 $r=0$ 和 $T=2$。相对应的欧式期权 $X=\max\{0,\ S_2-5\}$ 的价值过程 V_t 是在 4.1 节中已推导出的。图 4.2 展示出此模型价格过程、价值过程 V 和支付损益过程 Y 的信息树。由于 $V_t \geq Y_t$ 对于所有 t，所以 V 等于美式期权的价值过程 Z。

126

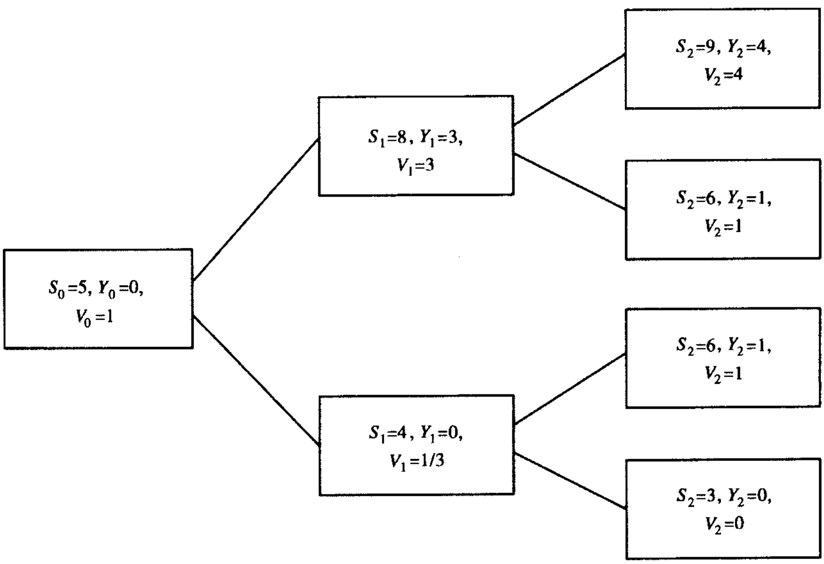


图 4.2 例 4.1 中的美式期权价值和欧式期权价值是相同的
（其中股票不支付股息，而且执行价格是 5）

如其不然，假设美式期权的支付损益 Y 如图 4.3 中所示。在时间 2 时支付损益与图 4.2 中的例题相同，但是在时间 0 时和 1 时的支付损益 Y_t 是比较大的（即考虑满足 $e=4$ 的美式期权，并假设在时间 1 和时间 2 之间支付 1 美元股息）。因此，欧式期权 $X=Y_2$ 的价值过程 V 将与图 4.2 例题的相同，但是现在支付损益过程将不满足 $V \geq Y$。特别，当 $S=8$ 时，$Y_1>V_1$，同时没有理由假设美式期权的价值是由 V 给出的。这个 127
美式期权的价值过程 Z 是由图 4.3 所展示出的，稍后将推导它们。

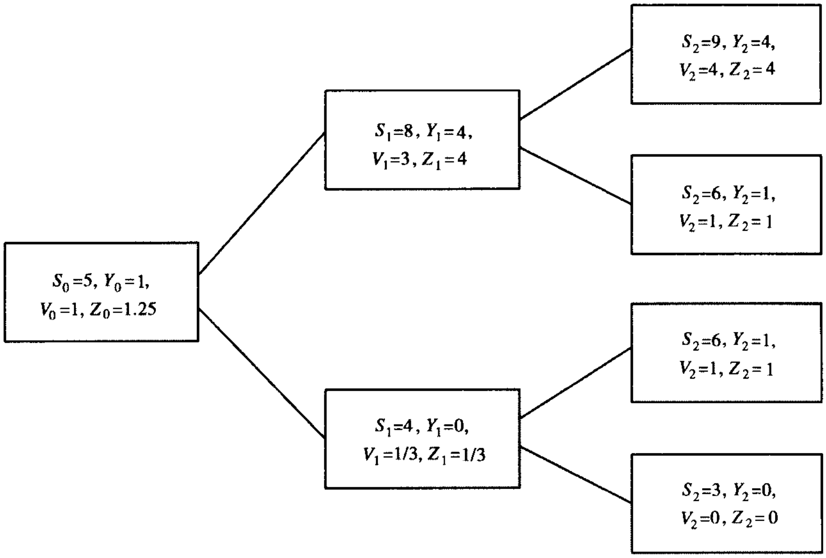


图 4.3　例 4.1 中的美式期权价值和欧式期权价值是不同的（其中股票在时间 1 和 2 之间支付股息，而且执行价格是 4）

为了对美式期权进行估值，有必要引进一类新的随机过程。适应的随机过程 $Z=\{Z_t:\ t=0,\ 1,\ \cdots,\ T\}$ 称为是一个上鞅（Supermartingale）（参见 3.3 节），如果

$$E[Z_t|\mathscr{F}_s]\leqslant Z_s \quad \text{所有 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$$

这样上鞅相似于鞅，只是条件期望未来值小于或等于现在值。所有鞅均是上鞅的，但反过来不对。我们知道欧式期权的折现价值在风险中性概率测度下是一个鞅。可以证明美式期权的折现价值在同样的测度下是一个上鞅。

有必要从随机过程理论中引进第二个专题内容。一个停时（Stopping Time）是指在集合 $\{0,\ 1,\ \cdots,\ T,\ \infty\}$ 中取值的随机变量 τ，使得形式为 $\{\tau=t\}$ 的每一个事件是代数 $\mathscr{F}_t$ 中的元素，$t\leqslant T$。这样，你能够通过简单地检查 $\mathscr{F}_t$，即在时间 t 时可获得的信息来评估事件 $\{\tau=t\}$ 是否发生。例如，对满足 $S_0=10$ 的证券，$\tau_1\equiv\min\{t:S_t\geqslant 20\}$ 是一个停时，因

为你到时间 t 才了解事件 $\{\tau_1 = t\}$。然而，随机变量$\tau_2 \equiv \max\{t: S_t \geqslant 20\}$ 不是一个停时，因为你直到时间 T 时才知道是否对事件 $\{\tau_2 = t\}$ 有所了解。停时允许取∞值，为的是对有意思的事件提供永不发生的可能性。例如，如果事件 $\{S_t \geqslant 20\}$ 到时间 T 时不发生，那么$\tau_i = \infty$。

存在着与我们证券模型的域流相联系的几种停时。通过设$\zeta(s,t)$表示在闭区间上 $[s, t]$ 取有限值的停时（即是随机变量）集合来对这些停时分类是方便的。

在接下来的过程 Z 将被证明是美式期权 Y 的价值过程。

(4.6) 假设存在一个风险中性概率测度 Q，并通过设

(4.7) $$Z_t = \max_{\tau \in \zeta(t,T)} E_Q[Y_\tau B_t / B_\tau | \mathscr{F}_t]$$

定义适应随机过程 $Z = \{Z_t: t = 0, \cdots, T\}$，那么过程 Z/B 是满足

(4.8) $$Z_t \geqslant Y_t, \quad \text{所有 } t, \omega$$

的最小 Q-上鞅。

此外，停时

(4.9) $$\tau(t) \equiv \min\{s \geqslant t: Z_s = Y_s\}$$

使 (4.7) 的右边最大化，对于 $t = 0, 1, \cdots, T$。

为了阐述这些原理，我们首先描述计算过程 Z 的方法，此方法本身 128
是很重要的内容。计算将使用广泛适用的算法化方法的动态规划。关于美式期权的思想采用依时间倒推的方法，像你计算过程 Z 那样。注意到，对于 $t = T$ (4.8) 显然是正确的，也就是 $Z_T = Y_T$。此外，对于 $t = T$ (4.9) 成立。

现在第一次迭代方法是通过取

(4.10) $$Z_{T-1} = \max\{Y_{T-1}, \quad E_Q[Z_T B_{T-1} / B_T | \mathscr{F}_{T-1}]\}$$

来计算 Z_{T-1}。为了将来参考，注意到，取$\tau = T-1$ 将是最优的，当且仅当 $Z_{T-1} = Y_{T-1}$。现在 (4.7) 能重新写成

$$Z_{T-1}=\max\{Y_{T-1},E_Q[Y_T B_{T-1}/B_T \mid \mathscr{F}_{T-1}]\}$$

对于 $t=T-1$，所以把这与（4.7）比较，我们认为，对于 $t=T-1$，由（4.10）给出的 Z_{T-1}满足（4.7），此外，在（4.9）中对于 $t=T-1$，对于 $T-1$ 详细说明的停时使（4.7）右边最大化。

假设你计算出 Z_t，而且你知道这满足（4.7），还有（4.9）给出了时间 t 使（4.7）右边对于时间 t 最大化的停时。于是，由

$$Z_{t-1}=\max\{Y_{t-1},E_Q[Z_t B_{t-1}/B_t \mid \mathscr{F}_{t-1}]\} \tag{4.11}$$

给出的 Z_{t-1}对于 $t-1$ 而言将满足（4.7）。为了理解这一点，注意到，（4.7）对于时间 t 成立，这样，利用已经计算出来的 Z_{t-1}，我们有

(4.12)

$$\begin{aligned} Z_{t-1}&=\max\{Y_{t-1},E_Q[\max\{E_Q[Y_{\boldsymbol{\tau}}\ B_t/B_{\boldsymbol{\tau}} \mid \mathscr{F}_t]B_{t-1}/B_t \mid \mathscr{F}_{t-1}\}]\} \\ &\geqslant\max\{Y_{t-1},E_Q[E_Q[Y_{\boldsymbol{\tau}}\ B_i/B_t \mid \mathscr{F}_t]B_{t-1}/B_t \mid \mathscr{F}_{t-1}]\} \\ &=\max\{Y_{t-1},E_Q[Y_{\boldsymbol{\tau}}\ B_{t-1}/B_{\boldsymbol{\tau}} \mid \mathscr{F}_{t-1}]\} \end{aligned}$$

对于所有$\boldsymbol{\tau}\in\zeta(t,T)$。因而,已计算出来的 Z_{t-1}大于或者等于(4.7)的右边,对于时间 $t-1$。另一方面,取(4.9)中时间 $t-1$ 的停时,我们看到(4.12)成为等式。由此可见,已计算出来的 Z_{t-1}满足(4.7)对于时间 t,同时由(4.9)给出时间 $t-1$ 的停时是使(4.7)右边最大化的,对于时间 $t-1$。

因而,用数学归纳法,我们描述出计算满足(4.7)的过程 Z 的算法,还有我们验证了(4.9)给出使(4.7)右边达到最大值的停时。此算法是基于动态规划的,它具有简单的思想:如果以时间 $t-1$ 开始的最优执行策略要求连续至少一个时期以上,那么下一个时期你将使用以时间 t 开始的最优执行策略。

例 4.1(续) 以满足 $Z_2=Y_2$ 为开始,我们计算状态 ω_1 和 ω_2 的

$$E_Q[Z_2 \mid \mathscr{F}_1]=E_Q[Y_2 \mid \mathscr{F}_1]=\frac{2}{3}(4)+\frac{1}{3}(1)=3$$

129 因此,在这些同样的状态中 $Z_1=\max\{Y_1,E_Q[Z_2 \mid \mathscr{F}_1]\}=\max\{4,3\}=4$。类

似地，在状态 ω_3 和 ω_4 中，我们有 $E_Q[Z_2|\mathscr{F}_1]=1/3$ 和 $Z_1=\max\{0,1/3\}=1/3$。

对于下一个动态规划的迭代方法，也就是对于时间 0，我们有

$$E_Q[Z_1|\mathscr{F}_0]=E_QZ_1=\frac{1}{4}(4)+\frac{3}{4}(1/3)=1.25$$

在此情况下 $Z_0=\max\{Y_0,E_QZ_1\}=\max\{1,1.25\}=1.25$。注意 Z 是如图 4.3 中展示的。

考察(4.11)容易看出，$Z\geqslant Y$，同时 $Z_t\geqslant E_Q[Z_{t+1}B_t/B_{t+1}|\mathscr{F}_t]$对于 $t=0,1,\cdots,T-1$。从这个不等式得出，Z/B 是一个 Q-上鞅。注意到，例 4.1 中图 4.3 的价值过程 $Z=Z/B$（回想起 $B=1$）确实是 Q-上鞅。

现在，假设 U 是满足 $U\geqslant Y$ 的另一个过程，并使得 U/B 是一个 Q-上鞅。于是

$$\textbf{(4.13)}\quad U_{t-1}\geqslant\max\{Y_{t-1},E_Q[U_tB_{t-1}/B_t|\mathscr{F}_{t-1}]\},\quad t=1,\cdots,T$$

特别，$U_T\geqslant Y_T=Z_T$，这样选取对应于 $t=T$ 的（4.13），我们从（4.11）中了解到 $U_{t-1}\geqslant Z_{t-1}$。我们能够重复这种依时间倒推方法的讨论，直到我们最终获得结果 $U_0\geqslant Z_0$。这样，我们得出结论 Z/B 是使得 $Z\geqslant Y$ 的最小的 Q-上鞅。这完成了原理（4.6）的验证。

回想起，如果 X 是市销的，欧式期权时间 t 的价格 X 是由 $E_Q[XB_t/B_T|\mathscr{F}_t]$给出的；反之，如果 X 不是市销的，那么我们不能够正确地决定 X 的价格。对于美式期权存在着类似的情况。如果美式期权 Y 是市销的（下面不久将定义），那么其价格是由 Z_t 给出的，Z_t 如（4.6）中所发展的那样。另一方面，如果 Y 不是市销的，那么我们不能详细地确定其价格。

美式期权 Y 将是市销的（Marketable）或者可达的（Attainable），如果对于每一个停时$\boldsymbol{\tau}\leqslant T$，存在着一个自融资交易策略使得对应的投资组合价值 V 满足 $V_{\boldsymbol{\tau}}=Y_{\boldsymbol{\tau}}$。换句话说，如果人们能够复制（Replicate）形式 Y_τ 的权益，那么 Y 将是市销的，同时对应于 $V_\tau=Y_\tau$ 的交易策略称为复制（Replicating）或者对冲（Hedging）交易策略。这种市销性定义比必须的要强些，因为我们确实只需要担心形式（4.9）的停时。然而，这里采

用的方法是比较简单的，同时它具有能够在没有首先计算出美式期权的价值过程 Z 的条件下能够被检验的性质。

例 4.1（续） 对于如图 4.3 所示的美式期权，我们将仅仅检验形式为（4.9）的停时，也就是

$$\boldsymbol{\tau}(0)=\boldsymbol{\tau}(1)=\begin{cases}1, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ 2, & \omega=\omega_3,\omega_4\end{cases}$$

130 和$\boldsymbol{\tau}(2)(\omega)=2$，所有 $\omega\in\Omega$。现在 $Y_{\boldsymbol{\tau}(2)}=Y_2$ 与我们已研究过的欧式买入期权是相同的；我们知道 X 是市销的，所以存在一个交易策略使得 $V_{\boldsymbol{\tau}(t)}=Y_{\boldsymbol{\tau}(t)}$成立，对于 $t=2$。

由于$\boldsymbol{\tau}\equiv\boldsymbol{\tau}(0)=\boldsymbol{\tau}(1)$，我们有

$$Y_{\boldsymbol{\tau}}=\begin{cases}4, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ 1, & \omega=\omega_3\\ 0, & \omega=\omega_4\end{cases}$$

为了看到如果存在交易策略使得 $V_{\boldsymbol{\tau}(t)}=Y_{\boldsymbol{\tau}(t)}$成立对于时间 $t=0$ 和 1，我们依时间倒推以$\boldsymbol{\tau}$的最大值开始，企图计算出需要的交易策略：

$$\begin{aligned}H_0(2)+6H_1(2)&=Y_2(\omega_3)=1\\ H_0(2)+3H_1(2)&=Y_2(\omega_4)=0\end{aligned}$$

在状态 ω_3 和 ω_4，此解存在并且是$H_0(2)=-1$ 和 $H_1(2)=1/3$。由于交易策略必是自融资的，这蕴含着在同样的状态中 $V_1=1/3$。

对状态 ω_1 和 ω_2 而言，由于在这些状态里$\boldsymbol{\tau}=1$，所以求解$H_0(2)$和$H_1(2)$的值确实不成问题。剩下的所有问题是看是否存在着满足

$$\begin{aligned}H_0(1)+8H_1(1)&=Y_1(\omega_1)=Y_1(\omega_2)=4\\ H_0(1)+4H_1(1)&=V_1(\omega_3)=V_1(\omega_4)=1/3\end{aligned}$$

的$H_0(1)$和 $H_1(1)$的值。此解存在并且是 $H_0(1)=-10/3$ 和 $H_1(1)=11/$

12 。这样存在一个对于 t 满足 $V_{\boldsymbol{\tau}(t)}=Y_{\boldsymbol{\tau}(t)}$ 等于 0 和 1 的交易策略，在这种情况下，Y 是市销的美式期权。注意到，我们刚推导出的投资组合时间 0 的价值是 $-10/3+5(11/12)=5/4$ ，这与前面计算出的美式期权 Z_0 的价值是相同的。

(4.14) 假设存在一个风险中性概率测度 Q，过程 Z 如同（4.7）中的一样，并且美式期权 Y 是市销的，那么 Z 是 Y 的价值过程或者价格过程，并且最优的开始执行策略 $\boldsymbol{\tau}$（0）是由（4.9）给出的。

为了看出 Z 是 Y 的价格过程，人们能够运用类似于对欧式期权所运用的套利方法。为了简单起见，设 p 表示 Y 时间 0 的价格，并假设 $p>Z_0$。于是人们能以 p 美元来卖出期权，以 Z_0 的价值行使复制 $Y_{\boldsymbol{\tau}(0)}$ 的交易策略，且把差值 $p-Z_0$ 投资在银行账户上。稍后，如果买者执行期权在时间 $t\leqslant\boldsymbol{\tau}(0)$，那么你清偿了投资组合，收取 Z_t 美元且支付给期权买者 Y_t。由于 $Z_t\geqslant Y_t$，这些交易在执行时间中将仅仅增加你的利润，从而保证你自己从头到尾获得严格正的利润。

另一方面，假设期权买者到时间 $t=\boldsymbol{\tau}(0)$ 不执行，其中 $\boldsymbol{\tau}(0)<T$ 。于 131
是，你重复这个过程，以 $E_Q[Z_{t+1}B_t/B_{t+1}|\mathscr{F}_t]$ 的价值行使复制 $Y_{\boldsymbol{\tau}(t)}$ 的交易策略，而利用动态规划关系式（4.11）$E_Q[Z_{t+1}B_t/B_{t+1}|\mathscr{F}_t]$ 小于或等于 $Z_t=Y_t$。如前所述，如果期权买者在某一时间 $s\leqslant\boldsymbol{\tau}(t)$ 执行，那么此投资组合的价值将足够抵偿损益 Y_s。如果买者到时间 $\boldsymbol{\tau}(t)$ 还不执行，那么你再一次地重复这样的过程。底线：在你的投资组合中你将总是具有足够多的资金来抵偿损益，同时你从头到尾的利润将至少是 $p-Z_0>0$。

对于相反的情况，假设期权在时间 0 的价格满足 $p<Z_0$。于是，你以 p 美元买入期权，你行使卖出复制交易策略，从而收取 Z_0 美元，同时你把差额 Z_0-p 投资于银行账户。稍后你在时间 $\boldsymbol{\tau}(0)$ 执行期权，同时你清偿复制的投资组合。由于 $V_{\boldsymbol{\tau}(0)}=Y_{\boldsymbol{\tau}(0)}$，所以你从期权卖者手中收取的数额确实等于你投资组合的负债。与此同时，你在银行账户上有（Z_0-p）$B_{\boldsymbol{\tau}(0)}>0$。

因而，如果 $p\neq Z_0$，那么将存在套利机会，这样 Z_0 必是美式期权 Y 在时间 0 的价格。此外，对期权买者的最优执行策略是由（4.9）给出的，因为任何其他策略当 $Z_t(\omega)>Y_t(\omega)$ 时促成了执行的风险，其意味着期权买者愚蠢地牺牲了数额 $Z_t(\omega)-Y_t(\omega)>0$ 。类似的讨论将验证 Z_t 是此期

权时间 t 的价格，同时（4.9）也给出了当 $t>0$ 时在时间 t 开始的最优执行策略。

现在我们转入到一个新的问题上：在什么情况下美式期权的买者不应该开头就执行呢？原理（4.6）给出对$\boldsymbol{\tau}=T$ 的一个充分条件作为最优的执行策略。一个适应随机过程$Z=\{Z_t:\ t=0,\ 1,\ \cdots,\ T\}$ 称之为是下鞅的（Submartingale）（参见 3.3 节），如果

$$E[Z_t|\mathscr{F}_s]\geqslant Z_s,\qquad \text{所有 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$$

也就是如果 $-Z$ 是一个上鞅。这个定义允许人们叙述另一个充分条件。

(4.15) 如果 Y 是市销的美式期权，并且 Y/B 是一个 Q-下鞅，那么$\boldsymbol{\tau}=T$ 总是一个最优执行策略，同时，这个美式期权的价格与欧式期权的价格相同 $X=Y_T$。

为了理解这点，我们需要任意抽样定理（Optional Sampling Theorem），* * 其内容表明如果 Y/B 是一个 Q-下鞅，那么$E_Q[Y_{\boldsymbol{\tau}}/B_{\boldsymbol{\tau}}]\leqslant E_Q[Y_T/B_T]$，对于所有停时$\boldsymbol{\tau}\leqslant T$。因此，利用满足 $t=0$ 的（4.7）我们有 $Z_0=E_Q[Y_T/B_T]$，我们把其理解为欧式期权的价格 $X=Y_T$。

原理（4.15）提供有时用来检验美式期权价值和欧式期权价值是否一致的方便条件。例如，我们有下面的内容。

132 **(4.16)** 在非负利率和不支付股息的现实世界中，对单个风险证券签订的美式买入期权不应该开始就执行。

为了理解这点，有必要验证 $(S_t-e)^+/B_t=(S_t/B_t-e/B_t)^+$ 是一个 Q-下鞅，这里通过对任意的 s，$t\geqslant 0$ 证明

$$(S_t/B_t-e/B_t)^+\leqslant E_Q[(S_{t+s}/B_{t+s}-e/B_{t+s})^+|\mathscr{F}_t]$$

首先，我们有

$$E_Q[(S_{t+s}/B_{t+s}-e/B_{t+s})^+|\mathscr{F}_t]\geqslant E_Q[(S_{t+s}/B_{t+s}-e/B_{t+s})|\mathscr{F}_t]$$
$$=E_Q[S_{t+s}/B_{t+s}|\mathscr{F}_t]-eE_Q[1/B_{t+s}|\mathscr{F}_t]=S_t/B_t-e/E_Q[1/B_{t+s}|\mathscr{F}_t].$$

其中，最后等式成立原因在于 S/B 是一个 Q-鞅。但是 $B_{t+s}\geqslant B_t$，所以 $1/B_t\geqslant 1/B_{t+s}$，从而

$$E_Q[(S_{t+s}/B_{t+s}-e/B_{t+s})^+|\mathscr{F}_t]\geqslant S_t/B_t-eE_Q[1/B_t|\mathscr{F}_t]=S_t/B_t-e/B_t$$

最后，由于 $E_Q[(S_{t+s}/B_{t+s}-e/B_{t+s})^+|\mathscr{F}_t]\geqslant 0$，由此可得 $E_Q[(S_{t+s}/B_{t+s}-e/B_{t+s})^+|\mathscr{F}_t]\geqslant \max\{0, S_t/B_t-e/B_t\}$，这确实是我们所想要证明的内容。

应该特别强调的是，这种（4.16）验证的关键部分是要求折现证券价格 S/B 是一个 Q-鞅。如果风险证券支付股息，那么这个证券不支付股息的折现价格不一定是一个 Q-鞅，在此情况下，基于不支付股息的美式买入期权比对应的欧式期权更值钱。

习题 4.8 对于例 4.1 中满足 $r=0$ 的模型，执行价格 $e=6$ 的美式卖出期权在时间 0 的价格是多少？开始执行是最优的吗？如果是这样的话，什么时候是最优的？如果你在时间 0 时卖出它，你如何套期保值这个期权呢？

习题 4.9 考察二项式股票价格模型，满足 $T=4$，$S_0=20$，$u=1.2214$ 和 $d=0.8187=u^{-1}$。利率是 $r=3.82\%$。具有执行价格 $e=18$ 的美式卖出期权在时间 0 的价格是多少？开始执行是最优的吗？如果是这样的话，什么时候是最优的？

习题 4.10 证明如果 $M=\{M_t: t=0, \cdots, T\}$ 是一个上鞅，那么对于满足 $t\leqslant\tau\leqslant T$ 的所有停时τ有$E[M_\tau|\mathscr{F}_t]\leqslant M_t$。

习题 4.11 假设美式期权 $Y_t=g(S_t)$，其中 g 是满足$g(0)=0$ 的凸函数。设利率是满足 $r\geqslant 0$ 的常数。证明$\tau=T$ 是最优执行策略（提示：运用（4.15）和 Jensen 不等式（Jensen Inequality），Jensen 不等式的内容是说，对任意凸函数 g、任意的随机变量 X 和任意的代数 $\mathscr{F}$，有$g(E[X|\mathscr{F}])\leqslant E[g(X)\mathscr{F}]$）。

习题 4.12 假设 b 是一个正的常数，并且利率是非负的。证明 $-b/B_t$ 是

133 一个 Q-下鞅。如果$M_1(t),\cdots,M_J(t)$是一个 Q-下鞅且 m_1，$\cdots$，m_J 是正的纯量，那么证明 $m_1M_1+\cdots+m_JM_J$ 是一个 Q-下鞅。因此，对形式为

$$Y_t=m_0S_t+m_1(S_1-e_1)^++\cdots+m_J(S_J-e_J)^+-b$$

的美式期权，其中 $m_1\geqslant0$，$\cdots$，$m_J\geqslant0$ 和 $b\geqslant0$（但是 m_0 能是负的），证明开始执行不是最优的。

4.4 完全市场与不完全市场

为了对未定权益 X 定价，你肯定会担心它是否是市销的，换句话说，是否存在一个自融资交易策略使得 $V_T=X$。在这点上，情况几乎与单时期模型相同。这节将解释单时期模型的结果如何推广到多时期模型，同时指出对市销的美式期权新问题应特别注意之处。当然，本节自始至终地假设存在一个风险中性概率测度 Q。

一个模型称为是完全的（Complete），如果每一个未定权益是市销的；否则，模型称为是不完全的（Incomplete）。对于单时期模型来说，我们说完全性存在着两个特性：（1.22），即某一个矩阵记作 A，其独立向量数目等于 A 中的状态数；或者（1.24）风险中性概率是惟一的。这两个特征能够通过把多时期模型分解成单时期模型的网格形式来推广到多时期模型上，其中网格形式如 3.3 节中所做的那样。特别，考虑相对应的多时期模型的信息树，在这个网格的每一个结点上具有一个基本单时期模型。

如果多时期模型是完全的，那么对任意一个未定权益 X，你总能够利用依时间倒推计算出生成 X 的交易策略，如同 4.1 节中所解释的一样。这意味着每一个基本单时期模型的矩阵 A 必有所需要的独立列向量数，否则计算上的程序会失败。这样，每一个基本单时期模型必是完全的。反之，如果每一个基本单时期模型是完全的，那么多时期模型的计算程序总是成功的，从而我们有下面的结果。

(4.17) 一个多时期模型是完全的，当且仅当其每一个基本单时期模型是完全的。

特别，多时期模型是完全的，当且仅当相对应的每一个基本单时期模型的矩阵 A 具有所需要的独立列向量数。现在（1.22）的这一推广显得有些粗糙，并显出不切实际的特征，所以没有对此推广加以强调。

另一方面，（1.24）的推广显得相当精致。每一个基本单时期模型是 134
完全的当且仅当每一个基本单时期模型具有惟一的风险中性“条件”概率测度。鉴于3.3节中所发展起来的多时期模型的风险中性概率测度的构造法，每一个基本单时期模型具有惟一的风险中性“条件”概率测度当且仅当多时期模型的风险中性概率测度是惟一的。因此，我们有下面的结果。

（4.18） 多时期模型是完全的，当且仅当其风险中性概率测度 Q 是惟一的。

例 4.1（续） 这一模型是完全的，因为风险中性概率测度是惟一的。

例 4.4（续） 这个模型是完全的，因为风险中性概率测度是惟一的。

例 4.9（续） 在4.2节中研究过的二项式模型是完全的，因为风险中性概率测度是惟一的。

因此，在不完全模型中至少存在两个以至多个风险中性概率测度。如果 X 是不完全模型中可达的未定权益，那么它在时间0的价格将等于生成 X 的交易策略 V_0。由于 $V_0 = E_Q[X/B_T]$ 对于每一个风险中性概率测度 Q，所以我们认为对于市销的未定权益 $E_Q[X/B_T]$ 这个量在风险中性概率测度上是一个常数，就是说在所有 $Q \in \mathbb{M}$ 上是一个常数。

为了证明其逆，有必要假设未定权益 X 不是可达的，而且证明 $E_Q[X/B_T]$ 不取相同的值，对于所有 $Q \in \mathbb{M}$。论证将仅仅是概略性的。此外，考虑到基本单时期模型的网格形式，假设你企图通过采用依时间倒推计算出复制的交易策略。这种方法在某一个单时期模型中会失效。如在1.5节中所看到的，这意味着对于单时期模型给出不同的条件期望 X/B_T 时，至少存在两套风险中性“条件”概率。由此可得，至少存在两套给出不同值 $E_Q[X/B_T]$ 的鞅测度 Q。

概括地讲，我们有下面的既对完全模型又对不完全模型的（1.23）的推广。

（4.19） 未定权益 X 是可达的，当且仅当 $E_Q[X/B_T]$ 取相同的值，对于每一个

$Q \in \mathbb{M}$。

转向美式期权，幸亏存在着下面的结果。

(4.20) 如果模型是完全的，那么每一个美式期权是市销的。

135 为了理解这点，有必要取一个任意非负的适应过程 Y 和一个任意停时τ，并证明存在一个自融资交易策略，使得 $V_\tau = Y_\tau$。为此目的，我们使用一个技巧：我们考察一个交易策略比如说 $\hat{H}$，其在时间τ以 Y_τ美元开始，把其放进银行账户且储蓄到时间 T。在这样的策略下，在时间 T 将有 $Y_\tau B_T/B_\tau$美元。与此同时，模型是完全的，我们知道存在一个交易策略比如说 H，其在时间 0 开始并且满足 $V_T = Y_\tau B_T/B_\tau$。由于这两个投资组合在时间 T 的价值是相同的，所以我们认为这两个投资组合在 H 和$\hat{H}$ 下的时间τ价值必是一致的，即 $V_\tau = \hat{V}_\tau = Y_\tau$。因此 H 是我们所寻找的策略。

如果模型是不完全的，那么任意的美式期权可能是市销的，也可能不是市销的。考虑到 (4.19) 和前面一段的内容，我们有下面的结果。

(4.21) 美式期权 Y 是可达的，当且仅当对于 (4.9) 中的每一个停时τ，$E_Q[Y_\tau/B_\tau]$ 取相同的值，对于所有 $Q \in \mathbb{M}$。

可惜的是，这个条件在特殊情况下不容易检验。

例 4.10 假设 $K=5$，$N=1$，$T=2$，$r=0$，域流 $\mathscr{F}_t$ 是由价格过程S生成的，同时 S 如下表示：

ω	S_0	S_1	S_2	Q
ω_1	5	8	9	$q/4$
ω_2	5	8	7	$(2-3q)/4$
ω_3	5	8	6	$(2q-1)/4$
ω_4	5	4	6	$1/4$
ω_5	5	4	3	$1/2$

鞅测度 Q 是可计算出的，并且表示在此表中；这里 q 是任何一个满足 $1/2 < q < 2/3$的纯量。这个模型不是完全的，因为鞅测度不是惟一的。

未定权益 X 是市销的，当且仅当

$$E_q X = [qX_1 + (2-3q)X_2 + (2q-1)X_3 + X_4 + 2X_5]/4$$

$$= q[X_1 - 3X_2 + 2X_3]/4 + X_2/2 - X_3/4 + X_4/4 + X_5/2$$

相对于 q 而言是常数，其中 X_i 表示$X(\omega_i)$。因此未定权益 X 是市销的，当且仅当

$$X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 0$$

为检验美式期权 Y 是否是市销的，我们当然需要检验这一方程是否满足于 $X = Y_2$。另外，我们需要对于相关的停时τ检验 $E_q Y_\tau$是否相对于 q 而言为常数。仅存在着两个有意思的停时：$\tau_a \equiv 1_{\{S_1=8\}} + 2\cdot 1_{\{S_1=4\}}$或者 136
$\tau_b \equiv 2\cdot 1_{\{S_1=8\}} + 1_{\{S_1=4\}}$。应用（4.21），我们计算出

$$E_q Y_{\tau_a} = Y_1(\omega_1)/4 + Y_2(\omega_4)/4 + Y_2(\omega_5)/2$$

(回想起 Y 是适应的，所以 $Y_1(\omega_1) = Y_1(\omega_2) = Y_1(\omega_3)$)。这相对于 q 而言显然是常数。类似地，我们计算出

$$\begin{aligned} E_q Y_{\tau_b} &= Y_2(\omega_1)q/4 + Y_2(\omega_2)(2-3q)/4 + Y_2(\omega_3)(2q-1)/4 + 3Y_1(\omega_4)/4 \\ &= \frac{q}{4}[Y_2(\omega_1) - 3Y_2(\omega_2) + 2Y_2(\omega_3)] + Y_2(\omega_2)/2 - Y_2(\omega_3)/4 + \\ &\quad 3Y_1(\omega_4)/4 \end{aligned}$$

促使这相对于 q 而言是常数的条件导致了如前所述相同的要求：美式期权 Y 是市销的，当且仅当 $X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 0$ 满足于 $X = Y_2$，换句话说，当且仅当欧式期权 $X = Y_2$ 是市销的。

习题 4.13　考察例4.10中的模型。执行价格 e 为多少才能使买入期权市销？执行价格 e 为多少才能使卖出期权市销？

4.5 远期价格与现金流估值

假设你在时间 t 同意在时间 $\boldsymbol{T}$ 获得一种证券，为此在时间 $\boldsymbol{T}$ 支付你在时间 t 协商好的一定数目资金。或者假设你要购买未来收入的现金流来交换你在时间 t 的支付。如同这节将要讨论的那样，这些衍生证券的价格能够利用套利定价理论来估值。

事实上，如果它们能够用交易策略来复制，那么这些衍生证券能够刚好被估值，这样，为解释方便起见，本节自始至终假设证券市场模型是完全的。

首先，考察由在时间 s 接收 ΔD_s 美元构成的现金流，其中 $t<s\leqslant T$。这正是一个时间 s 的未定权益，所以它在时间 t 的价值是$E_Q[\Delta D_s B_t/B_s|\mathscr{F}_t]$。如果 ΔD_s 是确定的（甚至是 $\mathscr{F}_t$ 可测的），那么这简化成 $\Delta D_s E_Q[B_t/B_s|\mathscr{F}_t]$。另外，如果利率 $r\geqslant 0$ 是常数，那么这进一步地简化成 $\Delta D_s(1+r)^{t-s}$。所有这些表达式常常称为时间 t 的 ΔD_s 现值。

其次，考察现金流 ΔD_{t+1}，…，$\Delta D_{\boldsymbol{T}}$。例如，这些收入是与单位证券 S 相联系的一些股息。由于前面一段的内容，所以这个现金流的时间 t 的现值简单地是

$$\sum_{s=t+1}^{\boldsymbol{T}} E_Q[\Delta D_s B_t/B_s \mid \mathscr{F}_t]$$

在这一现金流产生于与证券 S 相联系的股息过程 D 的特殊情况下，由(3.28) 可得此现金流的时间 t 的现值是

137

$$S_t - E_Q[S_{\boldsymbol{T}} B_t/B_{\boldsymbol{T}}|\mathscr{F}_t]$$

这些现值表达式在金融学中，尤其在利率为常数时是十分重要的。

有时两个交易者每一个都有一个现金流，而这些现金流具有相同的时间 t 的现值，尽管它们在不同的未来时间里拥有不同的收入。在这样情况下，这两个交易者会发现交易他们的现金流是有益的。这样的交易称为互换（Swap）。当两种现金流的时间 t 的现值不一样的时候，互换仍是可进行的，只不过通过一个交易者在时间 t 支付给另一个交易者数额等于两个

时间 t 的现值之间差值来进行。

转到远期价格专题上，假设在时间 t 你同意从经纪人那里购买一个单位证券 S。在时间 t 没有资金和证券进行交易，但是你在时间 t 达成的协议规定：你在未来时间τ，$t<\tau\leqslant T$，将获得一个单位证券 S，同时将支付给你的经纪人 O_t 美元［注意：记号“O”来自于远期（fOrward)］。问题是：存在着远期价格 O_t 的正确价值吗？

当认识到对这个问题的答案为对时，人们不会觉得惊讶。其思想是认识到持有远期协议加上时间τ的 O_t 美元等于在同时持有一个单位证券 S。说得更明确些，第一个策略是你在时间 t 达成一个远期协议，同时你复制一个在时间τ支付 O_t 美元的未定权益，以及你在时间τ通过支付 O_t 美元且收到证券来完成远期协议。复制 O_t 的时间 t 时成本只是 O_t 的现值，即

$$E_Q[O_tB_t/B_\tau|\mathscr{F}_t]=O_tE_Q[B_t/B_\tau|\mathscr{F}_t]$$

第二个策略是时间τ时的价值值 S_τ，同时它在时间 t 的现值就是 S_t（利用鞅测度 Q 的定义）。但是，第一个策略在时间τ时也值 S_τ，所以利用一价定律，这两个策略在时间 t 的现值必是相等的，也就是 $S_t=O_tE_Q[B_t/B_\tau|\mathscr{F}_t]$。换句话说，我们有下面的结果。

(4.22) 证券 S 作为在时间$\tau>t$ 是可获得的和支付的，*** 同时不支付股息，这样的证券 S 在时间 t 的远期价格 O_t 是

$$O_t=\frac{S_t}{E_Q[B_t/B_\tau|\mathscr{F}_t]}$$

值得指出的是，如果证券 S 支付股息，那么远期价格的这个表达式不一定成立。这是因为（4.22）是借助于假设 S/B 是一个 Q-鞅推导出的，当证券支付股息时假设是错误的。然而，原理（4.22）能够很容易地推广到支付股息的证券情况上。

为推导出推广的结果，我们需要策划和定价所生成时间τ的未定权益等于 S_τ的交易策略。这就是：

- 在时间 t 通过支付 S_t 购买一个单位的证券。 138
- 在时间 t 通过对生成时间 $t+1$ 的收入 ΔD_{t+1}的交易策略采取反向操

作借入$E_Q[\Delta D_{t+1}B_t/B_{t+1}|\mathscr{F}_t]$ 美元。然后，在时间 $t+1$ 用股息支付 ΔD_{t+1}偿还在这个策略下的负债。

在时间 t 通过对生成时间$\boldsymbol{\tau}$的收入 $\Delta D_{\boldsymbol{\tau}}$的交易策略采取反向操作借入 $E_Q[\Delta D_{\boldsymbol{\tau}}\ B_t/B_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]$ 美元。然后，在时间$\boldsymbol{\tau}$用股息支付 $\Delta D_{\boldsymbol{\tau}}$偿还在这个策略下的负债。

这个复制投资组合时间 t 的价值必是

$$S_t - \sum_{s=t+1}^{\boldsymbol{\tau}} E_Q[\Delta D_s B_t/B_s|\mathscr{F}_t]$$

令时间$\boldsymbol{\tau}$收入 $O_{\boldsymbol{\tau}}$的时间 t 的现值与这一价值相等，我们得到下面的结果。

(4.23) 证券 S 在时间$\boldsymbol{\tau}>t$ 是可获得的和支付的，同时具有股息过程 D，这样的证券 S 在时间 t 的远期价格 O_t 是

$$O_t = \frac{S_t}{E_Q[B_t/B_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]} - \sum_{s=t+1}^{\boldsymbol{\tau}} \frac{E_Q[\Delta D_s B_t/B_s|\mathscr{F}_t]}{E_Q[B_t/B_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]}$$

有时远期价格是与不能分类为证券的资产相联系的，因为卖空它们是不可能的。例如，相当多数的农业商品，诸如活猪、以蒲式耳为度量单位的玉米和大捆棉花都不能够被卖空，或许因为不存在着从农场主借入这些物质商品的市场。因此，通常的套利方法失败，同时人们不能确定这些资产的折现现金［或者现货（Spot）］价格在任何概率测度下是否是一个鞅。

对于许多这样的资产来讲，假设你愿意支付每时期每单位的 c 美元携带成本（Carry Cost，或称为运输成本）（这大概是存贮费用），那么购买它们是适宜的。这有点像支付股息的证券，仅仅是股息过程满足 $\Delta D_t = -c$，对于所有 t。

设 A_t 表示这种资产在时间 t 的现金价格，$t=0, 1, \cdots, T$。与这种资产相联系的套利机会（Arbitrage Opportunity）能够像对证券一样明确地定义出来，只是人们必须增加这种资产上的头寸 H_1 必是非负的规定。回想起与普通证券相联系的经济原理，我们认识到对这种资产的套利机会将存在，如果我们能够找到某一个时间 t 和某一个事件 $E\in\mathscr{F}_t$，使得

$$A_t(\omega)/B_t(\omega) \leqslant (A_{t+1}(\omega) - c)/B_{t+1}(\omega), \quad \text{所有 } \omega \in E$$

此不等式至少对于一个 $\omega \in E$ 严格成立。如果事件 E 发生，那么我们用从银行借入的资金来购买此资产，并在下一个时期我们在所有 $\omega \in E$，而 139
且至少有一个这样的 ω 成为严格正的情况下，用非负的净利润来进行支付。由此可见，如果存在一个严格正的概率测度 Q 使得

$$\textbf{(4.24)} \quad A_t/B_t \geqslant E_Q[(A_{t+1} - c)/B_{t+1} | \mathscr{F}_t], \quad t = 0, 1, \cdots, T-1$$

那么这种套利机会不能够产生。

另一方面，不存在着使不等式（4.24）成立的经济机制，对于某一个 ω 和某一个 t。如果这个资产 $A = \{A_t: t = 0, 1, \cdots, T\}$ 确实是一种证券，那么借助于每个严格正的概率测度所给出的严格不等式会表明一个具有相关交易策略需要此证券的一个空头头寸的套利机会。要不是不能卖空我们的资产，那么（4.24）中严格不等式就是无关紧要的，因为涉及卖空头寸的交易策略是不能容许的，从而不是一个套利机会。因此，我简要地给出下面的解释。

(4.25) 如果市场模型包括有不能卖空的现金价格 $A = \{A_t: t = 0, \cdots, T\}$ 的资产，且具有每时期每单位携带成本 c，那么存在无套利机会，当且仅当存在一种严格正的概率测度 Q，使得所有折现证券都是一个 Q-鞅，且使得（4.24）成立。

现在，假设存在基于在时间 $\boldsymbol{\tau}$ 支付的这种资产 A 的远期价格。如果这种资产确实是一种证券，那么由（4.23）我们有

$$\textbf{(4.26)} \qquad O_t = \frac{A_t}{E_Q[B_t/B_{\boldsymbol{\tau}} | \mathscr{F}_t]} + c \sum_{s=t+1}^{\boldsymbol{\tau}} \frac{E_Q[B_t/B_s | \mathscr{F}_t]}{E_Q[B_t/B_{\boldsymbol{\tau}} | \mathscr{F}_t]}$$

然而，如果这种资产不能卖空，那么一价定律不成立。特别，如果远期价格 O_t 严格小于（4.26）的右边，那么以远期价格 O_t 购买时间 $\boldsymbol{\tau}$ 交割的资产是人们所期望的，而同时对生成 $A_{\boldsymbol{\tau}}$ 的交易策略采取反向操作。但是，这样做行不通，因为卖空这种资产是不行的。不存在着使远期价格 O_t 严

格小于（4.26）右边成立的经济机制。

另一方面，如果远期价格 O_t 是严格大于（4.26）的右边，那么以远期价格 O_t 卖出在时间$\mathcal{T}$交割的资产，且同时实施生成 $A_{\mathcal{T}}$的交易策略。这样做行得通，所以这是一个套利机会。这能概括总结如下。

(4.27) 假设存在着满足不能够卖空的，并且具有每时期每单位的携带成本 c 的现金价格 $A=\{A_t:\ t=0,\ 1,\ \cdots,\ T\}$ 的资产。这种资产在时间$\mathcal{T}>t$ 作为可获得的和支付的在时间 t 的远期价格，其满足

$$O_t \leqslant \frac{A_t}{E_Q[B_t/B_{\mathcal{T}} \mid \mathscr{F}_t]} + c\sum_{s=t+1}^{\mathcal{T}} \frac{E_Q[B_t/B_s \mid \mathscr{F}_t]}{E_Q[B_t/B_{\mathcal{T}} \mid \mathscr{F}_t]}$$

---

140 **习题 4.14** 考察满足 $\Omega=\{\omega_1,\ \cdots,\ \omega_4\}$ 的两个时期模型，并且资产满足在时间 0 的价格 $A_0=100$。

(a) 如果银行账户过程依据 $B_t=(1.05)^t$ 是确定的，对于 $t=0,\ 1,\ 2$，并且如果资产能够卖空，那么对于在时间 2 交割的资产在时间 0 的远期价格 O_0 是多少？

(b) 如果银行账户过程满足 $B_1=(1.05)$，$B_2(\omega_1)=B_2(\omega_2)=1.12$ 和 $B_2(\omega_3)=B_2(\omega_4)=1.10$ 是随机的，并且如果资产能够卖空，那么对于在时间 2 交割的资产在时间 0 的远期价格 O_0 是多少？给出用 $Q(\{\omega_1,\ \omega_2\})$ 表示的表达式。

(c) 如果银行账户过程如同在（b）中的那样是随机的，并且如果资产不能卖空，那么与无套利相一致的对于时间 2 交割的资产在时间 0 的价格 O_0 最大值是多少？

(d) 与（c）部分相同，现在惟一不同的是资产具有每时期每单位 5 美元的携带成本。

4.6 期　　货

期货定价颇像远期定价，因为它们两个都是基于证券的现金价格或者资产在某一固定的、未来某一时点上的价格。特别，在时间$\mathcal{T}$时关于时间$\mathcal{T}$交割的远期价格和期货价格都等于标的现金价格。然而，存在着能引起

两种价格不一样的细微差异。

期货价格是与基于有组织的交易所中达成交易的期货合约相联系的。例如，投机者能够购买在 7 月份交割的 5000 蒲式耳小麦的合约。价格是在交易时刻上建立的，然后在其他买者和卖者之间发生另外的交易，投机者所购买的合约价值将依照接连发生的交易价格而波动。此外，投机者能在交割之前的任何时间上，通过在交易所中做反向交易来结束头寸，从而基于在两个交易时间上的期货价格之间的差产生一个净利润。因此，就期货合约来说，在规定的交割时间之前存在着能带来“产生现金”（Cashed Out）的套利机会。

与之相对比，远期合约的头寸必须持有到真实交割的时间。这是因为远期合约是在两个特定的个体之间或交易者之间达成的，而且即使这些交易者之一所持有的头寸在交割时间之前将其出售给第三个交易者也不能够终止。因此，能表现出的惟一的套利机会是那样的，即一旦远期头寸被建立起来，就以恒定的方式持有到交割时间。

正像远期那样，对于每一个期货合约的买者存在着一个卖者，说得更精确些，存在一个“承诺在规定的未来时间上交割一个指定的资产数量”的交易者。这句话是一个引语，因为通常卖者会在交割时间之前就结束买卖他或她的头寸，同时一些期货合约简直被“交割”时间的标的现金价格 141
所束缚，没有真实交割发生的可能性。

期货合约的重要特征是买者和卖者在交易所中存入保证金或抵押金。这就确保了买者或卖者不能从损失头寸中轻易地违约。交易者保证金账户上的资金数量将连续地随着后续期货价格的波动而波动。例如，7 月份 5000 蒲式耳小麦合约的期货价格下降了每蒲式耳 10 美分，那么这份合约的买者将从他或她的保证金账户上提取出 500 美元。用这种方法，由期货交易中累积起来的净利润被连续地反映出来，直到头寸被抛售为止。

期货交易者不能借入资金，继而为了买卖期货合约把作为结果的资金存放到保证金账户上。同时如果保证金账户被用尽，那么交易所将要求存入更多的资金或者结束买卖交易者的期货头寸。因此，期货合约交易者总是拥有正的财富，而具有零或者负的财富交易者不能买卖期货合约。

期货交易者可以使用证券作为保证金账户上的抵押金。例如，交易者能以银行账户上所赚得的利息作担保。因而，拥有正财富的投资组合交易者能够简单地借助于这个投资组合的部分或者全部作为保证金要求的抵押金来进行买卖期货。从而，这种交易者不使用任何专门用于期货合约的额

外资金也能够买卖期货合约。为了购买证券，你必须提供现金，但是你购买期货合约则随意。

为了更精确地实施这些思想，并理解其结果，我们采用通常的证券市场模型，并添加上一个或多个期货价格过程。设 U_t（或者 $U_j(t), j=1, \cdots, J$）[记号"U"来自于期货（fUtures)] 表示在时间$\tau \leqslant T$（或者分别为τ_j）交割的关于证券或资金的时间 t 时的期货价格。约定 $U_j(\tau_j)=S_j(\tau_j)$是合适的，对于 $j=1$，…，J。但是在有些情况下，期货市场模型会包括一个或多个以此种方式不被特定证券所束缚的期货价格过程。例如，证券能够是股票，而 U_t 能是 5 月份玉米期货价格。

除了通常交易证券的策略之外，设可料过程 $\hat{H}_t$（或者 $\hat{H}_j(t)$）表示从时间 $t-1$ 到时间 t 持有期货合约 U（或者分别为 U_j）的头寸。自然，如果期货合约 U_j 在时间$\tau_j < T$ 到期，那么 $\hat{H}_j(t)=0$ 是必须的，对于所有 $t>\tau_j$。所有交易策略将是一个可料的、形式为向量值的过程（H, $\hat{H}$）=（H_0, H_1, …, H_N, $\hat{H}_1$, …, $\hat{H}_J$）。

在时间 t 时，仅在任何时间 t 交易之后，当没有期货合约交易发生时投资组合的价值与前面所述的相同，也就是

$$H_0(t+1)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)S_n(t)$$

142 然而，仅仅在任何时间 t 交易之前的投资组合的价值 V_t 将是不一样的，因为它将等于银行账户上的资金与证券（如同没有期货那样）加上前一个时期买卖期货所导致的净利润。换句话说，

$$V_t = H_0(t)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t)S_n(t) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(t)\Delta U_j(t), \quad t > 0$$

我们设

$$V_0 = H_0(1)B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(0)$$

表示投资组合通常在时间 0 的价值。

在我们的期货市场模型中交易策略（H，$\hat{H}$）称为自融资的（Self-financing），如果在时间 0 和 T 之间没有资金用于消费或者从外部资金添加到投资组合中，说得更精确些，如果

$$V_t = H_0(t+1)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)S_n(t), \quad t = 1,\cdots,T-1$$

我们的目的是用期货的标的证券价格推导出期货价格的显性关系式。如果假设存在无套利机会，那么我们就能这样做。由于期货交易必须具有正的财富，所以我们不能继续如同普通证券市场模型那样，并把套利机会定义为开始 $V_0=0$ 的交易策略来讨论。但是，思想是相同的；我们将仅仅把开始点转变为正的初始财富水平。在我们的期货市场模型中自融资交易策略称为套利机会（Arbitrage Opportunity），如果

(a) $V_T(\omega) \geqslant V_0 B_T(\omega)$，所有 ω

(b) $V_T(\omega) > V_0 B_T(\omega)$，某一个 ω

这样，套利机会将不比把你的所有资金存入到银行账户上差，同时存在着比所有资金存入到银行账户上严格好的可能性。

正如普通证券市场模型一样，我们能够把多时期的期货市场模型分解成许多单时期模型的网格形式，满足一个单时期模型对应于域流的信息树子模型中的每一个结点。由此可得，对于多时期模型而言，套利机会存在当且仅当对于一个或者多个单时期模型存在着套利机会。因此，我们首先通过研究单时期的期货市场就能知道多时期期货市场的情况。

我们通过对 V_1 与 $V_0(B_1/B_0)$ 的比较开始：

$$V_1 \geqslant V_0(B_1/B_0) \Longleftrightarrow$$

$$H_0(1)B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)$$

$$\geqslant [H_0(1)B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(0)](B_1/B_0) \Longleftrightarrow$$ 143

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1) \geqslant B_1 \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n(0)/B_0 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n^*(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)/B_1 \geqslant \sum_{n=1}^{N} H_n(1)S_n^*(0) \Longleftrightarrow$$

$$(4.28)\qquad \sum_{n=1}^{N} H_n(1)\Delta S_n^*(1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(1)\Delta U_j(1)/B_1 \geqslant 0$$

注意到，第一个不等式是严格成立的对于一个或者多个状态 ω，当且仅当不等式（4.28）是严格成立的。于是，（H，$\hat{H}$）是单时期模型的一个套利机会，当且仅当（4.28）成立，且满足对于一个或者多个 $\omega\in\Omega$ 不等式严格成立。

通过考察（4.28），我们看到数量 $\Delta U_j(1)/B_1$ 担当的作用与数量 $\Delta S_n^*(1)$的作用一样。一旦我们知道对传统的单时期模型所做的有效讨论后，我们就得出下面的结论：

（4.29） 在单时期的期货市场模型里存在无套利机会，当且仅当存在着一种严格正的概率测度 Q，使得$S_n^*(0)=E_Q[S_n^*(1)]$，$n=1$，…，N，以及$U_j(0)=E_Q[U_j(1)/B_1]/E_Q[1/B_1]$，$j=1$，…，$J$。如果利率 $r=(B_1-B_0)/B_0$ 是一个常数，那么这个最后方程可简化成 $U_j(0)=E_QU_j(1)$。

现在（4.29）能够被认为是对风险中性概率测度的要求。已知银行账户、证券和期货价格，它给出了存在无套利机会的 Q 必须满足的要求。注意到，某一个时间τ_j 对$U_j(\tau_j)=S_j(\tau_j)$ 的要求没有被使用上；我们仅利用了期货交易的交易规则。因此（4.29）能够应用于到期时间τ超过一个时期的情况（或者甚至对期货价格是基于资产不为证券的或者基于证券不为证券模型的组成部分的情况）。

如其不然，人们能够以无套利证券市场模型来开始，并且希望添加以这些证券为根据的期货价格。就单时期模型来说，人们会知道 Q（这来源于初始证券市场模型）以及 $U_j(1)=S_j(1)$的事实，所以人们利用（4.29）及$S_j(0)=E_Q[S_j(1)/B_1]$的事实得出结论

$$(4.30)\qquad U_j(0)=\frac{S_j(0)}{E_Q[1/B_1]}$$

例 4.11 考察满足 $N=1$，$K=2$，$S_0=5$，$S_1(\omega_1)=U_1(\omega_1)=8$，
144 $S_1(\omega_2)=U_1(\omega_2)=4$，以及利率常数满足 $0\leqslant r<3/5$ 的单时期模型。风险中性概率测度是由$E_Q[\Delta S^*]=0$ 中计算出的，即 $Q(\omega_1)=(1+5r)/4$ 和

$Q(\omega_2)=(3-5r)/4$。因此，由（4.29）期货市场模型是无套利的，当且仅当$U_0=E_Q[S_1]=5(1+r)=5B_1$。当然，这与（4.30）是相同的并且与事实

$$(4.31)\quad V_1=H_0B_1+H_1S_1+H\Delta U=(V_0-5H_1)B_1+H_1S_1+\hat{H}\Delta U$$
$$=\begin{cases}V_0B_1(\omega_1)+H_1(8-5B_1(\omega_1))+\hat{H}\Delta U(\omega_1), & \omega=\omega_1\\ V_0B_1(\omega_2)+H_1(4-5B_1(\omega_2))+\hat{H}\Delta U(\omega_2), & \omega=\omega_2\end{cases}$$
$$=\begin{cases}V_0(1+r)+H_1(3-5r)+\hat{H}(3-5r), & \omega=\omega_1\\ V_0(1+r)+H_1(-1-5r)+\hat{H}(-1-5r), & \omega=\omega_2\end{cases}$$

相一致。这点是满足$U_0=5(1+r)$不存在对 H_1 和 $\hat{H}$ 选取的方法以便使$V_1\geqslant V_0(1+r)$和 $V_1\neq V_0(1+r)$。另一方面，对于 U_0 取任何其他的值，向量 ΔU 将不是向量 $S_1-S_0B_1$ 的一个数量倍数，同时人们能够选取 H 和$\hat{H}$ 以便存在一种套利机会。

更一般地，如果 U_1 是任意的，而不是等于 S_1 的，那么（4.29）蕴含着$U_0=U_1(\omega_1)(1+5r)/4+U_1(\omega_2)(3-5r)/4$。通过一些代数运算可验证，向量 ΔU_1 是向量 $S_1-S_0B_1$ 的一个数量倍数，其与无套利是一致的。

现在转到 $U_1=S_1$ 的情况下，同时假设利率 r 是随机的。（4.29）中的公式 $U_0=E_Q[S_1]$将不能运用，而我们必须利用更一般的 $U_0=E_Q[S_1/B_1]/E_Q[1/B_1]$或者（4.30）。例如，满足$r(\omega_1)=1/16$ 及 $r(\omega_2)=1/8$，风险中性概率测度经计算为$Q(\omega_1)=221/608$ 及 $Q(\omega_2)=387/608$。由（4.30）可得 $U_0=5\ 35/69$，它是与 $E_QS_1=5\ 69/152$ 不同的。利用 $U_0=5\ 35/69$，人们有$\Delta U(\omega_1)=172/69$ 及 $\Delta U(\omega_2)=-104/69$，所以（4.31）的第一部分蕴含着

$$V_1=\begin{cases}\frac{17}{16}V_0+\frac{43}{16}H_1+\frac{172}{69}\hat{H}, & \omega=\omega_1\\ \frac{9}{8}V_0-\frac{26}{16}H_1-\frac{104}{69}\hat{H}, & \omega=\omega_2\end{cases}$$

通过更多一些的代数运算可验证，向量 ΔU 是 $S_1-S_0B_1$ 的一个数量倍数，所以不存在着对 H 和$\hat{H}$的选取方法，以便使其成为套利机会。当 B_1

是随机的且 $U_1 \neq S_1$ 时，类似的结果成立。

在前面的例子中，当 $U_1 = S_1$ 时期货价格 U_0 解出等于远期价格 $O_0 = S_0 / E_Q\ [1/B_1]$。通过考察（4.30），人们看到这将在所有的单时期模型中都成立，甚至当 $U_1 = S_1$ 时，B_1 是一个随机的情况。这没有什么令人感到惊奇的，因为单时期模型中对期货和远期复制错误定价的可行交易
145 策略是相同的。但是在多时期设置背景下，仅仅“买入持有”（Buy-and-hold）和卖空持有（Short-and-hold）策略能够用来对远期复制错误定价，所以如同我们将要看到的那样，期货价格和远期价格会是不同的。

现在我们准备好来分析多时期的期货市场模型。考虑到与任意时间 t 和 $\mathscr{P}_t$ 中事件 A 相联系的单时期模型，其中分割中的单元对应于 $\mathscr{F}_t$。如同前面所述，多时期的期货市场模型具有无套利机会，当且仅当没有一个基本单时期模型具有套利机会。我们的任意单时期模型存在套利机会，当且仅当在时间 t 所采用的交易头寸使得 $V_{t+1} 1_A \geqslant 1_A V_t B_{t+1} / B_t$，其中这个不等式至少对于一个 $\omega \in A$ 严格成立。以类似的凭借前面导出（4.28）密切关系的方式，我们看到单时期模型存在套利机会，当且仅当

$$\sum_{n=1}^{N} H_n(t+1) \Delta S_n^*(t+1) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(t+1) \Delta U_j(t+1) / B_{t+1} \geqslant 0, \text{所有 } \omega \in A$$

其中这个不等式至少对于一个 $\omega \in A$ 严格地成立。由此可得，如同在（4.29）中那样，这个单时期模型存在无套利机会，当且仅当存在条件风险中性概率测度 $Q(t, A) > 0$，使得 $E_{Q(t,A)}[\Delta S_n^*\ (t+1)] = 0$ 对于所有 n 以及 $E_{Q(t,A)}[\Delta U_j(t+1) / B_{t+1}] = 0$ 对于所有 j。最后，正像传统的多时期证券市场模型一样（参见 3.4 节），我们能够将所有单时期模型粘在一起，并且得出结论：多时期的期货市场模型存在无套利机会，当且仅当存在一种严格正的概率测度 Q，使得每一个 S_n^* 是一个 Q-鞅，同时

$$\textbf{(4.32)} \quad E_Q[\Delta U_j(t+1) / B_{t+1} | \mathscr{F}_t] = 0, \quad \text{所有 } t \geqslant 0 \text{ 和 } j = 1, \cdots, J$$

存在一个问题：条件（4.32）有点不合人们的口味、不吸引人，同时利用起来有些困难。可以证明如果假设银行账户 B 是可料的（在单时期模型中，这与要求 B_1 成为一个常数是相同的），进而简化成一个更精细

的要求：每一个（未折现的）期货过程在测度 Q 下是一个鞅，这样损失会很小，而且得到了重要的简化结果。这正是我们将采用的方法；结论归纳如下。

(4.33) 假设银行账户过程是一个可料的，于是多时期期货市场模型中存在无套利机会，当且仅当存在一个严格正的概率测度 Q，使得对于每一个 S_n^*，$n=1, 2, \cdots, N$ 及每一个 U_j，$j=1, \cdots, J$ 在测度 Q 下是一个鞅。

现在假设 U 是基于证券 S 在时间 $\boldsymbol{\tau}$ 交割的期货合约的价格，这样 $U_{\boldsymbol{\tau}}=S_{\boldsymbol{\tau}}$。于是 (4.33) 蕴含着 $U_t=E_Q[S_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]$ 对于所有 $t=0, \cdots, \boldsymbol{\tau}$。与此同时，考虑关于相同证券 S 在同一时间 $\boldsymbol{\tau}$ 交割的远期价格 O_t。如果证 146
券不支付股息，那么 (4.22) 表明

$$O_t=\frac{S_t}{E_Q[B_t/B_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]}=\frac{E_Q[S_{\boldsymbol{\tau}}\ B_t/B_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]}{E_Q[B_t/B_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]}=\frac{E_Q[S_{\boldsymbol{\tau}}/B_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]}{E_Q[1/B_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]}$$

将这与 $U_t=E_Q[S_{\boldsymbol{\tau}}|\mathscr{F}_t]$ 比较，我们认识到下面的结果。

(4.34) 当银行账户过程 B 是确定的，在时间 $\boldsymbol{\tau}$ 交割相同证券的远期价格和期货价格是一致的，然而如果 B 是随机的（和可料的），那么这些远期价格和期货价格过程可以是不一样的。

当标的证券支付股息时，这种相同的结论仍成立，通过利用 (4.23) 和 (3.28) 能够验证这点。

例 4.1（续） 假设 $B_1=1$，以及

$$B_2(\omega)=\begin{cases}17/16, & \omega=\omega_1, \omega_2\\ 9/8, & \omega=\omega_3, \omega_4\end{cases}$$

促使 S^* 成为鞅的惟一概率测度很容易计算出来，即 $Q(\omega_1)=5/24$，$Q(\omega_2)=1/24$ 以及 $Q(\omega_3)=Q(\omega_4)=3/8$。因此，由于期货价格过程 U 满足 $U_2=S_2$，所以人们有 $U_0=E_Q[S_2]=5\frac{1}{2}$ 及

$$U_1 = E_Q[S_2 | \mathscr{F}_1] = \begin{cases} 8\dfrac{1}{2}, & \omega = \omega_1, \omega_2 \\ 4\dfrac{1}{2}, & \omega = \omega_3, \omega_4 \end{cases}$$

同时，在时间 2 交割这种证券的时间 0 时远期价格是由 $O_0 = S_0 / E_Q[1/B_2] = 5/(46/51) = 255/46$。

现在转到关于期货期权的专题上。例如，假设未定权益 X 是由某一到期日 s 满足 $0 < s < \tau$ 的 $X = g(U_s)$ 来定义的。更一般地，X 是 $\mathscr{F}_s$ 可测的随机变量，其中的 s 比与此模型相联系的各种各样的期货合约的所有交割时间要小。目标是确定这个欧式期权的价格，并且推导出复制此期权的交易策略，说得更准确些，一个满足 $V_s = X$ 的自融资交易策略（H，$\hat{H}$），如上所述

$$V_t = H_0(t) B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t) S_n(t) + \sum_{j=1}^{J} \hat{H}_j(t) U_j(t), \quad t > 0$$

像前面一样，一个期权称为是可达的或者市销的，如果它能够被复制。同时，如果 X 能够由交易策略（H，$\hat{H}$）所复制，那么相对应的投资组合价值 V_t 必是 X 在时间 t 的价格，对于所有 $t \leqslant s$。

147 为了获得精致的结果，从现在开始假设银行账户过程 B 是可料的，同时存在着这种期货市场模型的风险中性概率测度 Q。由这个假设和（4.33）可得。

(4.35) 折现价值过程 $V^* \equiv V/B$ 是一个 Q-鞅。

现在 X 是可达的，当且仅当 $X/B_s = V_s^*$ 对于某一个自融资交易策略，所以正如同普通证券市场模型一样，（4.35）蕴含

(4.36) 如果 $X \in \mathscr{F}_s$ 是期货市场模型中的一个可达的未定权益，那么它在时间 t 的价格是 $V_t = E_Q[X B_t / B_s | \mathscr{F}_t]$ 对于所有 $t \leqslant s$。

值得指出的是，即使银行账户过程 B 不是可料的，像（4.35）和

(4.36) 那样的结果仍成立，但是你必须仔细地对待在这种情况下通过风险中性概率测度所得出的内容。

这种关于期货期权的估值公式看起来完全与关于证券交易的普通欧式期权相同，但是却存在着微妙的差异。在实际应用中，由银行账户和仅一个风险价格过程（当然，人们选择的风险价格是支撑期权的那个价格）为起点所构成的模型是人们共同的常识。如果这个基础性的风险价格是一种证券，那么鞅测度 Q 将会使得折现（Discounted）风险价格过程是一个鞅。另一方面，如果基础性的风险价格是一种期货价格，那么鞅测度 Q 必是使得未折现（Undiscounted）风险价格过程成为一个鞅。这样，以相同的风险价格过程模型开始，你能够得到两种不同的关于这一价格过程的相同期权的价格，而价格过程依赖于它是否是一种证券或者是一种期货价格。

例 4.12 考察一个由单个风险证券所组成的期货市场模型，也就是期货过程 U 是由 3.5 节中的二项式模型所控制的。特别，其参数 $0<d<1<u$ 和 $0<p<1$，同时初始价格 U_0

$$U_t = U_0 u^{N_t} d^{t-N_t} \quad t=0,\ 1,\ \cdots$$

其中 N 是带参数 p 的二项式过程。像前面一样，利率 $r\geqslant 0$ 是常数。

风险中性概率测度很容易计算出。我们想要使 U 成为一个鞅，所以这点与前面所述完全相同，只是以利率 $r=0$ 开始。特别，“上升”运动的概率 q 应该取成

$$q=\frac{1-d}{u-d}$$

即使真实利率 r 是严格正的，所有一切仍然应该与前面所述相同。特别，公式 (3.32) 对于 U_t 的概率分布仍是成立的，只是我们现在使用 q 的新值。

现在考察欧式买入期权 $X=(U_s-e)^+$。为了计算它在时间 0 的价格，我们以如同 4.2 节中的完全相同的方法来继续讨论，仅仅是使用 q 的新值。尤其是，我们定义 $\hat{n}$ 为使得 148

$$n > \frac{log(e/(U_0 d^s))}{log(u/d)}$$

最小的非负整数 n。如果 $\hat{n} > s$，那么 U_0 到目前为止是一个价外期权，* * * * 即没有机会去赚取很多的钱（即满足 $U_s > e$），在此情况下，期权在时间 0 的价格是 $V_0 = 0$。另一方面，如果 $\hat{n} \leqslant s$，那么

$$V_0 = U_0 \sum_{n=\hat{n}}^{s} \binom{s}{n} \hat{q}^n (1-\hat{q})^{s-n} - \frac{e}{(1+r)^s} \sum_{n=\hat{n}}^{s} \binom{s}{n} q^n (1-q)^{s-n}$$

其中$q=(1-d)/(u-d)$，而$\hat{q} = qu/(1+r) = (1-d)u/[(u-d)(1+r)]$。这个公式与关于证券的买入期权公式具有完全相同的形式，现在仅是 $q \neq (1+r-d)/(u-d)$。

习题 4.15 当标的证券支付股息时验证（4.34）成立。

译者注

* 原书中的 $Z = \{Z;\ t=0, 1, \cdots, T\}$ 的表示形式，在译成中文时将“;”改为“:”，这样更符合中文习惯。本书凡遇到这种情况，均做了统一改动。

* * 任意抽样定理（又称为可选样本定理）

在概率论中，有关鞅方面的定义和定理的通俗解释，人们经常用赌徒参与赌博的事例来说明。假设一个赌徒参与一系列的公正赌博，这可以看成是一个鞅，已知赌徒可从以前的赌博中获得一些经验，这当中赌徒的赌本大小的预期值不会从一次赌局到下一次赌局时产生变化。为了获得赢利，当即将进行的赌局无利可图时，赌徒企图运用从以前的赌局中获得的信息来决策，于是便袖手旁观。然而，赌徒的努力注定要失败。依照 Doob 的可选样本定理，我们这个赌徒无论怎样设计有偏差的样本，赌徒的预期赌本（已知过去的赌本）在每一次赌局之后将保持不变。

下面，我们给出一个正式的可选样本的定义。设 $\{(S_n, \mathscr{F}_n),\ n \geqslant 1\}$ 是一个鞅，我们把 S_n 看成是赌徒在第 n 次赌局之后的赌本大小，如果所有的赌局都可以进行且 σ 域 $\mathscr{F}_n$ 作为从头 n 次赌局获得的经验信息集合。设 $\{m_j,\ j \geqslant 1\}$ 是一个有限的或者无限的取正整数值的随机变量，其满足

$$1 < m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots < \infty \tag{1}$$

和

$$[m_j = n] \text{ 是 } \mathscr{F}_n \text{ 中的，} \quad \text{对于所有 } n \geqslant 1 \text{ 及 } j \geqslant 1 \tag{2}$$

变量 m_j 是一个由赌徒选择的样本时间（停时或者可选时间），而且最后一个条件保证了赌徒不会运用任何未来的、迅速的直觉洞察力来确定这些时间。利用每一个变量 m_j，我们结合 σ 域 $\mathscr{F}_m$，定义所有事件 E 的集合满足

$$E \cap [m_j = n] \text{是在 } \mathscr{F}_n \text{ 中，} \quad \text{对于所有 } n \geqslant 1$$

Doob 的可选样本定理可以叙述如下：

定理：如果 $\{(S_n, \mathscr{F}_n), n \geqslant 1\}$ 是一个鞅，并且 $\{m_j, j \geqslant 1\}$ 是一个满足条件 (1)、(2) 的样本时间序列，以及

$$E[|S_{m_j}|] < \infty, \quad \text{对于每一个 } j$$

那么 $\{(S_{m_j}, \mathscr{F}_{m_j}), j \geqslant 1\}$ 也是一个鞅。如果将这里的每一处术语鞅换成上鞅，那么结论仍然成立。

可选样本不同于可选停时，因为前者涉及在停时序列上观察鞅，不必要求连贯性，而后者是在所有直到单个随机时间 m 为止的点上观察鞅，然后停止观察。实际上，可选停时是可选样本的一种特殊情况，尽管前者通常有它自己的研究特点和性质。

*** 在时间 T 交易者中的一方从另一方那里收取资产/证券 S，且支付 O_t 现金。

**** 这涉及一个具有执行价格 e 的买入期权。如果现价 $U(s)$ 是比 e 小的，那么有一个最小数，比如说 N，为了促使价格超过 e，需要向上运动。例如，如果 5 个时期连续地向上运动仍处于低于 e 的价格上，但是 6 个时期连续地向上运动则促使价格大于 e，那么 $N=6$。然而，如果在买入期权到期时存在着小于 N 的时期数，那么无法促使期权到期时具有一个非零的支付。术语 “out of the money”（价外期权或称虚值期权）是期权交易者的一个标准称谓，它意味着在原生资产的现价上期权的支付是零的情况。就买入期权来说，是指原生资产的现价低于执行价格，而对卖出期权而言，是指原生资产的现价高于执行价格。

类似地，“in the money”（价内期权，或称实值期权）意味着在原生资产的现价上，期权支付会是严格正的情况。最后，“at the money”（平价期权，称两平期权）意味着原生资产的现价是与执行价格 e 相同的或者接近的情况。

149

5

最优消费与投资问题

5.1 最优投资组合与动态规划

这章的目的是研究第 2 章中引入的单时期消费和投资问题的多时期推广。我以研究基本的最优投资组合问题作为开始，其目标是求最大化时间 T 时财富的期望效用，同时在时间 T 之前不存在消费。

效用函数（Utility Function）u：$\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$是特定的，$u(w, \omega)$ 表示在时间 T 当 $\omega\in\Omega$ 是现实世界的状态时财富 w 的效用。假设 $w\to u(w, \omega)$ 是可微的、凹的和严格递增的，对于每一个 $\omega\in\Omega$。通常 u 将是与 ω 无关的。

初始财富 v 是一个特定的值。投资者能够选取任何与此初始财富相一致的自融资交易策略 H。对任何这样的 H 绩效的测量将是最终财富期望效用，说得更准确些

$$Eu(V_T) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)u(V_T(\omega),\omega)$$

因此，投资者对求解下面的最优投资组合问题最感兴趣：

$$\text{(5.1)}\qquad \begin{aligned} \max\quad & Eu(V_T) \\ \text{s.t.}\quad & V_0 = v \\ & H\in\mathbb{H} \end{aligned}$$

其中，$\mathbb{H}$表示所有自融资交易策略的集合。

请记住交易策略必是可料的，我们看到（5.1）实际上涉及三种约束。150
但是，这三种约束中的两个能容易避开。由于 $V_T = B_T V_T^*$ 以及 $V_T^* = V_0^* + G_T^*$，由此可得（5.1）等价于

$$
\text{(5.2)} \qquad \begin{aligned} &\max \quad Eu(B_T\{v + G_T^*\}) \\ &\text{s.t.} \quad (H_{1,\cdots,}H_N) \in \mathbb{H}_p \end{aligned}
$$

其中，$\mathbb{H}_p$ 表示在$\mathbb{R}^N$ 中取值的所有可料过程的集合。这样，如果（$\hat{H}_{1,\cdots,}$ $\hat{H}_N$）是（5.2）一个解，那么选取 $\hat{H}_0$ 以便使 $\hat{H}=$（$\hat{H}_0$，$\hat{H}_{1,\cdots,}\hat{H}_N$）成为自融资的且 $V_0 = v$ 是一件容易的事情，从而给出（5.1）的一个最优解。

问题（5.2）能够运用几种方法来求解。一种方法是使用标准的微积分和最优化理论，记住可料性约束。

例 5.1 假设 $N=2$，$K=4$，$N=1$，利率 r 是满足 $0 \leqslant r < 0.125$ 的常数，域流是由风险证券生成的，并且风险证券的价格过程和概率测度表示如下：

ω	$S_0(\omega)$	$S_1(\omega)$	$S_2(\omega)$	$S_3(\omega)$
ω_1	5	8	9	1/4
ω_2	5	8	6	1/4
ω_3	5	4	6	1/4
ω_4	5	4	3	1/4

另外，假设投资者具有指数效用函数：$u(w) = 1 - \exp\{-w\}$。鉴于可料性的要求，买卖风险证券的策略 H_1 引起三个纯量值的详细说明：当价格 $S_0 = 5$ 时从时间 0 开始持有的头寸，记作 H^5；当价格 $S_1 = 8$ 时从时间 1 开始持有的头寸，记作 H^8；当价格 $S_1 = 4$ 从时间 1 开始持有的头寸，记作 H^4。因此，（5.2）中的目标能够写成为

$$
\begin{aligned} Eu(B_2\{v + G_2^*\}) &= 1 - E\ \exp\{-(1+r)^2[v + H_1(1)\Delta S_1^* + H_1(2)\Delta S_2^*]\} \\ &= 1 - \frac{1}{4}\left(\exp\left\{-(1+r)^2\left[v + H^5\frac{3-5r}{1+r} + H^8\frac{1-8r}{(1+r)^2}\right]\right\}\right. \end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\exp\left\{-(1+r)^2\left[v+H^5\frac{3-5r}{1+r}+H^8\frac{-2-8r}{(1+r)^2}\right]\right\}\\
&+\exp\left\{-(1+r)^2\left[v+H^5\frac{-1-5r}{1+r}+H^4\frac{2-4r}{(1+r)^2}\right]\right\}\\
&+\exp\left\{-(1+r)^2\left[v+H^5\frac{-1-5r}{1+r}+H^4\frac{-1-4r}{(1+r)^2}\right]\right\}\Bigg)
\end{aligned}
$$

151 令对三个变量中的每一个变量的偏导数为 0，导致下面的三个方程：

(5.3)

$$
\begin{aligned}
&\exp\left\{-(1+r)^2\left[v+H^5\frac{3-5r}{1+r}+H^8\frac{1-8r}{(1+r)^2}\right]\right\}\\
&\quad=\frac{2+8r}{1-8r}\exp\left\{-(1+r)^2\left[v+H^5\frac{3-5r}{1+r}+H^8\frac{-2-8r}{(1+r)^2}\right]\right\}\\
&\exp\left\{(1+r)^2\left[v+H^5\frac{-1-5r}{1+r}+H^4\frac{2-4r}{(1+r)^2}\right]\right\}\\
&\quad=\frac{(3-5r)(1+4r)}{(1+5r)(1-8r)}\exp\left\{-(1+r)^2\left[v+H^5\frac{3-5r}{1+r}+H^8\frac{-2-8r}{(1+r)^2}\right]\right\}\\
&\exp\left\{-(1+r)^2\left[v+H^5\frac{-1-5r}{1+r}+H^4\frac{-1-4r}{(1+r)^2}\right]\right\}\\
&\quad=\frac{(3-5r)(2-4r)}{(1+5r)(1-8r)}\exp\left\{-(1+r)^2\left[v+H^5\frac{3-5r}{1+r}+H^8\frac{-2-8r}{(1+r)^2}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

取对数，人们得到三个线性方程的方程组；由此，最后的解很容易得出：

$$
\begin{aligned}
H^5&=\frac{3\ln(3-5r)+(2-4r)\ln(2-4r)+(1+4r)\ln(1+4r)}{12(1+r)}\\
&\quad-\frac{3\ln(1+5r)+(2+8r)\ln(2+8r)+(1-8r)\ln(1-8r)}{12(1+r)}\\
H^8&=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+8r}{1-8r}\right)\qquad H^4=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2-4r}{1+4r}\right)
\end{aligned}
$$

剩下的是计算 H_0，即银行账户交易的策略。显然，$H_0(1)=v-5H^5$，在状态 ω_1 和 ω_2，投资组合的价值将是 $V_1=(v-5H^5)(1+r)+8H^5$，所以令这等于 $H_0(2)(1+r)+8H^8$，得出 $H_0(2)=(v-5H^5)+8(H^5-H^8)/(1+r)$。类似地，人们对于 ω_3 和 ω_4 计算出 $H_0(2)=(v-5H^5)+8(H^5-H^4)/(1+r)$。

正如在单时期模型中所看到，如果存在一个套利机会，那么不存在着投资组合问题（5.1）或者（5.2）中的最优解。换句话说，如果（5.1）或者（5.2）有解，那么存在无套利机会，在此情况下必存在着一个风险中性概率测度。事实上，单时期模型的原理（2.6）推广如下：

(5.4) 如果（H，V）是最优投资组合问题（5.1）或者（5.2）的解，那么风险中性概率测度是由 152

$$Q(\omega)=\frac{P(\omega)B_T u'(V_T(\omega),\omega)}{E[B_T u'(V_T)]},\quad \omega\in\Omega$$

定义的，其中 u'表示对第一个自变量的偏导数。

为了理解这点，考察任意 t、任意证券 n 和对应于 $\mathscr{F}_{t-1}$的分割 $\mathscr{P}_{t-1}$中的任意事件 A。对应于 A 的是$H_n(t)1_A$,即证券 n 的头寸是指当事件A发生时从时间$t-1$ 持有。对应于这个纯量值变量的一阶必要条件是

$$\sum_{\omega\in A}P(\omega)u'(B_T(\omega)\{v+G_T^*(\omega)\},\omega)B_T(\omega)\Delta S_n^*(t,\omega)=0$$

这对于所有 $A\in\mathscr{P}_{t-1}$是正确的，所以

$$E[u'(B_T\{v+G_T^*\})B_T\Delta S_n^*(t)|\mathscr{F}_{t-1}]=0$$

因此，如果 Q 是如同在（5.4）中定义的那样，那么$E_Q[\Delta S_n^*(t)|\mathscr{F}_{t-1}]=0$,因为$V_T=B_T\{v+G_T^*\}$。

例 5.1（续） （5.3）中的三个方程分别对应

$$u'(V_2(\omega_1))=\frac{2+8r}{1-8r}u'(V_2(\omega_2))$$

$$u'(V_2(\omega_3))=\frac{(3-5r)(1+4r)}{(1+5r)(1-8r)}u'(V_2(\omega_2))$$

$$u(V_2(\omega_4))=\frac{(3-5r)(2-4r)}{(1+5r)(1-8r)}u'(V_2(\omega_2))$$

因此，(5.4) 蕴含着

$$Q(\omega_1)=\frac{(1+5r)(2+8r)}{12} \quad Q(\omega_2)=\frac{(1+5r)(1-8r)}{12}$$
$$Q(\omega_3)=\frac{(3-5r)(1+4r)}{12} \quad Q(\omega_4)=\frac{(3-5r)(2-4r)}{12}$$

许多传统方法可验证这是惟一的风险中性概率测度。

显然，例 5.1. 中阐述的计算最优交易策略的方法对大多数问题而言是不能实行的。基本信息树中的每一个结点带有 N 个方程和 N 个变量，
153 从而产生的方程组由于太大而解不出来。但是，可供选择的被称为动态规划的方法能减少这些计算上的困难。

动态规划的思想，已经在关于计算美式期权的价值中做了介绍。其思想是实现当面对一系列决策时，最优决策应该如何与在所有未来时期中实行最优行动的目的相一致。换句话说，如果你知道开始时间 $t+1$ 时的最优策略，那么对开始时间 t 时最优策略的确定能够变为一个时期或者多于一个时期的问题。由此可见，多时期决策问题能通过求解一系列一个时期的问题解出。你依时间进行倒推，首先计算出下一个时期的最优决策，然后计算出接下来的第二个时期的最优决策，等等。

就我们的最优投资组合问题来说，为了实施这种程序，有必要与最优价值过程（Optimal Value Process）$U_t(w)$联系起来，$t=0,\dots,T$。此处$U_t(w)$等于时间 T 时财富的最大期望效用（对所有的自融资交易策略而言），已知现在时间是 t，时间 t 的财富是 w，以及时间 t 的历史是 $\mathscr{F}_t$。因此，$U_t(w)$将是 $\mathscr{F}_t$ 可测的随机变量。

当 $t=T$ 时，$U_t(w)$的值是清楚的，这与效用函数一致，也就是

$$U_T(w)=u(w,\omega)$$

可以证明，对于 $t<T$，$U_t(w)$的值满足重要的动态规划函数方程（Dynamic Programming Functional Equation）：

$$\textbf{(5.5)} \qquad U_t(w)=\max_{H\in\mathscr{F}_t} E[U_{t+1}(B_{t+1}\{w/B_t+H\cdot\Delta S^*_{t+1}\})|\mathscr{F}_t]$$

这里时期 t 的决策变量 H 是一个 N-维的随机变量，对其要求是 $\mathscr{F}_t$ 可测的。已知历史 $\mathscr{F}_t$ 时，使这个表达式最大化的 H 的值将被证明是从时间 t 持有的风险证券最优头寸的向量。记号 $H\cdot\Delta S_{t+1}^*$表示内积，也就是$H\cdot\Delta S_{t+1}^*=H_1\Delta S_1^*(t+1)+\cdots+H_NS_N^*(t+1)$。这等于从时间 t 到时间$t+1$ 的折现增益。注意到，（5.5）中如果时间 t 时财富是 w，U_{t+1}的自变量等于时间 $t+1$ 的财富，H 给出了风险证券的头寸，而$H_0(t+1)$表示银行账户上的头寸是以自融资的方式来选择的。

动态规划方程（5.5）能够用来计算出投资组合问题（5.1）或者(5.2）的最优解，通过一种递归方法计算最优价值函数 $U_t(w)$。首先，计算出 $U_{T-1}(w)$，然后计算出 $U_{T-2}(w)$等等。在求 H 的最大值方法中，目的是形成最优投资组合策略的分量。当计算完成后，已知 $w=v$，$U_0(w)$将等于（5.1）或者（5.2）中的目标函数的最优值。这样，动态规划方法提供了一种额外给予的东西：你拥有对所有初始财富 $w=v$ 的可能价值的解，而不仅仅是特定的值。 154

例 5.1（续） 取 $t=1$，同时或者 ω_1 或者 ω_2，（5.5）右边变为

$$\max_h E[1-\exp(-(1+r)^2\{w/(1+r)+h\Delta S_2^*\})\mid S_1=8]$$

$$=\max_h\left(1-\frac{1}{2}\exp\{-(1+r)w-(1-8r)h\}-\frac{1}{2}\exp\{-(1+r)w+(2+8r)h\}\right)$$

这里决策变量 h 是一个纯量。计算这个变量对 h 的导数并令其等于零，立刻导出 h 的最大值，即

$$h=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+8r}{1-8r}\right)$$

将这代回到（5.5）的右边得到

$$U_1(w)=1-\frac{1}{2}\exp\{-(1+r)w\}\left\{\left(\frac{2+8r}{1-8r}\right)^{(1-8r)/3}+\left(\frac{2+8r}{1-8r}\right)^{-(2+8r)/3}\right\}$$

$$=1-\frac{3}{2}(2+8r)^{-(2+8r)/3}(1-8r)^{-(1-8r)/3}\exp\{-(1+r)w\}$$

对于 ω_1 和 ω_2。

以类似的方式，取 $t=1$，同时或者 ω_3 或者 ω_4，（5.5）右边变为

$$\begin{aligned}&\max_h \quad E[1-\exp(-(1+r)^2\{w/(1+r)+h\Delta S_2^*\})\mid S_1=4]\\&=\max_h(1-\frac{1}{2}\exp\{-(1+r)w-(2-4r)h\}-\frac{1}{2}\\&\quad\exp\{-(1+r)w+(1+4r)h\})\end{aligned}$$

所以，$\ln[(2-4r)/(1+4r)]/3$ 是 h 的最大值，而且对于 ω_3 和 ω_4，

$$\begin{aligned}U_1(w)&=1-\frac{1}{2}\exp\{-(1+r)w\}\left\{\left(\frac{2-4r}{1+4r}\right)^{(1+4r)/3}+\left(\frac{2-4r}{1+4r}\right)^{-(2-4r)/3}\right\}\\&=1-\frac{3}{2}(2-4r)^{-(2-4r)/3}(1+4r)^{-(1+4r)/3}\exp\{-(1+r)w\}\end{aligned}$$

现在我们准备用动态规划的迭代方法并计算 $U_0(w)$。记

155

$$f(r,\omega)=\begin{cases}\frac{3}{2}(2+8r)^{-(2+8r)/3}(1-8r)^{-(1-8r)/3}, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ \frac{3}{2}(2-4r)^{-(2-4r)/3}(1+4r)^{-(1+4r)/3}, & \omega=\omega_3,\omega_4\end{cases}$$

所以 $U_1(w)$ 能概括地写成

$$U_1(w)=1-f(r,\omega)\exp\{-(1+r)w\}$$

方程（5.5）成为

$$\begin{aligned}U_0(w)&=\max_h E[1-f(r,\omega)\exp\{-(1+r)[(1+r)\{w+h\Delta S_1^*\}]\}]\\&=\max_h(1-\frac{1}{2}f(r,\omega_1)\exp\{-(1+r)^2w-(1+r)(3-5r)h\}\\&\qquad-\frac{1}{2}f(r,\omega_3)\exp\{-(1+r)^2w+(1+r)(3+5r)h\})\end{aligned}$$

令对 h 的导数等于零，人们最终导出 h 的最大值：

$$h = \frac{3\ln(3-5r)+(2-4r)\ln(2-4r)+(1+4r)\ln(1+4r)}{12(1+r)}$$
$$-\frac{3\ln(1+5r)+(2+8r)\ln(2+8r)+(1-8r)\ln(1-8r)}{12(1+r)}$$

将这代回到（5.5）的右边使人们得到 U_0（w）的表达式。然而，代数细节是极度繁琐的，所以实际公式将无法给出。

概括地说，原则上动态规划方法是用来求解最优投资组合问题的。它提供了许多基于一阶必要条件的传统方法在许多情况下不适用的解。另一方面，即使不是无法逾越，也存在着许多计算上的难以克服的困难的实际情况。幸亏下节的主题即风险中性计算方法，能够经常克服这些计算上的困难。

习题 5.1 运用动态规划方法计算例 5.1 证券市场中作为初始财富 v 的函数的最优交易策略。利用对数效用，也就是 $u(w)=\ln(w)$，并且假设利率 r 是任意常数。计算作为参数 r 和 v 的函数的最优目标值（提示：首先尝试特殊情况 $r=0$；然后证明最优时间 0 时风险证券的头寸是 $(1+r)(1-5r)v/[(1+5r)(3-5r)]$）。

习题 5.2 运用动态规划方法证明具有指数效用（也就说，$u(w)=a-(b/c)\exp\{-cw\}$，其中 a，$b>0$ 及 $c>0$ 是纯量参数）、具有一般证券模 156
型以及具有可料的银行账户过程，证券的最优头寸常常是与当前财富无关的。如果你去掉可料性要求，那么情况会怎样呢？给出证明或者使用例 5.1 中的证券来提供反例。

习题 5.3 假设存在单个风险证券，它表示为满足参数 $0<d<1+r<u$ 及 $0<p<1$ 的二项式模型。利率 $r\geqslant 0$ 是常数。初始价格 S_0、初始财富 v 以及时间范围 T 均是任意的。运用动态规划方法计算出下面效用函数的最优交易策略：

(a) $u(w)=1-\exp\{-w\}$（提示：用归纳法证明 $U_t(w)$ 的形式是 $1-k_t\exp\{-(1+r)^{T-t}w\}$，其中 k_t 是一个常数）。

(b) $u(w)=\ln(w)$（提示：用归纳法证明 $U_t(w)$ 的形式是 $\ln(w)+k_t$，其中 k_t 是一个常数）。

习题 5.4 对于例5.1中满足常数利率 $r=0$ 的模型，运用标准的最优化方

法（即，令三个偏导数等于0）及动态规划方法表示效用函数的最优交易策略。验证你的答案是相同的

(a) $u(w) = -w^{-1}$（等弹性效用）

(b) $u(w) = \beta w - \frac{1}{2}w^2$（二次效用）。

5.2 最优投资组合与鞅方法

求解多时期最优投资组合问题的风险中性计算方法与求解单时期问题的方法非常相似。给定问题（5.1）或者（5.2），第一步是确认$\mathbb{W}_v$，即所有可达财富（Attainable Wealth）的集合。这就是$\mathbb{W}_v = \{w \in \mathbb{R}^K$: $W = V_T$ 对满足 $V_0 = v$ 的某一个自融资$H\}$：通过以初始财富 v 开始的某一个自融资交易策略能够生成的所有时间 T 的未定权益的集合。如果模型是完全的，那么这一集合就是

$$\mathbb{W}_v = \{W \in \mathbb{R}^K : E_Q[w/B_T] = v\} \tag{5.6}$$

如果模型是不完全的，那么对$\mathbb{W}_v$的详细说明变得颇为复杂，这会在稍后面的章节中讨论。

第二步是求解子问题：

$$\begin{aligned} &\max \quad Eu(W) \\ &\text{s.t.} \quad W \in \mathbb{W}_v \end{aligned} \tag{5.7}$$

如果模型是完全的，那么这个问题能够运用拉格朗日乘子方法来求解，稍

157 后将阐述。最后，可获得最优解 $\hat{W}$，第三步是计算出生成 $\hat{W}$的交易策略 H，这样做确实与人们计算生成未定权益的交易策略相同。

F 本节自始至终地假设模型是完全的，这样需要解释的惟一的一步是第二步：求解子问题（5.7）。一种有效的程序即将描述出来，同时提供了一些例子。

实际上，第二步与单时期模型所运用的方法差异很小。鉴于（5.6），

我们通过引进拉格朗日乘子 λ 求解出（5.7），然后求解

$$\max Eu(W)-\lambda E_Q[W/B_T] \tag{5.8}$$

这是一个满足变量 $W\in\mathbb{R}^K$ 的无约束问题。一旦引入状态价格密度 $L=Q/P$，（5.8）中的目标函数能重新写为

$$E[u(W)-\lambda LW/B_T]=\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)[u(W(\omega)-\lambda L(\omega)W(\omega)/B_T(\omega)]$$

如果 W 使这个表示式最大化，那么必要条件必是满足的，从而导致了每一个 $\omega\in\Omega$ 的一个方程：

$$u'(W(\omega))=\lambda L(\omega)/B_T(\omega),\quad \text{所有 } \omega\in\Omega$$

(现在假设效用函数 u：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 仅是财富的函数，与状态 $\omega\in\Omega$ 无关)。这样，这等价于

$$W(\omega)=I(\lambda L(\omega)/B_T(\omega)),\quad \text{所有 } \omega\in\Omega \tag{5.9}$$

其中，I 表示对应于 u' 的反函数。

剩下来的问题是确定 λ 的正确值。当 W 用（5.9）代入时，这正是使得 $v=E_Q[W/B_T]$ 成立的那个值。换句话说，λ 选取的值应该使

$$E_Q[I(\lambda L/B_T)/B_T]=v \tag{5.10}$$

成立。反函数 I 一般随着自变量的增加而递增，自变量变化范围包括 $(0,\infty)$，这样（5.10）的解一般对于任何 $v>0$ 将存在。因此，子问题（5.7）的解确实与单时期模型的解没有什么差别，只是现在我们用 B_T 去折现，而不是 B_1。鉴于 2.2 节中单时期模型的结果，我们立刻有下面的例子。

例 5.2（指数效用） 例 2.2 中的指数效用函数能很容易地推广到形式为 $u(w)=a-bc\exp\{-w/c\}$ 的情形上，其中 a，b 和 c 均是纯量参数，

满足 $b>0$ 和 $c>0$。这给出了最优可达财富

$$W=\frac{v+cE[(L/B_T)\ln(L/B_T)]}{E[L/B_T]}-c\ln(L/B_T)$$

以及最优目标值

$$Eu(W)=a-bcE[L/B_T]\exp\left\{\frac{-v/c-E[(L/B_T)\ln(L/B_T)]}{E[L/B_T]}\right\}$$

158 **例 5.3（对数效用）** 如果 $u(w)=\ln(w)$，那么最优可达财富是

$$W=vB_T/L$$

以及最优目标值是

$$Eu(W)=\ln(v)-E[\ln(L/B_T)]$$

例 5.4（等弹性效用） 如果 $u(w)=\gamma^{-1}w^{\gamma}$，其中 $-\infty<\gamma<1$ 且 $\gamma\neq 0$，那么最优可达财富是

$$W=\frac{v(L/B_T)^{-1/(1-\gamma)}}{E[(L/B_T)^{-\gamma/(1-\gamma)}]}$$

以及最优目标值是

$$Eu(W)=\frac{v^{\gamma}}{\gamma}\{E[(L/B_T)^{-\gamma/(1-\gamma)}]\}^{1-\gamma}$$

例 5.5（二次效用） 这个例子是建立在 2.4 节结果之上的。如果对于参数 $\beta>0$，$u(w)=\beta w-w^2/2$，那么 $I(i)=\beta-i$。方程（5.9）成为 $W=\beta-\lambda L/B_T$。对 λ 求解方程（5.10），然后代入得出最优可达财富

$$W=\beta+\left[\frac{v-\beta E_Q\ [1/B_T]}{E_Q\ [L/B_T^2]}\right]L/B_T$$

把这回代到目标函数中，最终导出最优目标值

$$Eu(W)=\frac{\beta^2[E_Q[L/B_T^2]-\{E_Q[1/B_T]\}^2]-v^2+2\beta vE_Q[1/B_T]}{2E_Q[L/B_T^2]}$$

例 5.1 和 5.2（续） 风险中性概率测度和状态价格向量很容易地计算出来如下：

ω	$Q(\omega)$	$L(\omega)=Q(\omega)/P(\omega)$
ω_1	$(1+5r)(2+8r)/12$	$(1+5r)(2+8r)/3$
ω_2	$(1+5r)(1-8r)/12$	$(1+5r)(1-8r)/3$
ω_3	$(3-5r)(1+4r)/12$	$(3-5r)(1+4r)/3$
ω_4	$(3-5r)(2-4r)/12$	$(3-5r)(2-4r)/3$

我们首先计算出，$E[L/B_2]=E_Q[(1+r)^{-2}]=(1+r)^{-2}$,

$$E[(L/B_2)\ln(L/B_2)]=(1+r)^{-2}E_Q[\ln(L)]-2(1+r)^{-2}\ln(1+r)$$

以及 159

$$\begin{aligned}E_Q[\ln(L)]=\frac{1}{12}\Big(&-12\ln(3)+3(1+5r)\ln(1+5r)+3(3-5r)\ln(3-5r)\\&+(1+5r)(2+8r)\ln(2+8r)+(1+5r)(1-8r)\ln(1-8r)\\&+(3-5r)(1+4r)\ln(1+4r)+(3-5r)(2-4r)\ln(2-4r)\Big)\end{aligned}$$

因此，最优可达财富是

$$W(\omega)=v(1+r)^2+E_Q[\ln(L)]+\ln(3)$$
$$+\begin{cases}-\ln(1+5r)-\ln(2+8r), & \omega=\omega_1\\ -\ln(1+5r)-\ln(1-8r), & \omega=\omega_2\\ -\ln(3-5r)-\ln(1+4r), & \omega=\omega_3\\ -\ln(3-5r)-\ln(2-4r), & \omega=\omega_4\end{cases}$$

求解方程组

$$(1+r)^2H_0(2)+9H_1(2)=W(\omega_1)$$
$$(1+r)^2H_0(2)+6H_1(2)=W(\omega_2)$$

在状态 ω_1 和 ω_2 下得出

$$H_1(2)=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+8r}{1-8r}\right)$$

及

$$H_0(2)=v+\frac{E_Q[\ln(L)]+\ln(3)}{(1+r)^2}+\frac{2\ln(2+8r)-\ln(1+5r)-3\ln(1-8r)}{(1+r)^2}$$

类似地，求解方程组

$$(1+r)^2H_0(2)+6H_1(2)=W(\omega_3)$$
$$(1+r)^2H_0(2)+3H_1(2)=W(\omega_4)$$

在状态 ω_3 和 ω_4 下得出

$$H_1(2)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2-4r}{1+4r}\right)$$

及

$$H_0(2)=v+\frac{E_Q[\ln(L)]+\ln(3)}{(1+r)^2}$$
$$+\frac{\ln(1+4r)-\ln(3-5r)-2\ln(2-4r)}{(1+r)^2}$$

其次，求解方程组

$$(1+r)H_0(1)+8H_1(1)=V_1(\omega_1)=(1+r)H_0(2,\omega_1)+8H_1(2,\omega_1)$$
$$(1+r)H_0(1)+4H_1(1)=V_1(\omega_3)=(1+r)H_0(2,\omega_3)+4H_1(2,\omega_3)$$

得出$H_0(1)$及$H_1(1)$的值（参见 5.1 节的计算）。最终，

$$E(W)=1-(1+r)^{-2}\exp\{-v(1+r)^2-E_Q[\ln(L)]+2\ln(1+r)\}$$

是最优目标值。

例 5.6 假设存在一个由具有参数 r，p，u 和 d 的二项式模型所调节的单个风险证券，并假设$u(w)=\ln(w)$。鉴于 3.5 节，

$$L(\omega)=\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=\left(\frac{q}{p}\right)^n\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-n}$$

其中，$q=(1+r-d)/(u-d)$，而 n 是对应于状态 ω 的、由风险证券引起“上升”运动的次数。回想起 N_T，作为在 T 时期中“上升”运动的次数，是具有参数 T 和 p 的二项式随机变量。运用对数效用，由例 5.3 得出

$$W=v(1+r)^T\left(\frac{p}{q}\right)^{N_T}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{T-N_T}$$

是最优可达财富。此外，由于 $EN_T=pT$，最优目标值是

$$Eu(W)=\ln(v)+\ln(1+r)^T-E\ln(L)$$

$$= \ln(v) + T\ln(1+r) - E\left[\ln\left(\frac{q}{p}\right)^{N_T}\right] - E\left[\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-N_T}\right]$$

$$= \ln(v) + T\ln(1+r) - pT\ln\left(\frac{q}{p}\right) - (1-p)T\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)$$

现在对于任意的 $n<T$，假设 $N_{T-1}=n$ 并且考察银行账户上的最优头寸，以及应从时间 $T-1$ 持有风险证券的头寸。这些可由求解

161

$$(1+r)^T H_0(T) + S_{T-1}uH_1(T) = v(1+r)^T(p/q)^{n+1}(\{1-p\}/\{1-q\})^{T-n-1}$$

$$(1+r)^T H_0(T) + S_{T-1}dH(T) = v(1+r)^T(p/q)^{n}(\{1-p\}/\{1-q\})^{T-n}$$

得到。

从而得出

$$H_1(T) = \frac{v(1+r)^T(p/q)^n(\{1-p\}/\{1-q\})^{T-n-1}(p-q)}{S_{T-1}(u-d)q(1-q)}$$

及

$$H_0(T) = \frac{v(p/q)^n(\{1-p\}/\{1-q\})^{T-n-1}[u(1-p)q-d(1-q)p]}{(u-d)q(1-q)}$$

由于 $V_{T-1} = (1+r)^{T-1}H_0(T) + S_{T-1}H_1(T)$，经过某些代数运算可得到

$$V_{T-1} = v(1+r)^{T-1}(p/q)^n(\{1-p\}/\{1-q\})^{T-n-1}$$

现在考察以分数形式表示的资金在时间 $T-1$ 投资于风险证券。即

$$\frac{S_{T-1}H_1(T)}{V_{T-1}} = \frac{(1+r)(p-q)}{(u-d)q(1-q)} \tag{5.11}$$

注意这与 n 和 T 是无关的。此外，注意 V_{T-1}与 $V_T = W$ 具有相同的形式，这样归纳方法能够用于证明最优交易策略拥有非常简单的形式：在每一个时间及每一个状态对风险资产的投资仅仅为某人财富的分数形式(5.11)。

习题 5.5 对于满足常数利率 r 等于一般参数 $0 \leqslant r < 0.125$ 以及对数效用函数$u(w) = \ln(w)$的例 5.1 中的模型，使用风险中性计算方法计算出最优可达财富、最优目标值以及最优交易策略。

习题 5.6 对于满足 $r = 0$ 的例 5.1 的特殊情况，在效用函数

(a) $u(w) = -w^{-1}$

(b) $u(w) = \beta w - w^2/2$

下计算出最优可达财富、最优目标值以及最优交易策略。

习题 5.7 假设存在一个由满足常数利率 $r \geqslant 0$ 与一般参数值为 S_0，p，u 和d 的 T 时期二项式模型调节的单个风险证券。在指数效用$u(w) = -\exp(-w)$下，计算出最优可达财富、最优目标值以及最优交易策略。特别，证明如果时间 t 结点引起了n 次“上升”和 $t-n$ 次“下跌”，那么在最优策略下投资组合的对应值是

$$v(1+r)^t + \frac{[qt-n]\ln(q/p) + [(1-q)t + (n-t)]\ln((1-q)/(1-p))}{(1+r)^{T-t}}$$ 162

习题 5.8 对于习题 5.7 中的二项式模型，并且其满足二次效用函数$u(w) = \beta w - w^2/2$，证明最优可达财富是

$$W = \beta + \frac{(1+r)^T v - \beta}{[q^2/p + (1-q)^2/(1-p)]^T}\left(\frac{q}{p}\right)^n\left[\frac{1-q}{1-p}\right]^{T-n}$$

其中，n 是对应于样本路径中“上升”运动的次数。此外，证明最优目标值是

$$Eu(W) = \beta^2/2 - \frac{[(1+r)^T v - \beta]^2}{2[q^2/p + (1-q)^2/(1-p)]^T}$$

提示：

$$\sum_{n=0}^{T}\binom{T}{n}a^{n}b^{T-n}=(a+b)^{T}$$

习题 5.9 对于如同习题 5.7 及 5.8 的二项式模型，并且其满足等弹性用函数$u(w)=\gamma^{-1}w^{\gamma}$，证明最优可达财富是

$$W=\frac{(1+r)^{T}vL^{-1/(1-\gamma)}}{\left[p\left(\frac{q}{p}\right)^{-\gamma/(1-\gamma)}+(1-p)\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{-\gamma/(1-\gamma)}\right]^{T}}$$

以及最优目标值是

$$Eu(W)=\frac{1}{\gamma}[(1+r)^{T}v]^{\gamma}\left[p\left(\frac{q}{p}\right)^{-\gamma/(1-\gamma)}+(1-p)\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{-\gamma/(1-\gamma)}\right]^{T(1-\gamma)}$$

提示：参见习题 5.8。

5.3 消费投资与动态规划

一个消费过程（Consumption Process）$C=\{C_t:\ t=0,\dots,T\}$ 是一个非负的、适应的随机过程，其中 C_t 表示由投资者在时间 t 所消费的资金数目。一个消费投资计划（Consumption - investment Plan）是由一对（C，H）所组成的，其中 C 是一个消费过程以及 H 是一个交易策略。效用是由在每一个时期中所消费的数量来获得的；自然地，消费越高则效用
163 越大。投资者将企图选择使其 T 时期的期望效用最优的消费投资计划。特别，投资者面临在消费和投资之间的权衡，尤其是在开始的一些时期中。这节将阐述如何利用动态规划方法求解此问题。

在时间 0 和 T 之间，已知投资者的初始财富 v，如果不向投资组合增加资金或者从投资组合中撤出资金，那么消费投资计划（C，H）称为自融资的（Self-financing），而不是指消费数量的变化。像前面一样，

$$(5.12) \qquad V_t = H_0(t)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t)S_n(t), \quad t \geqslant 1$$

表示在任何时间 t 交易之前的投资组合的价值。假设对于 $t \geqslant 1$，V_t 也是在任何时间 t 消费之前（Before）投资组合的价值。我们设 $V_0 = v$ 表示初始财富。这样说（C，H）是自融资的意味着

$$(5.13) \quad V_t = C_t + H_0(t+1)B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n(t+1)S_n(t), t = 0, \dots, T-1$$

已知初始财富 v，一个自融资消费投资计划（C，H）称为是可取的(Admissible)，如果 $C_T \leqslant V_T$。由于 C 是非负的过程，这蕴含 $V_T \geqslant 0$。

投资者的消费投资问题是

$$(5.14) \qquad \begin{array}{ll} \max & E\left[\sum_{t=0}^{T} \alpha^t u(C_t)\right] \\ \text{s.t.:} & v = \text{初始财富} \\ & (C,\ H)\ \text{是可取的} \end{array}$$

其中 $u:\mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ 是一个特定凹的递增效用函数，而 α 是一个特定的满足 $0 < \alpha \leqslant 1$ 的纯量参数。由于消费过程要求成为非负的，所以为不失一般性假设 $u(w) = -\infty$，对于所有 $w < 0$（当然，否则 $u(w) > -\infty$ 对于所有 $w > 0$）。

为了利用动态规划方法求解这个问题，我们将依据时间倒推以递归方法来计算价值函数 $u_t(w)$。这表示以财富 w 开始且在时间 t 消费，同时已知时间 t 历史 $\mathscr{F}_t$，其经过时间 T 消费的最大期望效用。

u_T 的价值是容易规定的。由于效用函数 u 是递增的，投资者想要消费在最后时期可获得的所有财富。因此 $u_T = u$。

在时间 $T-1$ 以财富 w 开始，投资者所面临的问题在本质上与 2.3 节一系列的单时期问题是等价的：

$$(5.15) \qquad \max \quad u(C_{T-1}) + E[\alpha u_T(W) \mid \mathscr{F}_{T-1}]$$ 164

$$\text{s.t.:}\quad w = C_{T-1} + H_0(T)B_{T-1} + \sum_{n=1}^{N} H_n(T)S_n(T-1)$$

$$W = H_0(T)B_T + \sum_{n=1}^{N} H_n(T)S_n(T)$$

$$H_n(T) \in \mathscr{F}_{t-1} \quad \text{对于 } n = 0,\dots,N; C_{T-1} \in \mathscr{F}_{T-1}$$

注意，假设$u(w) = -\infty$对于所有 $w<0$，这将迫使（5.15）的解满足$C_{T-1}\geqslant 0$及$W\geqslant 0$。

运用第一个约束求解$H_0(T)$，然后将这个值代入到第二个约束中，人们最终得到：

$$W = (w - C_{T-1})B_T/B_{T-1} + \sum_{n=1}^{N} H_n(T)[S_n(T) - B_T S_n(T-1)/B_{T-1}]$$

$$= (w - C_{T-1})B_T/B_{T-1} + B_T\sum_{n=1}^{N} H_n(T)S_n^*(T)$$

因此，（5.15）能重新写为

$$\max\ u(C_{T-1}) + \alpha\, E\Big[u_T\Big((w - C_{T-1})B_T/B_{T-1} + B_T\sum_{n=1}^{N} H_n(T)\Delta S_n^*(T)\Big) \mid \mathscr{F}_{T-1}\Big]$$

$$\text{s.t.:}\quad HF(T)\in\mathscr{F}_{T-1} \quad \text{对于 } n=1,\dots,N \text{ 及 } C_{T-1}\in\mathscr{F}_{T-1}$$

现在，我们设$u_{T-1}(w)$等于这个最优目标值。

通常，一旦计算出$u_t(w)$，价值函数$u_{t-1}(w)$可由动态规划函数方程（Dynamic Programming Function Equation）

(5.16)
$$u_{t-1}(w) = \max\Big\{u(C_{t-1}) + \alpha E\Big(u_t\Big((w - C_{t-1})B_t/B_{t-1} + B_t\sum_{n=1}^{N} H_n(t)\Delta S_n^*(t)\Big) \mid \mathscr{F}_{t-1}\Big)\Big\}$$

计算出，其中最大值是关于所有$H_n(t)\in\mathscr{F}_{t-1}$对于 $n=1,\dots,N$ 及 $C_{t-1}\in$

$\mathscr{F}_{t-1}$而言的。于是价值函数$u_0(v)$将是原始问题（5.14）或（5.15）的最优目标值，C_{t-1}及$H_n(t)$的最大值将是最优消费投资计划的一个组成部分。最后分量 H_0 将来自于自融资方程。

例 5.7 考察满足利率常数 $r \geqslant 0$ 及效用函数$u(w)=u_2(w)=\ln(w)$的例 5.1 的证券模型。对于 $t=2$ 且状态 ω_1 和 ω_2 的动态规划函数方程是

(5.17) $$u_1(w)=\max\{\ln(c)+\frac{\alpha}{2}\ln[(w-c)(1+r)+(1-8r)h] + \frac{\alpha}{2}\ln[(w-c)(1+r)-(2+8r)h]\}$$ 165

计算自变量对于 c 及 h 的偏导数，然后令这些式子等于 0，得出两个方程；最终解出

$$c=\frac{w}{1+\alpha} \quad 及 \quad h=-\frac{1}{2}\frac{\alpha(1+r)(1+16r)w}{(1+\alpha)(2+8r)(1-8r)}$$

注意，这意味着如果 $S_1=8$ 以及在时间 $t=1$ 的财富为 w，那么立刻消费 $w/(1+\alpha)$是最优的，同时，通过对风险证券采取（空头）头寸 h 和对银行账户采取（自融资）头寸

$$H_0(2)=\frac{\alpha w/(1+\alpha)-8h}{1+r}$$

的投资来获得平衡。把这些 c 及 h 的值回代到动态规划方程（5.17），得出时间 1 时关于状态 ω_1 和 ω_2 的价值函数：

$$u_1(w)=(1+\alpha)\ln(w)+f_8(\alpha,r)$$

其中，为了方便起见$f_8(\alpha,r)$是由

$$f_8(\alpha,r)=\alpha\ln\left(\frac{3\alpha(1+r)}{2(1+\alpha)(1-8r)}\right)+\frac{\alpha}{2}\ln\left(\frac{1-8r}{2+8r}\right)-\ln(1+\alpha)$$

定义出的一个新函数。

类似地，如果 $S_1=4$，那么人们可计算出最优时间 1 的消费是 $c=w/(1+\alpha)$，最优的风险证券头寸：

$$h=\frac{1}{2}\frac{\alpha(1+r)(1-8r)w}{(1+\alpha)(2-4r)(1+4r)}$$

以及时间 1 时关于状态 ω_3 和 ω_4 的价值函数：

$$u_1(w)=(1+\alpha)\ln(w)+f_4(\alpha,r)$$

其中，为了方便起见 f_4 （α， r） 是由

$$f_4(\alpha,r)=\alpha\ln\left(\frac{3\alpha(1+r)}{2(1+\alpha)(1+4r)}\right)+\frac{\alpha}{2}\ln\left(\frac{1+4r}{2-4r}\right)-\ln(1+\alpha)$$

定义出的一个新函数。

此处对上面总结一下，

$$u_1(w)=\begin{cases}(1+\alpha)\ln(w)+f_8(\alpha,r), & \omega=\omega_1,\omega_2\\(1+\alpha)\ln(w)+f_4(\alpha,r), & \omega=\omega_3,\omega_4\end{cases}$$

166 从而，现在我们能够运用动态规划方程（5.16）来递归地计算出 u_0：

$$\begin{aligned}u_0(w)=\max_{c,h}\Big\{&\ln(c)+\frac{\alpha}{2}(1+\alpha)\ln[(w-c)(1+r)+(3-5r)h]\\&+\frac{\alpha}{2}f_8+\frac{\alpha}{2}(1+\alpha)\ln[(w-c)(1+r)-(1+5r)h]+\frac{\alpha}{2}f_4\Big\}\end{aligned}$$

计算偏导数等等，最后得出

$$c=\frac{w}{1+\alpha+\alpha^2}\quad 及\quad h=\frac{\alpha(1+\alpha)(1+r)(1-5r)w}{(1+\alpha+\alpha^2)(3-5r)(1+5r)}$$

在这种情况下

$$u_0(w)=(1+\alpha+\alpha^2)\ln(w)-\ln(1+\alpha+\alpha^2)+\alpha(1+\alpha)\ln\left(\frac{2\alpha(1+\alpha)(1+r)}{(1+\alpha+\alpha^2)}\right)$$
$$-\frac{\alpha}{2}(1+\alpha)\ln[(1+5r)(3-5r)]+\frac{\alpha}{2}f_8(\alpha,r)+\frac{\alpha}{2}f_4(\alpha,r)$$

如果你放宽假设$u(c)=-\infty$对于所有 $c\leqslant0$，那么动态规划方法还能用于计算最优消费投资计划，除非你明显地担心消费过程作为非负的约束。这会导致相当多的额外工作，如同在下面的例子中所看到的。

例 5.8 考察满足利率 $r=0$，$\alpha=1$ 及指数效用函数$u(c)=-\exp(-c)$的例5.1和5.7的证券模型。由于$u'(0)=1$,所以为了提防负的消费水平，显然有必要不仅在动态规划函数方程中决策变量 $c\geqslant0$ 的约束上，而且在下一个时期财富将成为非负的保证约束上施加影响。例如，关于状态 ω_1 和 ω_2 且时间 $t=1$ 的动态规划方程应该是

$$u_1(w)=\max_{\substack{c\geqslant0\\ w-c+h\geqslant0\\ w-c-2h\geqslant0}}\left\{-e^{-c}-\frac{1}{2}e^{-w+c-h}-\frac{1}{2}e^{-w+c+2h}\right\}$$

这三个约束定义出可行区域，即$\mathbb{R}^2$ 中具有顶点$(c,h)=(0,-w),(0,w/2)$及$(w,0)$的三角形子集。

我们通过检查偏导数来计算出决策变量 c 和h 的最大值。自变量对于 h 的偏导数等于 0 当且仅当 $h=-\frac{1}{3}\ln2$。自变量对于 c 的偏导数等于 0，当且仅当

$$c=\frac{1}{2}\{w+\ln2-\ln[e^{-h}+e^{2h}]\}$$ 167

代入 $h=-\frac{1}{3}\ln2=-0.231$，我们看到点 $(c,\ h)=(0.0283+w/2,\ -0.231)$ 使自变量在$\mathbb{R}^2$ 上达到最大值。这个点将落入可行区域，当且仅当 $w\geqslant0.5186$，在此情况下，我们通过代入方法得出$u_1(w)=-1.9442$

$e^{-w/2}$。

如果 $w=0.5186$，那么刚刚讨论的解将正好使得约束 $w-c+h\geqslant 0$。因此，我们认识到解 (c, h) 满足 $c=w+h$，对于所有 $w\leqslant 0.5186$。代入这一方程，目标函数变为 $-e^{-w-h}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{3h}$。此导数等于 0 当且仅当 $h=-w/4-0.1014$，在此情况下 $c=3w/4-0.1014$。但是注意到，这给出了 $c\geqslant 0$ 当且仅当 $w\geqslant 0.1352$。因此，我们得出结论：对于所有 w 满足 $0.1352\leqslant w\leqslant 0.5186$ 的最优解是 $(c, h)=(3w/4-0.1014, -w/4-0.1014)$，在此情况下，我们利用代入方法得到 $u_1(w)=-1.4756e^{-3w/4}-\frac{1}{2}$。

对于 $w=0.1352$，这个解给出 $c=0$。因此，我们认识到对于所有满足 $0\leqslant w\leqslant 0.1352$ 的 w 的最优解必是在三角形的顶点上，即 $c=0$ 和 $h=-w$ 的顶点，在此情况下，$u_1(w)=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-3w}$。

不用说，对于状态 ω_3 和 ω_4 的 $u_1(w)$ 的计算将是同样的困难（参见习题 5.13）。此外，由于 $u_1(w)$ 的杂乱特性，$u_0(w)$ 的计算将更为困难。不用对这个例子做更进一步的阐述，当你放宽假设 $u'(0)=\infty$ 时，显然计算上的困难将成为难以克服的。

习题 5.10 对于满足常数利率 $r=0$，效用参数 $\alpha=1$ 以及等弹性函数 $u(c)=-1/c$ 的例 5.1 的证券模型，运用动态规划方法计算出最优消费过程和最优交易策略。

习题 5.11 对于由满足参数 p，u，d，r 和 T 的二项式模型所调节的，满足效用参数 $\alpha\leqslant 1$ 以及对数效用 $u(c)=\ln(c)$ 单个证券模型，运用动态规划方法证明，在时间 t 最优消费数量是

$$C_t=\frac{W_t}{1+\alpha+\cdots+\alpha^{T-t}}$$

其中，W_t 是在时间 t 时可获得的财富。此外，证明在每一个时间 t 投入到风险证券的最优的分数形式投资资金是

$$\frac{S_t H_1(t+1)}{W_t - C_t} = \frac{(1+r)[pu + (1-p)d - (1+r)]}{(1+r-d)(u-1-r)}$$

最后，证明时间 t 的价值函数是$u_t(w) = (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{T-t})\ln(w)$加上一 168
个常数的形式。

习题 5.12 对于由满足 p，u，d，r 和 T 的二项式模型所调节的单个证券模型，满足效用参数 $\alpha \leqslant 1$ 以及等弹性效用$u(c) = c^{\gamma}/\gamma$，运用动态规划方法及归纳方法证明在时间 t 最优消费数量是 $C_t = k_t W_t$，其中 k_t 是一个依赖于t 的正的常数，而与状态 ω 无关。证明在每一个时间 t 投入到风险证券的最优的分数形式的投资资金是

$$\frac{S_t H_1\ (t+1)}{W_t - C_t} = \frac{(1+r)[(1-p)^{1/(\gamma-1)}(1+r-d)^{1/(\gamma-1)} - p^{1/(\gamma-1)}(u-1-r)^{1/(\gamma-1)}]}{-(1-p)^{1/(\gamma-1)}(1+r-d)^{\gamma/(\gamma-1)} + p^{1/(\gamma-1)}(u-1-r)^{\gamma/(\gamma-1)}}$$

最后，证明时间 t 的价值函数是$u_t(w) = \gamma_t w^{\gamma}$的形式，其中 γ_t 是一个依赖于t 的常数，而与状态 ω 无关。

习题 5.13 考察例 5.8 中的情况，计算$u_1(w)$及相对应的 c 和h 最大值，对于状态 ω_3 和 ω_4 对于所有 $w \geqslant 0$。

5.4 消费投资与鞅方法

作为与动态规划方法比较可选择的一种方法，即风险中性概率测度能够用来提供一种有效的求解消费投资问题（5.14）的方法，这一方法是人们对单时期模型的一种自然的推广。本节自始至终地假设存在惟一的鞅测度 Q，所以模型是完全的。一个消费过程称为是可达的（Attainable），如果存在一个交易策略 H，使得（C，H）是一个满足 $C_T = V_T$ 的可取的消费投资计划（隐含的内容是一个特定的初始财富 V）。在这种情况下，人们说 H 可复制（Replicates）或者生成（Generates）C 。

风险中性计算方法中的第一步是描述所有可达消费过程的集合。第二

步是找到这个集合中使期望效用最大化的元素，也就是（5.14）中的目标函数。最后，人们推导出生成这个最优 C 的那个自融资交易策略 H。

我们通过观察下面结果来开始：

(5.18) 已知初始财富 $v \geqslant 0$、一个消费过程 C 及一个自融资交易策略 H，人们有

$$V_t/B_t = v + G_t^* - \sum_{u=0}^{t-1} C_u/B_u, \quad t = 1, \dots, T$$

169 人们利用归纳方法能理解这点。读者能运用（5.13）来验证对于 $t=1$ 这是正确的。由归纳法的步骤，假设这个方程对于 $t=s$ 成立。现在（5.13）蕴含着

$$H_0(s+1) = V_s/B_s - C_s/B_s - \sum_{n=1}^{N} H_n(s+1) S_n^*(s)$$

所以，把这代入到满足 $t=s+1$ 的（5.12）中，然后用 B_{s+1}除得到

$$V_{s+1}/B_{s+1} = V_s/B_s + \sum_{n=1}^{N} H_n(s+1) S_n^*(s+1) - C_s/B_s$$

由于归纳假设（5.18）对于 $t=s$ 成立，因此这就完成了（5.18）对于 $t=s+1$ 成立的论证。

关系（5.18）能使我们能够描述可达消费过程。如果我们定义 $M_t = v + G_t^*$，那么 M 在风险中性概率测度 Q 下是一个鞅，满足 $M_0 = v$。因此，如果应用（5.18），那么 $M_t = V_t/B_t + C_0/B_0 + \cdots + C_{t-1}/B_{t-1}$以及

$$v = E_Q[V_t/B_t + C_0/B_0 + \cdots + C_{t-1}/B_{t-1}], \quad t = 1, \dots, T$$

另外，如果 $C_T = V_T$，那么

(5.19) $$v = E_Q[C_0/B_0 + \cdots + C_T/B_T]$$

换句话说，方程（5.19）是消费过程 C 成为可达的必要条件。可以证明，（5.19）也是充分条件，也就是

(5.20) 已知初始财富 $v \geqslant 0$，消费过程 C 是可达的当且仅当（5.19）成立。如果 V_0 是生成 C 的投资组合的价值，那么 $V_0 \geqslant 0$。

为了理解方程（5.19）是充分条件，观察到 $X \equiv B_T[C_0/B_0 + \cdots + C_T/B_T]$ 是可达的未定权益。实际上，X 应该被认为是 $T+1$ 个可达未定权益的组成成分，其中第 t 个权益是在时间 t 收到的 C_t 美元，然后将其存入银行账户并持有到时间 T。这样分别存在着生成 T 个未定权益 $C_{1,\cdots,}$ C_T 的自融资交易策略 H^1，…，H^T。取 $H \equiv H^1 + \cdots + H^T$，由此可得，$H$ 是一个自融资交易策略，使得（C，H）是一个满足 $C_T = V_T$ 的可取消费投资计划。

关于（5.20）的第二部分，我们从（5.18）中看到

$$V_t/B_t + \sum_{u=0}^{t-1} C_u/B_u = E_Q\Big[V_T/B_T + \sum_{u=0}^{T-1} C_u/B_u \,|\, \mathscr{F}_t\Big]$$

在 Q 下是一个满足时间 T 的价值等于

$$\sum_{u=0}^{T} C_u/B_u$$

的鞅。这样 170

$$V_t/B_t = E_Q\Big[\sum_{u=t}^{T} C_u/B_u \,|\, \mathscr{F}_t\Big]$$

必是非负的，对于所有 t。

假设效用函数满足 $u(c) = -\infty$ 对于所有 $c<0$，那么由（5.20），最优消费投资问题（5.14）等价于下面：

(5.21) $$\max \quad E\Big[\sum_{t=0}^{T} \alpha^t u(C_t)\Big]$$

$$\text{s.t.} \quad E_Q[C_0/B_0 + \cdots + C_T/B_T] = v$$
$$C \text{ 是一个适应过程}$$

关于效用函数的假设将保证最优解是一个非负的随机过程。鉴于（5.20），最优解将是一个可达的消费过程，其目标值大于或等于所有其他的可达消费过程。因此，对于（5.21）的解 C 来说，得到（5.14）解之后剩下的所有问题是推导出复制 C 的交易策略。

问题（5.21）能够运用拉格朗日乘子方法以类似于 5.2 节中最优投资组合问题的方式求解出。然而，这里的情形变得有些难以处理，因为决策变量不仅仅是一个随机变量，而是一个适应过程。下面的结果将起着关键性的作用。

(5.22)
$$E_Q\Big[\sum_{t=0}^{T} C_t/B_t\Big] = E\Big[\sum_{t=0}^{T} C_t N_t\Big]$$

其中，N 是一个由 $N_t = E[L \mid \mathscr{F}_t]\ /B_t$ 定义的适应随机过程，对于所有 t。

由于 $L = Q/P$，此结果经过简单计算得出

$$\begin{aligned} E_Q\Big[\sum_{t=0}^{T} C_t/B_t\Big] &= E\Big[L\sum_{t=0}^{T} C_t/B_t\Big] \\ &= E\Big[\sum_{t=0}^{T} E[C_t L/B_t \mid \mathscr{F}_t]\Big] = E\Big[\sum_{t=0}^{T} C_t N_t\Big] \end{aligned}$$

因此，问题（5.21）能够重新写成如下：

(5.23)
$$\max \quad E\Big[\sum_{t=0}^{T} \alpha^t u'(C_t)\Big]$$
$$\text{s.t.} \quad E\Big[\sum_{t=0}^{T} C_t N_t\Big] = v$$
$$C \text{ 是一个适应过程}$$

171 一旦引进拉格朗子乘子 λ，现在我们就要求解

$$(5.24)\qquad \max \quad E\Big[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u(C_t)-\lambda\sum_{t=0}^{T}C_tN_t\Big]$$

由于对效用函数 u 的合适假设，这能促使最优解 C 将以严格正的消费值为特征（也就是，有必要要求边际效用$u'(c)$收敛于∞，当 C 由大于 0 的方向逼近 0 时；$u'(c)$收敛于 0，当 C 趋向∞时），所以下面一阶必要条件必满足：

$$(5.25)\qquad \alpha^t u'(C_t)=\lambda N_t,\quad \text{所有 } \omega\in\Omega,\quad t=0,\dots,T$$

等价地，如果$I(\cdot)$是边际效用函数$u'(\cdot)$的反函数，那么我们必有

$$(5.26)\qquad C_t=I(\lambda N_t/\alpha^t),\quad \text{所有 } \omega\in\Omega,\quad t=0,\dots,T$$

剩下的所有问题是确定拉格朗日乘子 λ 的正确值；这正是当（5.26）代入时，使得（5.23）中约束满足的那个值，也就是 λ 的正确值是

$$(5.27)\qquad E\Big[\sum_{t=0}^{T}N_tI(\lambda N_t/\alpha^t)\Big]=v$$

的惟一解。

例 5.9 由于$u(c)=\ln(c)$，我们有$u'(c)=c^{-1}$和 $I(i)=i^{-1}$，在此情况下，$I(\lambda N_t/\alpha^t)=\alpha^t/(\lambda N_t)$。方程（5.27）成为

$$v=E\Big[\sum_{t=0}^{T}N_t\alpha^t/(\lambda N_t)\Big]=\frac{1}{\lambda}\sum_{t=0}^{T}\alpha^t$$

这样

$$\lambda=\begin{cases}\dfrac{T+1}{v}, & \alpha=1\\[2mm] \dfrac{1-\alpha^{T+1}}{v(1-\alpha)}, & \alpha<1\end{cases}$$

由（5.26）可得，最优解是

$$C_t = \frac{\alpha^t}{\lambda N_t} = \begin{cases} \dfrac{v}{(T+1)N_t}, & \alpha = 1; \quad t = 0, \cdots, T \\ \dfrac{\alpha^t v(1-\alpha)}{(1-\alpha^{T+1})N_t}, & \alpha < 1; \quad t = 0, \cdots, T \end{cases}$$

于是，例如，当 $\alpha = 1$ 时，最优目标值是 $(T+1)\ \ln\ \{v/\ (T+1)\}\ - E\ \ln\ (N_0)\ - \cdots - E\ \ln\ (N_T)$。

例 5.1 和 5.9（续） 对于满足常数利率 $r \geqslant 0$ 的例 5.1 的证券模型，随机过程 N 如下所示：

172

ω	$P(\omega)$	$L(\omega)$	N_0	N_1	N_2
ω_1	1/4	$\frac{(1+5r)\ (2+8r)}{3}$	1	$\frac{1+5r}{2\ (1+r)}$	$\frac{L}{(1+r)^2}$
ω_2	1/4	$\frac{(1+5r)\ (1-8r)}{3}$	1	$\frac{1+5r}{2\ (1+r)}$	$\frac{L}{(1+r)^2}$
ω_3	1/4	$\frac{(3-5r)\ (1+4r)}{3}$	1	$\frac{(3-5r)}{2\ (1+r)}$	$\frac{L}{(1+r)^2}$
ω_4	1/4	$\frac{(3-5r)\ (2-4r)}{3}$	1	$\frac{(3-5r)}{2\ (1+r)}$	$\frac{L}{(1+r)^2}$

最优消费过程是 $C_t = \alpha^t v\ /[(1+\alpha+\alpha^2)N_t]$，所以，特别

$$C_2 = V_2 = \frac{\alpha^2 v(1+r)^2}{(1+\alpha+\alpha^2)L}$$

现在，通过考虑如何复制未定权益 V_2，我们在状态 ω_1 和 ω_2 下分别必有

$$(1+r)^2 H_0(2) + 9H_1(2) = \frac{\alpha^2 v(1+r)^2}{(1+\alpha+\alpha^2)L(\omega_1)}$$

及

$$(1+r)^2 H_0(2) + 6H_1(2) = \frac{\alpha^2 v(1+r)^2}{(1+\alpha+\alpha^2)L(\omega_2)}$$

对$H_0(2)$和 $H_1(2)$求解得出

$$H_1(2)=\frac{\alpha^2 v(1+r)^2(1+16r)}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+5r)(2+8r)(1-8r)}$$

及

$$H_0(2)=\frac{12\alpha^2 v(1+10r)}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+5r)(2+8r)(1-8r)}$$

因而，仅仅在时间 1 消费之后投资组合的价值是

$$(1+r)H_0(2)+8H_1(2)=\frac{4\alpha^2 v(1+r)(1+4r)}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+5r)(2+8r)}$$

对此加上 C_1，得到在状态 ω_1 和 ω_2 下仅仅在时间 1 消费之前投资组合的价值是

$$V_1=\frac{2\alpha v(1+r)(1+\alpha)}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+5r)}$$

以类似的方式，我们计算出在状态 ω_3 和 ω_4 下的

$$H_1(2)=\frac{\alpha^2 v(1+r)^2(1-8r)}{(1+\alpha+\alpha^2)(3-5r)(1+4r)(2-4r)}$$

$$H_0(2)=\frac{36\alpha^2 vr}{(1+\alpha+\alpha^2)(3-5r)(1+4r)(2-4r)}$$

及

$$V_1=\frac{2\alpha v(1+r)(1+\alpha)}{(1+\alpha+\alpha^2)(3-5r)}$$

最后，我们计算出将复制 V_1 的交易策略，得出

$$H_1(1)=\frac{\alpha(1+\alpha)(1+r)(1-5r)v}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+5r)(3-5r)}$$

及

$$H_0(1)=\frac{2\alpha(1+\alpha)(-1+15r)v}{(1+\alpha+\alpha^2)(1+5r)(3-5r)}$$

注意到，$C_0+H_0(1)+5H_1(1)=v$，如同所需要的一样。

习题 5.14 运用鞅方法证明，满足等弹性效用函数$u(c)=c^\gamma/\gamma$，$\gamma<1$，$\gamma\neq0$，最优消费过程是由

$$C_t=\frac{v}{\Delta}\alpha^{t/(1-\gamma)}N_t^{1/(\gamma-1)}$$

给出的，同时最优目标值是由 $v^\gamma\Delta^{1-\gamma}/\gamma$ 给出的，其中

$$\Delta=\sum_{t=0}^{T}\alpha^{t/(1-\gamma)}E[N_t^{\gamma/(\gamma-1)}]$$

习题 5.15 对于满足 $\alpha\leqslant1$、初始财富 v、常数利率 $r\geqslant0$ 以及等弹性效用函数$u(c)=c^\gamma/\gamma$ 的例 5.1 的证券模型，运用风险中性计算方法写出最优消费过程 C 的代数公式。计算出此过程的数值以及 $\gamma=-1$，$\alpha=1$ 和 $r=0$ 在特殊情况下的最优交易策略。

5.5 来自于消费及最终财富的最大效用

这节我们研究既由每一个时期的消费又由以后用于时间 T 时的资金

数目所导致的效用的问题。这是普通消费投资问题的适度推广，其中现在时间 T 的财富 V_T 的一部分仅用于消费 C_T，余下的 $V_T - C_T$ 用于将来投 174
资。这种新的情形等价于普通消费投资问题，只是时间 T 的消费效用函数允许与其他时期的效用函数相区别。不出人们所料，运用稍微推广的动态规划方法或者风险中性计算方法很容易来求解这种推广化的消费投资问题。

本节自始至终地假设存在着惟一的风险中性概率测度 Q，所以模型是完全的。设 $\mathscr{A}_v$ 表示具有初始财富 $V_0 = v$ 的所有可取的消费投资计划，于是每一个 $(C, H) \in \mathscr{A}_v$ 都是满足 C 非负的、适应过程具有 $C_T \leqslant V_T$ 的自融资。

对于推广的消费投资问题，二次凹的、递增的效用函数规定为：u_c 测量了每一个时期且满足 $u_c(c) = -\infty$ 对于所有 $c<0$（为了计算上的方便，我们通常这样假设，此外 $u'_c(c) \to \infty$ 当 $c \searrow 0$）的消费效用；而 u_p 测量了保存到将来时间 T 的资金的效用，如同普通的最优投资组合问题一样。此问题是选取使期望整体效用，即

$$E\Big[\sum_{t=0}^{T} \alpha^t u_c(C_t) + \alpha^T u_p(V_T - C_T)\Big]$$

最大化的 $(C, H) \in \mathscr{A}_v$。

我们还对相对应的价值函数（Value Function）感兴趣，作为初始财富 v 的函数，价值函数与最优目标值保持着联系。这表示成 $J(v)$，并且是由

$$J(v) = \max_{(C,H)\in\mathscr{A}_v} E\Big[\sum_{t=0}^{T} \alpha^t u_c(C_t) + \alpha^T u_p(V_T - C_T)\Big] \tag{5.28}$$

给出。

借助于动态规划方法我们运用了（5.16），这确实与关于普通消费投资问题的递归函数方程相同，对于 $t = 1, \cdots, T$，也就是

$$u_{t-1}(w) = \max_{C,H} \{ u_c(C) + \alpha E(u_t((w - C)B_t/B_{t-1}$$

$$+ B_t \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*(t)) | \mathscr{F}_{t-1})\}$$

其中，最大值是在所有 $H_n \in \mathscr{F}_{t-1}$ 对于 $n=1$，…，N 以及所有 $C \in \mathscr{F}_{t-1}$ 上取得的。像往常一样，函数 $u_t(w)$ 被解释成在时间 t 开始具有财富 w 的期望折现效用的最大值，因此 $u_0(w)=J(w)$。此外，在递归地计算出 u_t 函数之后，人们通过以 $t=1$ 开始取 H 和 C 的最大值来得到最优消费投资计划。

175 在普通消费投资问题的动态规划方法与此处的方法之间极其重要的差异是对最终效用函数 u_T 的规定说明。在前者中，人们简单地取 $u_t(w)=u_c(w)$，因为在时间 T 具有财富 w 显然需要做的事情就是消费一切。但是现在这里的情形是，人们需要最优地分配在即刻消费和最终投资之间的财富，这意味着人们应该取

$$u_T(w) = \max_{0 \leqslant c \leqslant w} \{u_c(c) + u_p(w-c)\} \tag{5.29}$$

因此，以消费并考虑最终财富为特征的问题的动态规划方法，在本质上与普通的消费投资问题的求解方法相同，只是与时间 T 消费相联系的效用应该如同（5.29）中一样代替 u_c。

例 5.10 假设 $u_c(c)=\ln(c)$ 及 $u_p(w)=w^\gamma/\gamma$，满足 $\gamma<1$ 且 $\gamma \neq 0$，这样 $u_T(w)=\max\{\ln(c)+(w-c)^\gamma/\gamma\}$。一些计算可以证明，最大值 c 是方程 $c=(w-c)^{1-\gamma}$ 的根。例如，如果 $\gamma=-1$，那么

$$c = w + 1/2 - \sqrt{w+1/4} = [\sqrt{w+1/4} - 1/2]^2$$

在此情况下

$$\begin{aligned} u_T(w) &= 2\ln(\sqrt{w+1/4} - 1/2) - \frac{1}{\sqrt{w+1/4} - 1/2} \\ &= 2u_c(g(w)) + u_p(g(w)) \end{aligned}$$

其中，g 是凹的、递增函数 $g(w)=\sqrt{w+1/4}-1/2$，其定义域为［0,

∞)。

转到风险中性计算方法上，鉴于（5.19）和（5.20），显然下面的结果成立：

(5.30) 已知初始财富 $v \geqslant 0$ 及可行的消费投资计划（C，H），人们有

$$v = E_Q\left[C_0/B_0 + \cdots + C_{T-1}/B_{T-1} + V_T/B_T\right]$$

相反地，如果方程成立，而且如果 C 是一个满足 $C_T \leqslant V_T$ 的消费过程，那么存在一个交易策略 H，使得（C，H）是一个满足 $v \geqslant 0$ 的可取消费投资计划。

由此可见，我们的优化问题能够用公式表示成如下：

$$\begin{aligned}
\max \quad & E\left[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u_c(C_t) + \alpha^T u_p(V_T - C_T)\right] \\
\text{s.t.} \quad & v = E_Q\left[C_0/B_0 + \cdots + C_{T-1}/B_{T-1} + V_T/B_T\right] \\
& V_T \geqslant C_T, V_T \in \mathscr{F}_T \\
& C \text{ 是一个适应过程}
\end{aligned}$$

我们的假设：$u'_c(c) \to \infty$ 当 $c \searrow 0$ 将保证最大的消费过程满足 $C_t > 0$ 对于所有 t。另外，我们将假设 $u'_p(w) \to \infty$ 当 $w \searrow 0$，以至于利用最优解，约束 $V_T > C_T$ 将自动地满足。换句话说，关于效用函数的这些假设足够使下面的最优化问题公式有解： 176

(5.31)
$$\begin{aligned}
\max \quad & E\left[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u_c(C_t) + \alpha^T u_p(V_T - C_T)\right] \\
\text{s.t.} \quad & v = E_Q\left[C_0/B_0 + \cdots + C_{T-1}/B_{T-1} + V_T/B_T\right] \\
& C \text{ 是一个适应过程} \\
& V_T \in \mathscr{F}_T
\end{aligned}$$

最优解将立刻给出一个满足 $C_t > 0$ 对于所有 t 且 $C_T < V_T$ 的消费过程。由（5.30）得出，存在一个使（C，H）必是初始最优化问题的解的可行消

费投资计划的交易策略 H。

问题（5.31）可利用与求解问题（5.21）相同的方法来解出。我们引进拉格朗日乘子 λ 以及由 $N_t = E[L|\mathscr{F}_t]/B_t$ 定义的适应过程 N，从而允许我们把（5.31）重写成

$$\max \quad E[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u_c(C_t) + \alpha^T u_p(V_T - C_T) - \lambda\sum_{t=0}^{T-1} C_t N_t - \lambda V_T N_T]$$

其中，最大值是在随机过程 C 及随机变量 V_T 上取得的。对每一个 C_t 求微分，然后对 V_t 求微分，我们看到下面的一阶必要条件必是满足的：

$$\begin{aligned}&\alpha^t u'_c(C_t) = \lambda N_t, \qquad t = 0,\cdots,T-1\\&\alpha^T u'_c(C_T) = \alpha^T u'_p(V_T - C_T),\\&\alpha^T u'_p(V_T - C_T) = \lambda N_T\end{aligned}$$

引入 $I_c(\cdot)$表示边际效用函数 $u'_c(\cdot)$的反函数，以及 $I_p(\cdot)$表示边际效用函数 $u'_p(\cdot)$的反函数，由此可得，最优解必满足

(5.32)
$$\begin{aligned}C_t &= I_c(\lambda N_t/\alpha^t), t = 0,\cdots,T\\V_T &= I_c(\lambda N_T/\alpha^T) + I_p(\lambda N_T/\alpha^T)\end{aligned}$$

对于某一个纯量 λ 的值。正确的 λ 值是通过把（5.32）代入到（5.31）中满足约束中的一个，即

(5.33)
$$E\left[\sum_{t=0}^{T} I_c(\lambda N_t/\alpha^t)N_t + I_p(\lambda N_T/\alpha^T)N_T\right] = v$$

177 利用 λ 的这个值，从而最优目标值是

$$J(v) = E\left[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u_c(I_c(\lambda N_t/\alpha^t)) + \alpha^T u_p(I_p(\lambda N_T/\alpha^T))\right]$$

例 5.10（续） 假设 $u_c(c) = \ln(c)$及 $u_p(w) = -1/w$,所以 $I_c(i)$

$= 1/i$ 及 $I_p(i) = 1/\sqrt{i}$。因此,(5.33) 成为

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{t=0}^{T}\alpha^t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}E\left[\sqrt{N_T\alpha^T}\right] = v$$

所有 λ 的正确值能够通过求解一个简单的二次方程来获得。

如果效用函数是充分可微的,那么我们能把这些结果加强一些。由

$$f(\lambda) = E\left[\sum_{t=0}^{T} I_c(\lambda N_t/\alpha^t)N_t + I_p(\lambda N_T/\alpha^T)N_T\right]$$

定义 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$,这样方程(5.33)与$f(\lambda)=v$ 是相同的。利用关于效用函数较次要的假设,函数 f 将是连续的且严格递减的,在此情况下它有反函数,记作 g。因此,$f(\lambda)=v$ 当且仅当$\lambda=g(v)$。特别,(5.32)中最优解的表达式成为

$$\begin{aligned} C_t &= I_c(g(v)N_t/\alpha^t), \qquad t=0,\cdots,T \\ V_T &= I_c(g(v)N_T/\alpha^T) + I_p(g(v)N_T/\alpha^T) \end{aligned}$$

及最优目标值$J(v)=K(g(v))$,这里我们已经引入函数

$$K(\lambda) \equiv E\left[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u_c(I_c(\lambda N_t/\alpha^t)) + \alpha^T u_p(I_p(\lambda N_T/\alpha^T))\right]$$

但是

$$f'(\lambda) = E\left[\sum_{t=0}^{T} I'_c(\lambda N_t/\alpha^t)N_t^2/\alpha^t + I'_p(\lambda N_T/\alpha^T)N_T^2/\alpha^T\right]$$

所以

$$K'(\lambda) = E\left[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u'_c(I_c(\lambda N_t/\alpha^t))\frac{d}{d\lambda}I_c(\lambda N_t/\alpha^t)\right.$$

$$+\alpha^T u'_p(I_p(\lambda N_T/\alpha^T))\frac{d}{d\lambda}I_p(\lambda N_T/\alpha^T)\Big]$$

178

$$= E\Big[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t(\lambda N_t/\alpha^t)\frac{d}{d\lambda}I_c(\lambda N_t/\alpha^t)+\alpha^T(\lambda N_T/\alpha^T)\frac{d}{d\lambda}I_p(\lambda N_T/\alpha^T)\Big]$$

$$= E\Big[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t(\lambda N_t/\alpha^t)^2 I'_c(\lambda N_t/\alpha^t)+\alpha^T(\lambda N_T/\alpha^T)^2 I'_p(\lambda N_T/\alpha^T)\Big]$$

$$= \lambda f'(\lambda)$$

由此可得

$$J'(v)=g(v)$$

因为由微分运算的标准规则知

$$J'(v)=K'(g(v))g'(v)=g(v)f'(g(v))g'(v)=g(v)$$

注意到，g 函数将是正的且严格递减的，所以我们从这些计算中得出结论：价值函数 J 是严格递增的且严格凹的。

习题 5.16 对于具有一种证券满足$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$，$S_0=4$，$S_1(\omega_1)=5$，$S_1(\omega_2)=3$，$\alpha=1$ 以及常数利率 $r=0$ 的简单的单一时期模型，假设效用函数如同例 5.10 中的一样，满足 $\gamma=-1$。此外，假设 $P(\omega_1)=2/3$。运用：

(a) 动态规划方法

(b) 风险中性计算方法

计算这节推广的消费投资问题的最优消费过程及交易策略。

习题 5.17 证明对应于具有一般的参数 γ 值的，弹性效用函数 $u(w)=\gamma^{-1}w^{\gamma}$，其中 $-\infty<\gamma<1$ 且 $\gamma\neq0$ 的 $g(v)$ 函数是由

$$g_c(v)=v^{\gamma-1}\Big(E\Big[\sum_{t=0}^{T}N_t^{\gamma/(\gamma-1)}\alpha^{t/(1-\gamma)}\Big]\Big)^{1-\gamma}$$

与

$$g_p(v) = v^{\gamma-1}(E[L^{\gamma/(\gamma-1)}B_T^{\gamma/(1-\gamma)}])^{1-\gamma}$$

给出的，它们分别代表普通的消费投资问题与普通的最优投资组合问题。

习题 5.18 证明如果 $u_p(w)=\ln(w)$，那么普通的最优投资组合问题的 $g(v)=1/v$，满足 $u_c=0$。

5.6 带约束的最优投资组合

在本节中大部分的思想是 2.5 节中单时期概念的直接推广。$\mathbb{R}^N$ 中的一个非空的、闭的凸子集$\mathbb{K}$是特定的，且当交易策略表示成以分数形式刻 179
画的财富持有风险证券的 N 维向量时，交易策略需要在每一个时间 t 成为$\mathbb{K}$中的一个元素。关于$\mathbb{K}$的例子已经在 2.5 节中给出。这种约束的多时期问题能够利用动态规划方法或者风险中性计算方法求解，这些内容将在下面给予讨论。

说得确切些，交易策略（Trading Strategies）将是 $F=(F_1,\cdots,F_N)$的形式，其中每一个 $F_n=\{F_n(t):t=1,\cdots,T\}$是一个表示时间$t-1$时投资于证券 n 的分数形式的财富，且一直持有到时间 t 的满足$F_n(t)=H_n(t)S_n(t-1)/V_{t-1}$的可料随机过程。假设交易策略是自融资的，由此可得，$1-F_1(t)-\cdots-F_N(t)$是时间 $t-1$ 时投资于银行账户的分数形式的财富。通常，$F_n(t)$值能够小于零或者大于 1。然而，利用约束集合$\mathbb{K}$的规定，关于一个交易策略成为可取的，其必要条件是$F(t)\in\mathbb{K}$，对于 $t=1$，…，T。设$\mathscr{A}$表示所有这种可取交易策略的集合。

根据 3.2 节的内容，时间 T 的投资组合价值 V_T 能够表示成

$$V_T = v\prod_{t=1}^{T}\left[1+r_t+\sum_{n=1}^{N}F_n(t)\{\Delta R_n(t)-r_t\}\right]$$

其中 v 是初始财富，$r_t=(B_t-B_{t-1})/B_{t-1}$是与区间 $[t-1,\ t]$ 相联系的利率，而 $\Delta R_n(t)=R_n(t)-R_n(t-1)$是与证券 n 相联系的收益过程的变化。由效用函数 u 和初始财富 v 的规定，约束的最优投资组合问题是

(5.34)
$$\begin{aligned} &\max \quad Eu(V_T) \\ &\text{s.t.} \quad F \in \mathscr{A}, \quad V_0 = v \end{aligned}$$

相对应的价值函数（Value Function）是

$$J(v) \equiv \sup_{F \in \mathscr{A}} Eu(V_T)$$

这个问题能够利用动态规划方法凭借递归动态规划函数方程解出：

$$u_{t-1}(w) = \max_{F \in \mathbb{K}} E\left[u_t\left(w\left\{1 + r_t + \sum_{n=1}^{N} F\{\Delta R_n(t) - r_t\}\right\}\right) \Big| \mathscr{F}_{t-1}\right]$$

对于 $t=1, 2, \cdots, T$ 以及边界条件 $u_T(w) = u(w)$。这样，当你在时间 t 以初始财富 w 开始且可得信息为 $\mathscr{F}_t$ 时，$u_t(w)$ 表示最终财富的最大期望效用。特别，$J(v) = u_0(v)$。动态规划方法在下面的例子中加以阐述。

例 5.11 考察例 5.1 中两个时期的单一证券模型，满足利率 $r_t = 0$。某些相关的数据资料如下：

180

ω	$P(\omega)$	$\Delta R_1(\omega)$	$\Delta R_2(\omega)$
ω_1	1/4	3/5	1/8
ω_2	1/4	3/5	-2/8
ω_3	1/4	-1/5	2/4
ω_4	1/4	-1/5	-1/4

假设效用函数 $u(w) = \ln(w)$，同时对风险证券的卖空是禁止的，所以 $\mathbb{K} = [0, \infty)$。关于 $t=2$ 及 $\omega = \omega_1, \omega_2$ 的动态规划方程是

$$\begin{aligned} u_1(w) &= \max_{F \geqslant 0} E[\ln(w\{1 + F\Delta R_2\}) \mid S_1 = 8] \\ &= \max_{F \geqslant 0} \left\{\frac{1}{2}\ln[w(1 + F/8)] + \frac{1}{2}\ln[w(1 - F/4)]\right\} \end{aligned}$$

函数自变量是关于 F 的凹函数，而且它的导数在 $F=0$ 处是负的，所以自变量在 $[0,\infty)$ 上的 $F=0$ 处取值是最大的。代入这个值得出，$u_1(w)=\ln(w)$对于 ω_1 及 ω_2。

关于 $t=2$ 及 $\omega=\omega_3$，ω_4 的动态规划方程是

$$u_1(w)=\max_{F\geqslant 0}\left\{\frac{1}{2}\ln[w(1+F/2)]+\frac{1}{2}\ln[w(1-F/4)]\right\}$$

这里的自变量是关于 F 的凹函数，但是在 $F=0$ 的导数是正的，所以自变量在 $[0,\infty)$ 上导数等于 0 的点取得最大值。这很容易地计算出来 $F=1$，将此代入，得出

$$u_1(w)=\ln(3)-\frac{3}{2}\ln(2)+\ln(w)$$

对于 ω_3 和 ω_4。

关于 $t=1$ 的动态规划方程是

$$\begin{aligned}u_0(w)&=\max_{F\geqslant 0}E[u_1(w\{1+F\Delta R_1\})]\\&=\max_{F\geqslant 0}\left\{\frac{1}{2}\ln[w(1+3F/5)]+\frac{1}{2}\left(\ln(3)-\frac{3}{2}\ln(2)+\ln[w(1-F/5)]\right)\right\}\end{aligned}$$

如上所述，F 最大值被计算出来是 $F=5/3$，同时把此值代入上式中，得出价值函数

$$u_0(v)=J(v)=\ln(v)+\frac{1}{4}\ln(2)$$

概括地说，最优策略是从银行借款 $2v/3$ 美元，在时间 0 时对风险证券投资 $5v/3$ 美元（由于 $S_0=5$，这意味着人们应该购买 $v/3$ 单位或股份）。如果 $S_1=8$，那么在时间 1 投资组合将值 $2v$ 美元；显然这部分应该在银行账户上一直持有到时间 2，在两个状态 ω_1 及 ω_2 下以 $2v$ 美元结束。如果 $S_1=4$，那么在时间 1 投资组合将值 $2v/3$ 美元。在这种情况下，一 181

且对银行账户不采取任何头寸时，确实以这笔资金投资于风险证券就是最优的（也就是，做多 $v/6$ 单位）。因而，人们在状态 ω_3 及 ω_4 分别以 v 和 $v/2$ 美元结束。

关于约束的多时期问题的风险中性计算方法与单时期问题的方法非常相似，只是一个重要的情况除外：现在纯量参数 v 将是一个可料的随机过程。如前所述，支撑函数（Support Function）$\delta(x):\mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ 中的 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是凸的，且是由

$$\delta(x) \equiv \sup_{F\in\mathbb{K}}(-Fx')$$

来定义的。δ 的有效定义域（Effective Domain）是一个凸锥 $\tilde{\mathbb{K}} \equiv \{x\in\mathbb{R}^N:\ \delta(x)<\infty\}$。假设 $\mathbb{K}$ 是使得 δ 在 $\tilde{\mathbb{K}}$ 上是连续的。另外，假设 $0\in\mathbb{K}$，这样 $\delta\geqslant 0$。δ 和 $\tilde{\mathbb{K}}$ 的例子已在 2.5 节中给出。

现在我们引进一个可料的随机过程 $\kappa=\{\kappa(t):t=1,\cdots,T\}$，其需要满足 $\kappa(t)\in\tilde{\mathbb{K}}$ 对于所有 $t\geqslant 1$。这样，$\kappa(t,\omega)$ 将是一个 N 维向量；它的第 n 个分量将对应于第 n 个风险证券，这点将立刻给出证明。设 $\mathcal{N}$ 表示所有这种过程 κ 的集合。

其次，我们依照

$$\begin{aligned} r_t &\to r_t+\delta(\kappa(t)), & & t\geqslant 1 \\ \Delta R_n(t) &\to \Delta R_n(t)+\delta(\kappa(t))+\kappa_n(t) & & n=1,\cdots,N;\ t\geqslant 1 \end{aligned}$$

通过对银行账户和风险证券的收益过程的修正来定义一个辅助市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 对于每一个 $\kappa\in\mathcal{N}$，对于每一个这样的市场，设 Q_κ 表示相对应的风险中性概率测度，如果它存在的话。注意到，满足 $\kappa=0$ 的市场 $\mathcal{M}_0$ 是与初始市场相同的，因为 $\delta(0)=0$。经常存在的情况是，Q_κ 存在且是惟一的，在这种情况下利用假设 $\delta(\cdot)$ 的连续性，惟一的 Q_κ 将在 $\kappa=0$ 的某一个邻域内存在对于所有 $\kappa\in\mathcal{N}$。

对于市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 和任何一个交易策略 F，无论 F 是可取的还是不可取的，投资组合时间 T 的价值是

$$(5.35)\ V_T^{\kappa} = v\prod_{t=1}^{T}\left[1 + r_t + \delta(\kappa_t) + \sum_{n=1}^{N}F_n(t)\{\Delta R_n(t) + \kappa_n(t) - r_t\}\right]$$
$$= v\prod_{t=1}^{T}\left[1 + r_t + \sum_{n=1}^{N}F_n(t)\{\Delta R_n(t) - r_t\} + \delta(\kappa_t) + F(t)\kappa_t{}'\right]$$

其中，纯量 $F(t)\kappa_t'$ 表示行向量$F(t)$与列向量 κ_t' 的内积。

对于每一个 $\kappa\in\mathcal{N}$，我们将对无约束的最优投资组合问题感兴趣：

$$\begin{aligned}&\max \quad Eu(V_T^{\kappa})\\&\text{s.t.} \quad V_0 = v\end{aligned}$$

换句话说，这是市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 的普通的最优投资组合问题。设$J_\kappa(v)$表示相对应的最优目标值。

考虑一个满足 $\kappa\neq 0$ 的任意市场 $\mathcal{M}_\kappa$。如同单时期模型情况那样，如果 182
$F(t)\in\mathbb{K}$对于所有 t，那么由$\delta(\cdot)$的定义，人们有$\delta(\kappa_t)+F(t)\kappa_t'\geqslant 0$ 对于所有 ω 和 t，在此情况下由（5.35）得$V_T^{\kappa}\geqslant V_T^0$对于所有 $\omega\in\Omega$。另一方面，如果$F(t)\notin\mathbb{K}$对于某一个 t，那么$\delta(\kappa_t)+F(t)\kappa_t'\geqslant 0$ 不会成立对于所有 ω 和 t，在这种情况下人们有 $V_T^{\kappa}< V_T^0$对于某一个 $\omega\in\Omega$。特别，如果$F(t)\notin\mathbb{K}$对于某一个 t，那么可能有$Eu(V_T^{\kappa})<Eu(V_T^0)$。由于这个原因，可能有$J_\kappa(v)<J_0(v)$对于某一个$\kappa\in\mathcal{N}$，也就是某一个辅助市场中无约束问题的最优目标值严格小于初始市场中无约束问题的最优目标值。

现在对于一个满足 $\kappa\neq 0$ 的任意市场 $\mathcal{M}_\kappa$，显然无约束问题的最优目标值$J_\kappa(v)$大于或者等于约束问题的最优目标值（因为如果你增加了一些约束，那么作为最大的最优目标值将不增加）。

此时，假设$F(t)$表示初始约束问题的最优交易策略，其具有最优目标值$J(v)$。利用（5.35）我们有 $V_T^0\leqslant V_T^{\kappa}$，在此情况下$J(v)=Eu(V_T^0)\leqslant Eu(V_T^{\kappa})$。但是，这个不等式的右边将小于或者等于市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中约束问题的最优目标值。

把前面两段的不等式放在一起，于是我们有

$$(5.36)\qquad J(v)\leqslant J_\kappa(v),\quad \text{所有 } \kappa\in\mathcal{N}$$

如果这是一个等式对于某一个 $\kappa\in\mathcal{N}$，由于下面的原理（2.49）的推广，

那么对应于右边的最优的 F 是初始约束问题的解的候选者：

(5.37) 假设对于某一个 $\hat{\kappa}\in\mathcal{N}$，市场 $\mathcal{M}_{\hat{\kappa}}$ 中的无约束投资组合问题的最优交易策略 F，满足

(a) $F\in\mathcal{A}$（也就是，$F(t)\in\mathbb{K}$，对于所有 $t\geqslant 1$）

(b) $\delta(\hat{\kappa}(t))+F(t)\hat{\kappa}'(t)=0$，所有 $t\geqslant 1$

那么 F 是初始市场 $\mathcal{M}_0$ 中约束问题最优的，且 $J(v)=J_{\hat{\kappa}}(v)\leqslant J_{\kappa}(v)$ 对于所有 $\kappa\in\mathcal{N}$。

为了理解这点，由 V_T^{κ} 的表达式（5.35）注意到，市场 $\mathcal{M}_{\hat{\kappa}}$ 中在 F 下的可达财富 W 也是初始市场 $\mathcal{M}_0$ 中在 F 下的可达财富。由于 F 是约束问题可行的，由此可得，$Eu(w)\leqslant J(v)$。但是，$Eu(w)=J_{\hat{\kappa}}(v)$，这样由（5.36）我们必有 $Eu(w)=J(v)=J_{\hat{\kappa}}(v)\leqslant J_{\kappa}(v)$ 对于所有 $\kappa\in\mathcal{N}$。

概括地讲，你首先用风险中性计算方法求解对偶问题（Dual Problem），

$$\min_{\kappa\in\mathcal{N}} \quad J_{\kappa}(v)$$

如果 $\hat{\kappa}$ 表示最优解，那么市场 $\mathcal{M}_{\hat{\kappa}}$ 中无约束问题的最优交易策略将是初始
183 市场 $\mathcal{M}_0$ 中约束问题解的候选者。剩下来的问题是验证此策略（5.37）中的两个约束。或许令人感到惊奇，这个程序通常是有效的和成功的；这就是为什么很困难且不在这里给出具体阐述的一种解释。

例 5.11（续） 对于满足不许卖空约束 $\mathbb{K}=[0,\infty)$ 的单一风险证券的两时期模型，人们有

$$\delta(X)=\begin{cases}0, & x\geqslant 0\\ \infty, & x<0\end{cases}$$

以及 $\tilde{\mathbb{K}}=[0,\infty)$。可取的可料过程集合 $\mathcal{N}$ 将是形式为

$$\kappa_t(\omega)=\begin{cases}\kappa^5, t=1\\ \kappa^8, t=2, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ \kappa^4, t=2, & \omega=\omega_3,\omega_4\end{cases}$$

的所有 κ，其中 κ^5，κ^8 及 κ^4 都是非负的纯量。由于$\delta(x)=0$ 对于所有 $x\in \tilde{\mathbb{K}}$，市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中的利率过程与市场 $\mathcal{M}_0$ 中的利率过程是相同的，即取 $r_1=r_2=0$。因此，银行账户过程 $B_t^\kappa=1$，对于所有 t 和所有 $\kappa\in\mathcal{N}$。

风险证券的收益过程 R_t^κ 将是随着 $\kappa\in\mathcal{N}$ 而变化的。这点连同风险中性概率测度 Q_κ 和状态价格密度 L_κ 在下面给出说明：

ω	$\Delta R_1^\kappa(\omega)$	$\Delta R_2^\kappa(\omega)$	$Q_\kappa(\omega)$	$L_\kappa(\omega)$
ω_1	$3/5+\kappa^5$	$1/8+\kappa^8$	$\frac{(1-5\kappa^5)\ (2-8\kappa^8)}{12}$	$\frac{(1-5\kappa^5)\ (2-8\kappa^8)}{3}$
ω_2	$3/5+\kappa^5$	$-1/4+\kappa^8$	$\frac{(1-5\kappa^5)\ (1+8\kappa^8)}{3}$	$\frac{(1-5\kappa^5)\ (1+8\kappa^8)}{3}$
ω_3	$-1/5+\kappa^5$	$1/2+\kappa^4$	$\frac{(3+5\kappa^5)\ (1-4\kappa^4)}{12}$	$\frac{(3+5\kappa^5)\ (1-4\kappa^4)}{3}$
ω_4	$-1/5+\kappa^5$	$-1/4+\kappa^4$	$\frac{(3+5\kappa^5)\ (2+4\kappa^4)}{12}$	$\frac{(3+5\kappa^5)\ (2+4\kappa^4)}{3}$

市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中的最优可达财富及无约束问题的价值函数分别由

$$W_\kappa=v/L_\kappa=\begin{cases}\dfrac{3v}{(1-5\kappa^5)\ (2-8\kappa^8)}, & \omega=\omega_1\\ \dfrac{3v}{(1-5\kappa^5)\ (1+8\kappa^8)}, & \omega=\omega_2\\ \dfrac{3v}{(3+5\kappa^5)\ (1-4\kappa^4)}, & \omega=\omega_3\\ \dfrac{3v}{(3+5\kappa^5)\ (2+4\kappa^8)}, & \omega=\omega_4\end{cases}$$

及 184

$$\begin{aligned}J_\kappa(v)&=\ln(v)-E\ln(L_\kappa)\\&=\ln(v)-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{(1-5\kappa^5)(2-8\kappa^8)}{3}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{(1-5\kappa^5)(1+8\kappa^8)}{3}\right)\\&\quad-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{(3+5\kappa^5)(1-4\kappa^4)}{3}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{(3+5\kappa^5)(2+4\kappa^4)}{3}\right)\end{aligned}$$

给出的。因此，对偶问题是：

$$\begin{aligned}\max \quad & 2\ln(1-5\kappa^5)+2\ln(3+5\kappa^5)+\ln(2-8\kappa^8)\\ & \qquad +\ln(1+8\kappa^8)+\ln(1-4\kappa^4)+\ln(2+4\kappa^4)\\ \text{s.t.} \quad & \kappa^5\geqslant 0,\ \kappa^8\geqslant 0,\ \kappa^4\geqslant 0\end{aligned}$$

此问题的最优解很容易计算出是

$$\kappa^5=0,\qquad \kappa^8=\frac{1}{16},\qquad \kappa^4=0$$

把这些值代入到上面 W_κ 和$J_\kappa(v)$的表达式中，得出

$$W_\kappa=\begin{cases}2v, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ v, & \omega=\omega_3\\ v/2, & \omega=\omega_4\end{cases}$$

及$J_\kappa(v)=\ln(v)+\ln(2)/4$（注意，这些值均是利用动态规划方法得出的相同值）。复制交易策略是 $F_1=5/3$；如果 $\omega=\omega_1$，ω_2，那么 $F_2=0$；而如果 $\omega=\omega_3$，ω_4，那么 $F_2=1$。(5.36) 中的两个条件显然是满足的，所以这必是约束问题的最优策略。

习题 5.19　对于满足 $r=0$ 及对数效用的例 5.11 中的证券模型，假设卖空是允许的，但是你不能从银行借款。利用

(a)　动态规划方法（提示：证明$u_0(v)=\ln(v)+\ln(6/5)$）

(b)　风险中性计算方法（提示：证明对偶问题的最优解是$\kappa(1)=-\frac{1}{15}$而 $\kappa(2)=0$）

求解此最优投资组合问题。

5.7 带约束的最优消费投资

直接取 5.3 节和 5.4 节中的最优消费/投资模型，添加一些对可取交易策略的约束，然后利用动态规划方法或者风险中性计算方法来求解。实 185
际上，把这些思想扩展到已研究过的 5.5 节中多时期消费/投资并入了最终财富的情况是不成问题的。所有这些将在本节中加以阐述。

如同 5.6 节中一样，交易策略是可料的且形式为 $F=(F_1,\cdots,F_N)$，其中 $F_n(t)$ 表示时间 $t-1$ 分数形式的财富投资于证券 n 并且持有到时间 t。$\mathbb{R}^N$ 中的一个非空的、闭的凸子集 $\mathbb{K}$ 是特定的，而且需要满足 $F(t)\in\mathbb{K}$ 对于 $t=1$，…，T。一个消费过程（Consumption Process）$C=\{C_t:t=0,\cdots,T\}$ 是一个可料的、非负的随机过程，其中 C_t 表示投资者在时间 t 所消费的资金数目。一个消费投资计划（Consumption－Investment Plan）是由一对（C，F）所构成的，其中 C 是一个消费过程而 F 是一个交易策略。

通常，一个消费投资计划（C，F）将称为自融资的（Self-financing)，如果在时间 0 和 T 之间没有资金添加到消费投资计划中或者从中撤出资金，而不是指消费数量的变化。用 V_t 表示仅仅在任何时间 t 交易或消费之前的投资组合的价值，自融资计划意味着

$$\textbf{(5.38)}\quad V_t=(V_{t-1}-C_{t-1})\Big[1+r_t+\sum_{n=1}^{N}F_n(t)\{\Delta R_n(t)-r_t\}\Big]$$

对于 $t=1$，…，T，其中 $r_t=(B_t-B_{t-1})/B_{t-1}$ 是与区间（$t-1$，t）相关的利率，而 $\Delta R_n(t)=R_n(t)-R_n(t-1)$ 是证券 n 收益过程的变化。一个消费投资计划称为可取的（Admissible)，如果它是自融资的且 $V_T\geqslant C_T$。由于消费过程是非负的，这意味着 $V_T\geqslant0$。设 $\mathcal{A}_v$ 表示所有具有初始财富 v 的可取消费投资计划的集合。

由于有了对初始财富 v 的规定、折现参数满足 $0<\alpha\leqslant1$ 以及凹的、递增的效用函数 u，投资者的消费投资问题是：

$$\textbf{(5.39)}\qquad \max\quad E\Big[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u(C_t)\Big]$$

$$\text{s.t.} \quad (C,F) \in \mathscr{A}_v$$

对应的价值函数（Value Function）是

$$J(v) = \sup_{(C,F)\in\mathscr{A}_v} E\left[\sum_{t=0}^{T} \alpha^t u(C_t)\right]$$

注意到，(5.39) 与 5.3 节中问题 (5.14) 用公式表示的形式相同，只是暗含的内容增加了$F(t)\in\mathbb{K}$的要求，对于所有 t。

这个问题能够运用递归的动态规划函数方程求解

186

$$u_{t-1}(w) = \max_{\substack{F\in\mathbb{K}\\ 0\leqslant C\leqslant w}} \left\{u(c) + \alpha E\left[u_t\left((w-c)\left\{1 + r_t + \sum_{n=1}^{N} F_n(t)\{\Delta R_n(t) - r_t\}\right\}\right) \middle| \mathscr{F}_{t-1}\right]\right\}$$

对于 $t=1$，2，…，T 连同边界条件$u_T(w)=u(w)$。这样，当你在时间 t 以初始财富 w 开始及可获得的信息为 $\mathscr{F}_t$ 时，$u_t(w)$代表了从时间 t 一直持有的消费的最大预期效用。此外，$J(v)=u_0(v)$。由于共同的假设$u'(0)=\infty$，显性约束 $0\leqslant C$ 能够被除掉，从而简化了计算。动态规划方法将在下面的例子中加以说明。

例 5.12 考察例 5.1 中满足利率 $r_t=0$ 的两个时期的单一证券模型，与例 5.11 的情况相同。假设效用函数$u(c)=-c^{-1}$，而且对风险证券的卖空是禁止的，这样$\mathbb{K}=[0,\infty)$。由于$P(\omega_1)=\cdots=P(\omega_4)$，关于 $t=2$ 及 $\omega=\omega_1$，ω_2 的动态规划方程是

$$\begin{aligned} u_1(w) &= \max_{\substack{F\geqslant 0\\ 0\leqslant C\leqslant w}} \left\{-\frac{1}{c} - \alpha E\left[\frac{1}{(w-c)\ (1+F\Delta R_2)} \middle| S_1 = 8\right]\right\} \\ &= \max_{\substack{F\geqslant 0\\ 0\leqslant C\leqslant w}} \left\{-\frac{1}{c} - \frac{\alpha}{2(w-c)(1+F/8)} - \frac{\alpha}{2(w-c)(1-F/4)}\right\} \end{aligned}$$

计算对自变量 F 的偏导数，并令这个偏导数等于 0，则得出

$$F=\frac{8-8\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}<0$$

但是，这违背了卖空约束，这样取 $F=0$ 并且把这代回到上面的动态规划方程中，给出

$$u_1(w)=\max_{0\leqslant c\leqslant w}\left\{-\frac{1}{c}-\frac{\alpha}{w-c}\right\}$$

令对自变量 c 的偏导数等于 0，人们很容易得出，最优消费方程 $C=w/(1+\sqrt{\alpha})$ 与最大期望效用

187

$$u_1(w)=-\frac{(1+\sqrt{\alpha})^2}{w},\qquad \omega=\omega_1,\omega_2$$

关于 $t=2$ 及 $\omega=\omega_3$，ω_4 的动态规划方程是

$$u_t(w)=\max_{\substack{F\geqslant 0\\ 0\leqslant c\leqslant w}}\left\{-\frac{1}{c}-\frac{\alpha}{2(w-c)(1+F/2)}-\frac{\alpha}{2(w-c)(1-F/4)}\right\}$$

令对自变量 F 的偏导数为 0，得出

$$F=\frac{4\sqrt{2}-4}{2+\sqrt{2}}>0$$

其满足卖空约束。把这代回到动态规划方程中，得出

$$u_1(w)=\max_{0\leqslant c\leqslant w}\left\{-\frac{1}{c}-\frac{\alpha\ (1+\sqrt{2})^2}{6\ (w-c)}\right\}$$

因此，最优消费数量是 $C=w/(1+\sqrt{\alpha_1})$，而最大期望效用是

$$u_1(w) = -\frac{(1+\sqrt{\alpha_1})^2}{w}, \qquad \omega = \omega_3, \omega_4$$

其中，为了方便起见，新的参数

$$\alpha_1 = \frac{\alpha(1+\sqrt{2})^2}{6}$$

被引进来。

关于 $t=1$ 的动态规划方程是

$$u_0(w) = \max_{\substack{F \geqslant 0 \\ 0 \leqslant c \leqslant w}} \left\{ -\frac{1}{c} - \frac{\alpha(1+\sqrt{\alpha})^2}{2(w-c)(1+3F/5)} - \frac{\alpha(1+\sqrt{\alpha_1})^2}{2(w-c)(1-F/5)} \right\}$$

令对自变量 F 的偏导数等于 0，得出

$$F = \frac{5[\sqrt{3}(1+\sqrt{\alpha}) - 1 - \sqrt{\alpha_1}]}{\sqrt{3}(1+\sqrt{\alpha}) + 3 + 3\sqrt{\alpha_1}}$$

这很容易验证是正的，所以卖空约束是满足的。把这代回到动态规划方程中，得出

$$u_0(w) = \max_{0 \leqslant c \leqslant w} \left\{ -\frac{1}{c} - \frac{\alpha_0}{w-c} \right\}$$

188 其中为了方便起见，新的参数

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{8} \; [1 + \sqrt{\alpha} + \sqrt{3} + \sqrt{3\alpha_1}]^2$$

被引进来。因此 $C = w/(1+\sqrt{\alpha_0})$ 是最优时间 0 的消费数量，而

$$J(v)=u_0(v)=\frac{(1+\sqrt{\alpha_0})^2}{v}$$

是初始问题的价值函数。

关于多时期消费投资问题的风险中性计算方法本质上与多时期的投资组合问题的求解方法相同。支撑函数（Support Function）$\delta(x)$：$\mathbb{R}^N \to -\mathbb{K}$中的$\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，是由

$$\delta(x) \equiv \sup_{F\in\mathbb{K}} (-Fx)$$

来定义的，其有效定义域是一个凸锥$\tilde{\mathbb{K}}\equiv\{x\in\mathbb{R}^N: \delta(x)<\infty\}$。假设$\mathbb{K}$是使得 δ 在$\tilde{\mathbb{K}}$上是连续的，满足 $0\in\tilde{\mathbb{K}}$。

设$\mathcal{N}$表示所有满足$\kappa(t)\in\tilde{\mathbb{K}}$的可料随机过程$\kappa=\{\kappa(t): t=1, \cdots, T\}$的集合，对于所有 t。对于每一个 $\kappa\in\mathcal{N}$，人们通常依照

$$\begin{aligned} &r_t \to r_t+\delta(\kappa(t)) && t\geqslant 1\\ &\Delta R_n(t)\to\Delta R_n(t)+\delta(\kappa(t))+\kappa_n(t) && n=1,\cdots,N; t\geqslant 1\end{aligned}$$

修正银行账户和风险证券的收益过程来定义一个辅助市场 $\mathcal{M}_\kappa$。对于每一个这样的市场，设 Q_κ 表示相对应的风险中性概率测度。通常的情况是，$Q=Q_0$ 存在且是惟一的，在此情况下，惟一的 Q_κ 也将在 $\kappa=0$ 的某一个邻域内存在对于所有 $\kappa\in\mathcal{N}$。

对于市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 以及任何一个自融资消费计划（C，F），无论（C，F）是可取的还是不可取的，自融资方程（5.38）成为

$$\textbf{(5.40)}\quad V_t=(V_{t-1}-C_{t-1})\Big[1+r_t+\sum_{n=1}^{N}F_n(t)\{\Delta R_n(t)-r_T\} + \delta(\kappa_t)+F(t)\kappa'_t\Big]$$

其中，纯量$F(t)\kappa'(t)$表示行向量$F(t)$和列向量$\kappa'(t)=\kappa'_t$ 的内积。注意到，满足 $\kappa=0$ 的市场 $\mathcal{M}_0$ 与初始市场相同。

对于每一个 $\kappa\in\mathcal{N}$，我们将对无约束的消费投资问题感兴趣：

189 **(5.41)**

$$\begin{aligned}&\min \quad E\Big[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u(C_t)\Big]\\&\text{s.t.}\quad V_0=v,\ V_T\geqslant C_T\\&\qquad\ V,\ C,\ F\ \text{满足}\ (5.40),\quad \text{对于}\ t\geqslant 1\end{aligned}$$

换句话说，这是市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中普通的消费投资问题，因为对 F 是没有特殊约束的。设$J_\kappa(v)$表示相对应的最优目标值。

对于约束最优投资组合问题，如同我们在 5.6 节中所看到

(5.42) $$J(v)\leqslant J_\kappa(v),\quad \text{所有}\ \kappa\in\mathcal{N}$$

也就是倘若 $\kappa\in\mathcal{N}$，初始约束问题的最优目标值是小于或等于市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中的无约束问题的最优目标值，这是因为如果（C，F）关于（5.39）是可行的，那么（5.40）连同$\delta(\kappa_t)+F(t)\kappa'_t\geqslant 0$ 蕴含（C，F）也是关于（5.41）可行的。因而，如果（5.42）是一个等式对于某一个 $\kappa\in\mathcal{N}$，那么对应于这个 v 的最优（C，F）是初始约束问题解的候选者，原因在于下面（5.37）的互相配对的结果（通过完全相同的逻辑性可得出这是正确的）：

(5.43) 假设对于某一个 $\hat{\kappa}\in\mathcal{N}$，（$C$，$F$），即市场 $\mathcal{M}_{\hat{\kappa}}$ 中的无约束消费投资问题的最优消费投资计划，满足

(a) （C，F）$\in\mathcal{A}_{\hat{\kappa}}$

(b) $\delta(\hat{\kappa}_t)+F(t)\hat{\kappa}'_t\geqslant 0$，所有 $t\geqslant 1$

那么（C，F）对初始约束消费投资问题而言是最优的，且$J(v)=J_{\hat{\kappa}}(v)\leqslant J_\kappa(v)$对于所有 $\kappa\in\mathcal{N}$。

概括地讲，为了使用风险中性计算方法求解约束的消费投资问题，你首先在 $\kappa\in\mathcal{N}$上求解（5.42）右边最小化问题的对偶形式。这将在下面的例子中加以阐述。

例 5.12（续） 由于$\mathbb{K}=[0,\infty)$以及初始市场均与例 5.11 中的相同，辅助市场也与例 5.11 中的一样。特别，关于过程 κ 的集合记号 $\mathcal{N}$、

收益过程 R^κ 以及风险中性概率测度 Q_κ 均是由 5.6 节给出的。

为了求解无约束问题（5.41）对于每一个 $\kappa\in\mathcal{N}$，有必要对每一个 κ 引进对应于（5.22）中 N 的过程 N^κ，这已由下面给出（回想起 $B_t^\kappa=1$ 对于所有 t）：

190

ω	$N_0^\nu(\omega)$	$N_1^\nu(\omega)$	$N_2^\nu(\omega)$
ω_1	1	$(1-5\kappa^5)/2$	$(1-5\kappa^5)(2-8\kappa^8)/3$
ω_2	1	$(1-5\kappa^5)/2$	$(1-5\kappa^5)(1+8\kappa^8)/3$
ω_3	1	$(3+5\kappa^5)/2$	$(3+5\kappa^5)(1-4\kappa^4)/3$
ω_4	1	$(3+5\kappa^5)/2$	$(3+5\kappa^5)(2+4\kappa^4)/3$

由习题 5.14，无约束问题（5.41）的最优目标值是由

$$J_\kappa(v)=-\frac{\Delta^2}{v}$$

给出的，其中

$$\Delta=\sum_{t=0}^{2}\alpha^{t/2}E\left[\sqrt{N_t^\kappa}\right]$$

因此，对偶问题等同于在所有 $\kappa\in\mathcal{N}$ 上对 Δ^2 取最大值，说得更精确些，在所有非负的、可料的 κ 上取最大值。一旦给出相应的值

$$\Delta=1+\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2}}\left[1+\sqrt{3}\right]+\frac{\alpha}{4}\left[1+2\sqrt{2}\right]$$

通过少许的计算，解被计算出来是

$$\hat{\kappa}^5=0,\qquad \hat{\kappa}^8=\frac{1}{16},\qquad \hat{\kappa}^8=0$$

注意到，经过一些代数运算后，这个 Δ 值给出 $J_{\hat{\kappa}}(v)=-(1+\sqrt{\alpha_0})^2/v$，

此与前面利用动态规划方法计算出来的初始约束消费投资问题的最优目标值是相同的。

由于 $N_1^\kappa(\omega_1)=N_1^\kappa(\omega_2)=1/2, N_1^\kappa(\omega_3)=N_1^\kappa(\omega_4)=3/2, N_2^\kappa(\omega_1)=N_2^\kappa(\omega_2)=1/2, N_2^\kappa(\omega_3)=1$ 及 $N_2^\kappa(\omega_4)=2$，所以习题 5.14 也给出了 $C_1(\omega_1)=C_1(\omega_2)=v\sqrt{2\alpha}/\Delta, C_1(\omega_3)=C_1(\omega_4)=v\sqrt{2\alpha/3}/\Delta, C_2(\omega_1)=C_2(\omega_2)=v\alpha\sqrt{2}/\Delta, C_2(\omega_3)=v\alpha/\Delta$ 及 $C_2(\omega_4)=v\alpha/(\Delta\sqrt{2})$。

为了计算复制交易策略，我们首先注意到，$C_2(\omega_1)=C_2(\omega_2)$ 蕴含在时间 1 投资于风险证券的可行资金的最优分数形式 $F_2(\omega_1)=F_2(\omega_2)=0$。由此可得

$$V_1(\omega)=C_1(\omega)+C_2(\omega)=\frac{v}{\Delta}\left[\alpha\sqrt{2}+\sqrt{2\alpha}\right],\quad \omega=\omega_1,\omega_2$$

其次，求解

$$(V_1-C_1)(1+F/2)=v\alpha/\Delta$$
$$(V_1-C_1)(1-F/4)=v\alpha(\Delta\sqrt{2})$$

191 得出

$$F_2(\omega_3)=F_2(\omega_4)=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}}$$

与

$$V_1(\omega_3)=V_1(\omega_4)=\frac{v}{\Delta}\left[\frac{\alpha(2+\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{3}}\right]$$

最后，求解

$$(V_0-C_0)(1+3F/5)=\frac{v}{\Delta}\left[\alpha\sqrt{2}+\sqrt{2\alpha}\right]$$

$$(V_0 - C_0)(1 - F/5) = \frac{v}{\Delta}\left[\frac{\alpha(2+\sqrt{2})}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{3}}\right]$$

得出与利用动态规划方法解出的 F_1 值相同。

不用说，前面的思想能够与 5.6 的思想结合起来，去求解 5.5 节中消费并考虑最终财富效用的这类问题。特别，你能够利用动态规划方法（参见习题 5.20）或者即将要阐述的风险中性计算方法求解。

对于具有初始财富 v 及 F 满足约束$\mathbb{K}$的可取消费投资计划的集合 $\mathscr{A}_v$ 而言，我们对价值函数

$$J(v) = \max_{(C,F)\in\mathscr{A}_v} E\left[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u_c(C_t) + \alpha^T u_p(V_T - C_T)\right]$$

感兴趣，其中 u_c 和 u_p 如同 5.5 节中的那样是两个特定的效用函数。这与 (5.28) 是一样的，即这对应于同 5.5 节中完全相同的最优化问题，只是现在的约束$F(t)\in\mathbb{K}$是隐含的。

现在我们定义辅助市场 $\mathscr{M}_\kappa$，它与 5.6 节中约束最优化投资组合问题的辅助市场相同，同时与本节前面研究过的约束消费投资问题的辅助市场也一样。可料过程 κ 的集合 $\mathscr{N}$、修正的收益过程等等都将依赖于$\mathbb{K}$及初始的证券模型，但是它们与效用函数是独立的，无论是 u_c 等于零还是 u_p 等于零。

其次，对于每一个 $\kappa\in\mathscr{N}$，我们希望考虑“无约束”最优化问题：

$$\begin{aligned}
\max\quad & E\left[\sum_{t=0}^{T}\alpha^t u(C_t) + \alpha^T u_p(V_T - C_T)\right] \\
\text{s.t.}\quad & V_0 = v,\ V_T \geqslant C_T \\
& V, C, F \text{ 满足}(5.40)\text{ 对于 } t \geqslant 1
\end{aligned}$$

这与 (5.41) 是相同的，只是现在具有与最终财富效用相联系的附加项。 192
特别，这与 5.5 节中关于市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 对 F 值不带特殊约束的最优化问题是相同的。这样，相对应的最优目标值 $J_\kappa(v)$ 能够利用那一节的方法来求解。

最后，我们在 $\kappa\in\mathscr{N}$ 上求解最小化$J_\kappa(v)$的对偶问题。如果 $\hat{\kappa}\in\mathscr{N}$是最

小化的值而（$\hat{C}$，$\hat{F}$）是相对应的最优消费投资计划，那么为了得出结论（$\hat{C}$，$\hat{F}$），它也是初始的约束最优化问题的最优解，剩下来的仅仅是检验（5.43）中的两个条件。

例 5.13 考察例 5.1 中满足利率 $r_t=0$ 的两个时期的单一证券模型。这与例 5.11 和 5.12 的情形相同，只是现在假设$u_c(c)=\ln(c)$及 $u_p(\omega)=\ln(w)$。包括过程 N^κ 的辅助市场 $\mathscr{M}_\kappa$ 与例 5.12 中的相同。

鉴于 5.5 节，无约束问题最优解形式为$C_t=\alpha^t/(\lambda N_t^\kappa)$及 $V_2=2\alpha^2/(\lambda N_2^\kappa)$，其中过程 N^κ 依赖于基本市场 $\mathscr{M}_\kappa$。由于$f(\lambda)=(1+\alpha+2\alpha^2)/\lambda$，由此可得，$\lambda=g(v)=(1+\alpha+2\alpha^2)/v$ 及

$$C_t=\frac{\alpha^t v}{(1+\alpha+2\alpha^2)N_t^\kappa}\quad V_2=\frac{2\alpha^2 v}{(1+\alpha+2\alpha^2)N_2^\kappa}$$

此外，由于

$$K(\lambda)=-(1+\alpha+2\alpha^2)\ln\lambda+(\alpha+4\alpha^2)\ln\alpha-\alpha E\ \ln N_1^\kappa-2\alpha^2\ln N_2^\kappa$$

由$J_\kappa(v)=K(g(v))$可得

$$J_\kappa(v)=(1+\alpha+2\alpha)\ln\left(\frac{v}{1+\alpha+2\alpha^2}\right)+(\alpha+4\alpha^2)\ln\alpha$$
$$-\alpha\ E\ \ln N_1^\kappa-2\alpha^2\ E\ \ln N_2^\kappa$$

现在一旦代入 N^κ（参见例 5.12），显然对偶问题等同于在纯量 κ^4，κ^5 和 κ^8 的非负值上对

$$(\alpha/2+\alpha^2)[\ln(1-5\kappa^5)+\ln(3+5\kappa^5)]-\alpha\ln(2)-2\alpha^2\ln(3)$$
$$+\frac{\alpha^2}{2}[\ln(2-8\kappa^8)+\ln(1+8\kappa^8)+\ln(1-4\kappa^4)+\ln(2+4\kappa^4)]$$

取最大值。最优解很容易计算出是，$\kappa^4=\kappa^5=0$，$\kappa^8=1/16$。相对应的过程 N^κ 是

$$N_1^{\kappa}(\omega)=\begin{cases}1/2, \omega_1, \omega_2 \\ 3/2, \omega_3, \omega_4\end{cases} \quad N_2^{\kappa}(\omega)=\begin{cases}1/2, \omega_1, \omega_2 \\ 1, \quad \omega_3 \\ 2, \quad \omega_4\end{cases}$$

在此情况下，$C_0 = v/(1+\alpha+2\alpha^2)$， 193

$$C_1(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha v}{1+\alpha+2\alpha^2}, & \omega_1, \omega_2 \\ \dfrac{2\alpha v/3}{1+\alpha+2\alpha^2}, & \omega_3, \omega_4\end{cases} \quad C_2(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2 v}{1+\alpha+2\alpha^2}, & \omega_1, \omega_2 \\ \dfrac{\alpha^2 v}{1+\alpha+2\alpha^2}, & \omega_3 \\ \dfrac{\alpha^2 v/2}{1+\alpha+2\alpha^2}, & \omega_4\end{cases}$$

以及 $V_2=2C_2$。在计算出复制交易策略 F 之后，人们可验证（5.43）中的两个条件是满足的，这意味着此消费投资计划关于约束问题必是最优的。最优目标值$J(v)$是

$$(1+\alpha+2\alpha^2)\ln\left(\frac{v}{1+\alpha+2\alpha^2}\right)+(\alpha+4\alpha^2)\ln\alpha+(\alpha+\alpha^2/2)\ln 2-\frac{\alpha}{2}\ln 3$$

习题 5.20 利用动态规划方法计算例 5.13 中问题的最优交易策略 F。证明当 $\omega=\omega_1$，ω_2 时，$F_1=5/3$，$F_2(\omega)=0$；当 $\omega=\omega_3$，ω_4 时，$F_2(\omega)=1$。验证你所得到$J(v)$的值与例 5.13 中的相同。

5.8 不完全市场中的投资组合最优化

考虑到 2.6 节和本章的主题，当原生证券市场不完全的时候，存在着三种方法求解最优投资组合与消费投资问题：动态规划方法，如同 5.2 和 5.4 节中那样运用拉格朗日乘子的凸最优化方法，不过现在具有多重的约束和多重的风险中性概率测度，还有以添加虚构证券来处理关于交易策略约束的方法。这三种方法正是本章中曾研究过的原理的扩展，这里着重强调对例子的介绍以使多余的讲述达到最小的程度。

不完全市场的动态规划方法和完全市场中所运用的完全一样。计算上的要求主要依赖于时期数、信息树中结点数目以及证券数目，但是不依赖于市场是否是完全的。大多数的问题是让人们体会是否依据每一种证券所持有的单位（即 H）或者依据配置财富的分数形式在许多证券（即 F）之间选择交易策略。

例 5.14 不完全证券市场模型与例 4.10 中的一样，也就是 $K=5$，$N=1$，$r=0$，域流 $\mathscr{F}_t$ 是由价格过程 S 所生成的，还有对 S 的详细说明、
194 基本概率测度 P 及风险中性概率测度 Q 的集合是：

ω	S_0	S_1	S_2	$\Delta R(1)$	$\Delta R(2)$	P	Q
ω_1	5	8	9	3/5	1/8	1/5	$q/4$
ω_2	5	8	7	3/5	−1/8	1/5	$(2-3q)/4$
ω_3	5	8	6	3/5	−1/4	1/5	$(2q-1)/4$
ω_4	5	4	6	−1/5	1/2	1/5	1/4
ω_5	5	4	3	−1/5	−1/4	1/5	1/2

这里的参数 q 是任何一个满足 $1/2<q<2/3$ 的纯量。已知对数效用函数 $u(w)=\ln(w)$，目标是对最终财富的期望效用求最大值。

利用交易策略表示成风险证券持有财富的分数形式 F，动态规划函数方程是：

$$u_t(w)=\max_F \ E[u_{t+1}(w\{1+F\Delta R(t+1)\})|\mathscr{F}_t]$$

取 $u_2(w)=\ln(w)$，当 $t=1$ 以及 $\omega=\omega_1$，ω_2 或 ω_3 时，这是

$$u_t(w)=\max_F \frac{1}{3}[\ln(w\{1+F/8\})+\ln(w\{1-F/8\})+\ln(w\{1-F/4\})]$$

注意到，此效用函数促使时间 $t=2$ 的财富为正，所以人们有隐含的约束 $-8<F<4$。当计算出自变量关于 F 的导数后，必要条件导致了一个二次方程 $3F^2-8F-64=0$。这个方程存在两个根，然而仅有一个落在区间 $(-8, 4)$ 中，所以

$$F=\frac{4}{3}(1-\sqrt{13})\ \cong -3.4741$$

把这个值代回到动态规划方程中，最终得到$u_1(w)=\ln(w)+k_8$，其中为了方便起见，我引进纯量

$$k_8=\frac{1}{3}\ln[(7-\sqrt{13})(5+\sqrt{13})(4+2\sqrt{13})]-\ln 6\cong 0.0703$$

以类似的方式，人们计算出 $t=1$ 及 $\omega=\omega_4$ 或 ω_5 的最优分数形式 $F=1$ 以及$u_1(w)=\ln(w)+k_4$，其中 k_4 是另外一个新的由$k_4=\ln(3)-(3/2)\ln(2)\cong 0.0589$ 给出的纯量。

转到 $t=0$ 的动态规划方程上，人们有

$$u_0(w)=\max_F\left\{\frac{3}{5}[\ln(w\{1+3F/5\})+k_8]+\frac{2}{5}[\ln(w\{1-F/5\})+k_4]\right\}$$

以通常的方式可得，最优分数形式是 $F=7/3$，同时最优价值函数$J(v)=u_0(v)=\ln(v)+k_5$，其中

$$k_5=\frac{1}{5}\ln(3)+\frac{12}{5}\ln(2)-\ln(5)+\frac{3}{5}k_8+\frac{2}{5}k_4\cong 0.3397$$ 195

以 v 美元开始，并且引用刚刚计算出的 F 最优值，人们以最终财富

$$V_2=\begin{cases}2v(7-\sqrt{13})/5, & \omega=\omega_1\\ 2v(5-\sqrt{13})/5, & \omega=\omega_2\\ 4v(2+\sqrt{13}), & \omega=\omega_3\\ 4v/5, & \omega=\omega_4\\ 2v/5, & \omega=\omega_5\end{cases}$$

结束。

为了方便起见，第二种计算方法将被称为拉格朗日乘子方法（The Lagrange Multiplier Approach），在本质上与单时期模型的相同（参见2.6节）。人们以标准的凸最优化问题（2.50）开始，现在它是以两个或者更多个约束为特征的。每一个约束对应于一个风险中性概率测度，而且存在足够多的这样风险中性率测度形成了所有风险中性概率测度集合的一个“基”。由于对应于每一个约束存在着一个拉格朗日乘子，所以与完全市场的模型相比的，计算上的工作量将迅速增多。这是因为，求解这些正确的拉格朗日乘子必须利用解方程组（一个约束有一个方程）求出。

例 5.14（续） 两个风险中性概率测度足以构成风险中性概率测度集合的一个基。实际上，据我看，人们能取这个集合的闭包的极值点，对应于参数值 $q=1/2$ 和 $q=2/3$：

$$Q(1)=(1/8,1/8,0,1/4,1/2) \quad Q(2)=(1/6,0,1/12,1/4,1/2)$$

相对应的状态价格向量是：

$$L_1=(5/8,5/8,0,5/4,5/2) \quad L_2=(5/6,0,5/12,5/4,5/2)$$

我们需要求解的最优问题是

$$\begin{aligned} \max \quad & E[\ln(W)] \\ \text{s.t.} \quad & E_{Q(1)}[W]=v \\ & E_{Q(2)}[W]=v \end{aligned}$$

以通常的方式继续讨论，我们引进拉格朗日乘子 λ_1 和 λ_2，并且利用边际效用的反函数来推导出下面的（时间 $t=2$）最终财富的表达式：

$$W(\omega)=\frac{1}{\lambda_1 L(\omega)+\lambda_2 L(\omega)}$$

196 通过求解方程组：

$$E_{Q(1)}\left[\frac{1}{\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2}\right] = v$$

$$E_{Q(2)}\left[\frac{1}{\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2}\right] = v$$

得出拉格朗日乘子的正确值。此解是：

$$\lambda_1 = \frac{4}{v(5+\sqrt{13})} \qquad \lambda_2 = \frac{3}{v(2+\sqrt{13})}$$

将此代入上述$W(\omega)$的表达式中，得出与前面用动态规划方法计算出来的值相同。

第三种方法的基本思想与2.6节中单时期模型中的相同：首先添加一个或者多个虚构证券，以此促使风险中性概率测度惟一。其次，求解具有排除虚构证券交易约束的投资组合最优化问题。

为了添加虚构证券，一个好的方法是以收益过程和信息树为线索来实施，通过从一个结点到下一个结点不断地构造虚构证券。如果在结点处的条件风险中性概率不是惟一的，那么对那个结点添加一个或者多个（一个时期）的虚构证券以便使这些条件概率惟一。在任何一个结点处的分析都等价于对单时期问题的分析。

当人们以树为线索继续讨论时，可以证明不同结点需要添加虚构证券的数目不同。事实上，有一些结点不需要添加。这样，在最初经过网格时，注意需要添加虚构证券的最大数目。这是对所有多时期问题需要添加的数目。于是，有必要回溯到少于这个最大数目的结点上，并且如果有必要的话添加一些（一个时期）虚构证券，以便使添加的数目等于最大数目。为了保持证券市场的无套利性质，这些添加后的（一个时期）证券将需要成为“局部多余的”（Locally Redundant），也就是成为在那些相同点处已规定的（一个时期）证券的线性组合。为了方便起见，这些在“装满”（Topping-up）时期已明确定义的添加的（一个时期）证券应是初始证券的线性组合，而不是在最初经过信息树期间已明确定义的任何虚构证券的线性组合。

眼下，（一个时期）虚构证券的相同数目是用在信息树中每一个结点上的它们的收益过程来明确定义的。在每一个结点上，也将存在着惟一的

197 风险中性条件概率测度。凭借对它们在时间 $t=0$ 价值的详细说明，所有（多时期）虚构证券的全部规定现在能够被综合起来。进而，所有多时期模型的惟一风险中性概率测度能够容易地被计算出来。

假设存在总数为 N 的证券，其中加有指标的初始证券 $n=1, 2, \cdots, \hat{n}$ 及加有指标的虚构证券 $n=\hat{n}+1, \cdots, N$。现在我要引进形式为

$$\mathbb{K}=\{F\in\mathbb{R}^N:\ F_{\hat{n}+1}=\cdots=F_N=0\}$$

的约束。鉴于 5.6 节，这蕴含着取

$$\delta(x)=\sup_{F\in\mathbb{K}}(-Fx')=\begin{cases}0, & x_1=\cdots=x_{\hat{n}}=0\\ \infty, & 其他\end{cases}$$

$\tilde{\mathbb{K}}=\{x\in\mathbb{R}^N:\ x_1=\cdots=x_{\hat{n}}=0\}$，而所有可料过程 κ 的集合 $\mathcal{N}$ 满足 $\kappa(t)\in\tilde{\mathbb{K}}$ 对于所有 t。此外，利率与初始证券的收益过程在辅助市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中保持不变，而虚构证券的收益过程是由 $\Delta R_n(t)+\kappa_n(t)$ 给出的，其中 R_n 是初始市场中它的收益过程。

然而，这会导致新增加的困难。如果你考虑信息树上存在“局部多余的”虚构证券结点，那么你会发现辅助市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中的那个结点不存在条件风险中性概率测度，因为对非零的 κ，证券不再成为局部多余的。实际上，现在套利机会在每一个辅助市场中均存在，这意味着求解约束最优问题的风险中性计算程序将失灵。

绕过这个困难的方法是去认识，如果它在时间上的特殊时刻为“局部多余的”，那么对虚构证券交易就没有害处。换句话说，如果对应于信息树上的特殊结点，虚构证券的一个时期的收益是初始证券收益的线性组合，那么我们能够放松在那种（一个时期）环境中排除证券交易的约束。因此，集合 $\mathbb{K}$ 与 $\tilde{\mathbb{K}}$ 应是对信息树中每一个结点的定义，如果它们穿过网格时在变化。集合 $\mathbb{K}$ 在结点上应规定成：$F_n=0$ 当且仅当证券 n 是虚构的，除非它在那个结点上不是“局部多余的”。由此可见，对于 $\mathcal{N}$ 人们应该取所有的可料过程 κ，使得 $\kappa(t,\omega)$ 是对应于 $(t,\ \omega)$ 的集合 $\mathbb{K}$ 中的元素。

像前面一样，辅助市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 是对每一个 $\kappa\in\mathcal{N}$ 来定义的。利率与初始

证券的收益过程将保持相同，但是在辅助市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 中虚构证券 n 的收益过程是由$\Delta R_n(t)+\kappa_n(t)$给出的，其中 R_n 是它初始的收益过程。现在如果虚构证券 n 在信息树中一个结点上是局部多余的，那么对应的 κ_n（t）值将等于 0，在那个结点上将存在惟一的条件风险中性概率测度，从而求解这个约束最优化问题的风险中性计算方法能够顺利地继续使用。所有这些 198
将在下面的例子中加以阐述。

例 5.14（续） 现在我们需要设 S_1 表示初始的风险证券。对于$S_1(0)=5$及 $S_1(1)=4$ 的结点的条件风险中性概率测度是惟一的，但是对于$S_1(1)=8$的结点而言，这种说法是不正确的。我们需要添加一个虚构证券，将其记成证券 $n=2$ 并且取$\Delta R_2(2,\omega_1)=1/16,\Delta R_2(2,\omega_2)=0$ 以及$\Delta R_2(2,\omega_3)=-3/16$。这导致了条件风险中性概率测度（0.6，0.2，0.2），它是初始不完全模型情况存在下必然结果的一个特殊情形。我们在另外两个结点上取$\Delta R_2=\Delta R_1$，这样当人们选择$S_2(0)=10$时，虚构证券交易 S_2 的全部详细说明在下面列出。同时，提供了惟一的风险中性概率测度 Q。

ω	$S_2(0)$	$S_2(1)$	$S_2(2)$	$\Delta R_2(1)$	$\Delta R_2(2)$	Q
ω_1	10	16	17	3/5	1/16	0.15
ω_2	10	16	16	3/5	0	0.05
ω_3	10	16	13	3/5	−3/16	0.05
ω_4	10	8	12	−1/5	1/2	0.25
ω_5	10	8	6	−1/5	−1/4	0.50

在$S_1(0)=5$及 $S_1(1)=4$ 的结点处不存在约束，这样我们取$\mathbb{K}=\{x\in\mathbb{R}^2\}$及$\tilde{\mathbb{K}}=\{(0,0)\}$。在 S_1（1）$=8$ 的结点处，我们想要排除虚构证券 S_2 的交易，这样我们有$\mathbb{K}=\{x\in\mathbb{R}^2:F_2=0\}$及$\tilde{\mathbb{K}}=\{x\in\mathbb{R}^2:x_1=0\}$。因此，$\mathcal{A}$是由形式为

$$\kappa(t,\ \omega)=\begin{cases}(0,\ \tilde{\kappa}), & t=2,\ \omega=\omega_1,\ \omega_2\\ (0,\ 0), & \text{其他}\end{cases}$$

的所有可料过程 κ 组成的，其中 $\tilde{\kappa}$ 是一个纯量。

接下来的步骤是计算市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 的风险中性概率测度。我们有

$$\Delta R_2^{\kappa}\ (2,\ \omega) = \begin{cases} 1/16+\tilde{\kappa}, & \omega=\omega_1 \\ \tilde{\kappa}, & \omega=\omega_2 \\ -3/16+\tilde{\kappa}, & \omega=\omega_3 \end{cases}$$

然而，$\Delta R_1^{\kappa}(2)=\Delta R_2(2)$对于所有 $\kappa\in\mathcal{N}$ 。这样，我们运用两个方程$E_{Q_\kappa}[\Delta R_n^{\kappa}(2)\,|\,S_1(1)=8]$对于 $n=1$ 及 2。求解并得到，$S_1(1)=8$ 的结点处的条件风险中性概率测度：

$$\left(\frac{3+16\tilde{\kappa}}{5},\ \frac{1-48\tilde{\kappa}}{5},\ \frac{1+32\tilde{\kappa}}{5}\right)$$

199 在另外两个结点处的条件风险中性概率与初始市场 $\mathcal{M}_0$ 中的相同，这样市场 $\mathcal{M}_\kappa$ 的风险中性概率测度必是：

$$\left(\frac{3+16\tilde{\kappa}}{20},\ \frac{1-48\tilde{\kappa}}{20},\ \frac{1+32\tilde{\kappa}}{20},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$$

随后的步骤是在 $\kappa\in\mathcal{N}$上求解最小化$J_\kappa(v)$的对偶问题。由于利用无约束问题的对数效用，$J_\kappa(v)=\ln(v)-E\ \ln(Q_\kappa)+E\ \ln(P)$，这等同于在$\tilde{\kappa}\in\mathbb{R}$上求$E\ \ln(Q_\kappa)$的最大值。将这全部写出，并对其求微分，导出必要条件：

$$\frac{16}{3+16\tilde{\kappa}}-\frac{48}{1-48\tilde{\kappa}}+\frac{32}{1+32\tilde{\kappa}}=0$$

解被计算出来是

$$\tilde{\nu}=\frac{3\sqrt{13}-11}{16\ (7-\sqrt{13})}$$

利用无约束问题的对数效用，最优的最终财富是 $V_2^{\kappa}=vP/Q_\kappa$，这样代人 $\tilde{\kappa}$ 人们得到最后的结果。约束问题的最优最终财富等于初始不完全市场模

型的最优最终财富，即前面我们利用其他的两种方法计算出来的最终财富。

显然，不完全市场的多时期消费投资问题也能够利用这三种同样的方法求解。这些方法的应用与已经做过的内容相似，详细的做法留给读者自己完成。

习题 5.21 求解例5.14中模型的消费投资问题，假设对数效用（即 $u(c)=\ln(c)$），以及折现参数 α 取一个小于或者等于 1 的一般非负数值。推导出最优交易策略、最优消费过程和最优价值函数 $J(v)$。特别，证明在时间 $t=2$ 最优消费数量是 $2\alpha^2 vX(\omega)/[5(1+\alpha+\alpha^2)]$，其中，随机变量 X 在状态 ω_1，ω_2，ω_3，ω_4 和 ω_5 分别等于 $7-\sqrt{13}$，$5+\sqrt{13}$，$4+2\sqrt{13}$，2 和 1。

(a) 利用动态规划方法。

(b) 利用拉格朗日乘子方法。

(c) 利用虚构证券方法。

200

6

债券与利率衍生证券

6.1　基本期限结构模型

尽管在前面的一些章节中已讨论过的证券市场模型以能建模证券类别的观点来看是非常一般的，但是可建模的证券通常被认为是股票，诸如普通股票。然而，包括在风险证券之中的固定收益证券，比如债券的情形是非常重要的，以致它将成为这一章整个内容的主题。此种情形的证券市场模型称为期限结构模型（Term Structure Model）。

对于一个证券市场模型要成为期限结构模型，这需要三个条件。首先，它必须是一个多时期模型。其次，利率 r 必是一个严格正的、可料过程，因此，在时期（$t-1$，t］上借贷的利率 r_t 在时间 $t-1$ 是已知的。像前面一样，$B_0=1$，而 $r_t=(B_t-B_{t-1})/B_{t-1}$ 对于 $t=1,\cdots,T$ ，所以，假设 $r_t>0$ 意味着银行账户 B 是依时间严格递增的。由于期限结构模型将刻画几种利率，所以 r 称为即期利率（Spot Interest Rate）（由于 r 可能是随机的，所以这将产生错误的想法）和无风险利率（Riskless Interest Rate）。

再有，并且最重要的包含在风险证券之中的是被称为零息债券（Zero Coupon Bonds）或者折价债券（Discount Bonds）的集合。对于每一个使得 $1\leqslant\tau\leqslant T$ 的 τ，定义满足到期日 τ 的零息债券（Zero Coupon Bond with Maturity τ）是指其在时间 τ 的价格一定是 1 的证券。它在时间 t 的价格

将记为Z_t^τ，所以$Z^\tau=\{Z_t^\tau:0\leqslant t\leqslant\tau\}$是一个满足$Z_\tau^\tau=1$的适应过程。对于$t>\tau$的情况，$Z^\tau$的价格没有定义。

期限结构模型包括对于每一个τ满足$\tau=1$，…，T的零息债券Z^τ。因此，在每一个时间t上存在零息债券价格$\{Z_t^{t+1}, Z_t^{t+2}, \cdots, Z_t^T\}$的集合。这一集合称为零息债券价格的期限结构（Term Structure of Zero Coupon Bond Prices）。

期限结构模型必须是无套利的，因此必存在一个风险中性概念测度Q，在测度Q下零息债券的折现价格是一个鞅。换句话说，必存在某一个满足$Q(\omega)>0$的概率测度Q，对于所有$\omega\in\Omega$，使得对于每一个τ， 201

$$(6.1) \qquad Z_s^\tau=E_Q[B_s Z_t^\tau/B_t|\mathscr{F}_s],0\leqslant s<t\leqslant\tau$$

但是，$Z_\tau^\tau=1$以及$B_t/B_s=(1+r_{s+1})\cdots(1+r_t)$，这样取$t=\tau$，我们看到已知任何一个风险中性概率测度$Q$，零息债券必须满足下面的重要关系

$$(6.2) \qquad Z_s^\tau=E_Q[B_s/B_\tau|\mathscr{F}_s]=E_Q[1/\{(1+r_{s+1})\cdots(1+r_\tau)\}|\mathscr{F}_s],0\leqslant s\leqslant\tau$$

由于$r_t>0$，对于每一个固定的s和ω，这蕴含$\tau\to Z_s^\tau(\omega)$是一个满足$Z_s^{s+1}(\omega)<1$的严格递减的函数。注意到，在（6.2）中取$\tau=s+1$得出

$$(6.3) \qquad r_{s+1}+1=1/Z_s^{s+1}, \quad s=0,1,\cdots,T-1$$

对相当多数的证券市场模型而言，人们习惯的做法是以概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$开始，然后定义即期利率$r$及相对于“现实世界”概率测度$P$的风险证券；这是因为风险证券的未来值是不确定的。随后，风险中性概率测度Q就由这些数据资料来确定。但是，对于期限结构模型而言，某些重要证券的未来值（也就是零息债券）是已知的某一个值，采用不同的建模方法是可能的：首先详细规定一个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$，从建模开始就设$Q$是一个风险中性概率测度，然后详细说明即期利率$r$，给出它相对于$Q$的概率行为，最后运用（6.2）去提供零息债券价格的说明。这样，构建一个完美满意的期限结构模型是可能的，而不用担心即期利率和零息债券价格在现实世界概率测度下的概率行为。

尽管这是常用的方法，但是读者应该记住是否存在一个主观概率测度 P，在测度 P 下 r 和零息债券价格以一种现实的或者良好的方式表示出来，这件事不是显然的。然而，确定这样的 P 确实很困难，虽然人们知道它存在。在先阐述可供选择的方法之后，这个方法在例 6.2 中加以说明。

例 6.1 满足 $T=3$ 和 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，假设时间 1 的分割 $\mathscr{P}_1=\{\omega_1,\omega_2\}\cup\{\omega_3,\omega_4\}\cup\{\omega_5,\omega_6\}$，而时间 2 和时间 3 的分割均是 $\mathscr{P}_2=\mathscr{P}_3=\{\omega_1\}\cup\cdots\cup\{\omega_6\}$。"现实世界"的概率测度 P 能够被详细规定出，但它的值是多少并不重要。对于即期利率 r，设 $r_1=0.06$，

$$r_2(\omega)=\begin{cases}0.09, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ 0.06, & \omega=\omega_3,\omega_4\\ 0.03, & \omega=\omega_5,\omega_6\end{cases}$$

202 以及

$$r_3(\omega)=\begin{cases}0.10, & \omega=\omega_1\\ 0.08, & \omega=\omega_2\\ 0.07, & \omega=\omega_3\\ 0.05, & \omega=\omega_4\\ 0.04, & \omega=\omega_5\\ 0.02, & \omega=\omega_6\end{cases}$$

接下来的是，对零息债券价格过程 Z^1，Z^2 和 Z^3 的详细规定。为此，你不能取任意的满足 $Z_t^\tau<1$ 对于 $t<\tau$，且满足 $Z_\tau^\tau=1$ 的随机过程；为了排除套利机会的进入，你必须仔细地遵守方程（6.1）。实际上，利用方程（6.3）在 $Z_{\tau-1}^\tau$ 的选择中不存在灵活性，对于 $\tau=1$，2 和 3；这些值在表 6.1 中表示出来。

其次，考虑 $Z_1^3(\omega_1)=Z_1^3(\omega_2)$ 的详细说明。在(6.1)中取 $t=s+1$，我们有

$$\textbf{(6.4)}\qquad Z_s^\tau=E_Q[(1+r_{s+1})^{-1}Z_{s+1}^\tau|\mathscr{F}_s]=(1+r_{s+1})^{-1}E_Q[Z_{s+1}^\tau|\mathscr{F}_s]$$

现在一旦可以自由地对条件风险中性概率选择，我们对 Z_s^τ 的选择就有了

灵活性，对于 $s<\tau-1$。特别，给定时间 1 的信息，对$Z_2^3(\omega)$ 的值有两种可能性，$Z_1^3(\omega)$ 能够选取任何一个使得 $(1+r_2)Z_1^3(\omega)$ 严格地在零息债券价格在下一个时期中能取得的最大值和最小值之间的值。例如，由于 $Z_2^3(\omega_1)=(1.1)^{-1}=0.9091$ 和 $Z_2^3(\omega_2)=(1.08)^{-1}=0.9259$，它足以使 $Z_1^3(\omega_1)$ 和 $Z_1^3(\omega_2)$ 满足约束

$$0.0901<1.09Z_1^3(\omega_1)<1.09Z_1^3(\omega_2)<0.9259$$

我们将取$Z_1^3(\omega_1)=Z_1^3(\omega_2)=0.840$ 。以类似的方式，我们必有

$$\begin{aligned}Z_2^3(\omega_3)&=0.9346<1.06Z_1^3(\omega_3)\\&=1.06Z_1^3(\omega_4)<Z_2^3(\omega_4)=0.9524\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}Z_2^3(\omega_5)&=0.9615<1.03Z_1^3(\omega_5)\\&=1.03Z_1^3(\omega_6)<Z_2^3(\omega_6)=0.9804\end{aligned}$$

因此,我们将取 $Z_1^3(\omega_3)=Z_1^3(\omega_4)=0.890$ 和 $Z_1^3(\omega_5)=Z_1^3(\omega_6)=0.940$。

转到对 Z_0^2 和 Z_0^3 的详细说明上，我们看到此情形显得有点更复杂些，因为每一个零息债券能成为三个值中的一个，而不仅是两个不同的值。方程 (6.4) 必被 Z^2 和 Z^3 所满足：

$$1.06Z_0^2=0.9174p+0.9434q+0.9709(1-p-q)$$ 203

$$1.06Z_0^3=0.84p+0.89q+0.94(1-p-q)$$

其中，$p=Q(\omega_1)+Q(\omega_2)$及 $q=Q(\omega_3)+Q(\omega_4)$。这些方程结合约束 $p>0$，$q>0$ 以及 $p+q<1$ 导致了关于对 $(Z_0^2,\ Z_0^3)$ 的三个约束。我们将直接取 $p=q=0.3$，从而给出 $Z_0^2=0.893$ 和 $Z_0^3=0.844$。

这就完成了零息债券过程以及此模型的详细说明，详细资料表示在表 6.1 中。注意到，Z^3 不是一个递增过程。

表 6.1 **例 6.1 的数据资料**

ω	Z_0^1	Z_0^2	Z_1^2	Z_0^3	Z_1^3	Z_2^3	$Q(\omega)$
ω_1	0.9434	0.893	0.9174	0.844	0.84	0.9091	0.1839
ω_2	0.9434	0.893	0.9174	0.844	0.84	0.9259	0.1161
ω_3	0.9434	0.893	0.9434	0.844	0.89	0.9346	0.1517
ω_4	0.9434	0.893	0.9434	0.844	0.89	0.9524	0.1483
ω_5	0.9434	0.893	0.9709	0.844	0.94	0.9615	0.2582
ω_6	0.9434	0.893	0.9709	0.844	0.94	0.9804	0.1418

剩下来的是计算风险中性概率测度 Q。这将通过运用方程（6.4），首先计算出条件风险中性概率。我们已经拥有第一个时期的这些值：$Q(\omega_1)+Q(\omega_2)=Q(\omega_3)+Q(\omega_4)=0.3$ 及 $Q(\omega_5)+Q(\omega_6)=0.4$。对于第二时期而言，满足 $s=1$，$\tau=3$ 和 $\omega=\omega_1$，或者 ω_2 的方程（6.4）给出$1.09(0.84)=\hat{q}(0.9091)+(1-\hat{q})(0.9259)$，因此，$\hat{q}=Q(Z_2^3=0.9091\mid Z_1^3=0.84)=0.6131$ 。以类似的方式，方程（6.4）给出$Q(Z_2^3=0.9346\mid Z_1^3=0.89)=0.5056$ 及 $Q(Z_2^3=0.9615\mid Z_1^3=0.94)=0.6455$ 。取这些条件概率适当的乘积，得出风险中性概率测度，如表 6.1 所示。注意到，这是与零息债券的详细说明相联系的惟一的风险中性概率测度，因而这个模型是完全的。

例 6.2 满足 $T=3$，样本空间 Ω、域流$\mathbb{F}$和即期利率 r 均与例 6.1 中的相同，我们直接对风险中性概率测度 Q 的详细说明下结论。任何一个严格正的概率测度都将可以使用。我们将通过直接取$Q(\omega_1)=\cdots=Q(\omega_6)=1/6$ 来对此阐述。

这就完成了此模型的详细说明（除非你也想要现实世界的概率测度 P）。剩下来的是通过运用（6.2）或者（6.4）来推导零息债券价格过程。当然，$Z_{\tau-1}^{\tau}$的值与例 6.1 中的相同，对于 $\tau=1$，2 和 3。满足 $s=1$，$\tau=3$ 和 $\omega=\omega_1$ 或者 ω_2 的方程（6.4）是

204

$$Z_1^3(\omega_1)=Z_1^3(\omega_2)=\frac{1}{2}\frac{0.9091}{1.09}+\frac{1}{2}\frac{0.9259}{1.09}=0.8417$$

类似地，$Z_1^3(\omega_3)=Z_1^3(\omega_4)=0.8901$ 及 $Z_1^3(\omega_5)=Z_1^3(\omega_6)=0.9427$。
满足 $s=0$ 和 $\tau=3$ 的方程（6.4）是

$$Z_0^3=\frac{1}{3}\frac{0.8417}{1.06}+\frac{1}{3}\frac{0.8901}{1.06}+\frac{1}{3}\frac{0.9427}{1.06}=0.8410$$

满足 $s=0$ 和 $\tau=2$ 的方程（6.4）是

$$Z_0^2=\frac{1}{3}\frac{0.9714}{1.06}+\frac{1}{3}\frac{0.9434}{1.06}+\frac{1}{3}\frac{0.9709}{1.06}=0.8905$$

这个模型的详细资料归纳概括如下：

ω	Z_0^1	Z_0^2	Z_1^2	Z_0^3	Z_1^3	Z_2^3	$Q(\omega)$
ω_1	0.9434	0.8905	0.9174	0.8410	0.8417	0.9091	0.1667
ω_2	0.9434	0.8905	0.9174	0.8410	0.8417	0.9259	0.1667
ω_3	0.9434	0.8905	0.9434	0.8410	0.8901	0.9346	0.1667
ω_4	0.9434	0.8905	0.9434	0.8410	0.8901	0.9524	0.1667
ω_5	0.9434	0.8905	0.9709	0.8410	0.9427	0.9615	0.1667
ω_6	0.9434	0.8905	0.9709	0.8410	0.9427	0.9804	0.1667

这里注意到，与例 6.1 相对照，所有的零息债券价格过程都是递增的。

用以详细说明例 6.1 和 6.2 模型的方法都很容易实现，但是不存在着在时间 $t=0$ 对可观察的所有价格和利率直接控制的途径。出于实用目的，拥有时间 $t=0$ 的这些值等于规定量的模型常常是重要的。通过直接以这些值开始，然后运用方程（6.1）～（6.4）去引进无套利的利率和零息债券价格的未来值，这是可以实现的。同时风险中性概率测度被引进，现在对此加以阐述。

例 6.3 满足 $T=3$，样本空间 Ω 和域流 $\mathbb{F}$ 都与例 6.1 和 6.2 的相同，假定 $r_1=0.06$，$Z_0^1=0.9434$，$Z_0^2=0.89$ 以及 $Z_0^3=0.84$ 均是在时间 $t=0$ 为可观察到的。为了引进 r 的未来值和这些零息债券价格的未来值，运用方程（6.3）和（6.4）就足够了，并且同时向前推进一个时期；同时风险中性条件概率将被引进。

以任意值 $Z_1^2(\omega_1)=0.91$，$Z_1^2(\omega_3)=0.94$，$Z_1^2(\omega_5)=0.97$ 以及 $Q(Z_1^2=0.91)=0.3$ 开始，由满足 $s=0$ 和 $\tau=2$ 的方程（6.4）可得，$Q(Z_1^2=0.94)=0.2867$ 和 $Q(Z_1^2=0.97)=0.4133$。因此，方程（6.3）蕴含着 r_2 在状态 ω_1，ω_3 和 ω_5 中分别取值 0.0989，0.0638 和 0.0309。

205 接着转到对 Z_1^3 的详细说明上，我们看到我们能够对三个可能值中的两个任意选值，比如 $Z_1^3(\omega_3)=0.89$ 和 $Z_1^3(\omega_5)=0.94$ 。由于方程（6.4）必满足于 $s=0$ 和 $\tau=3$ 的情形，所以这一选值蕴含 $Z_1^3(\omega_1)=0.8223$。

随后的一步是对 Z_2^3 选值，以便使满足 $s=1$ 和 $\tau=3$ 的方程对条件风险中性概率的合适值成立。例如，满足 $Z_2^3(\omega_1)=0.90$ 和 $Z_2^3(\omega_2)=0.92$，方程（6.4）给出 $Q(Z_2^3=0.90 \mid Z_1^3=0.8223)=0.8187$。类似地，对 $Z_2^3(\omega_3)=0.94$，$Z_2^3(\omega_4)=0.95$，$Z_2^3(\omega_5)=0.96$ 和 $Z_2^3(\omega_6)=0.98$ 的选取蕴含 $Q(Z_2^3=0.94 \mid Z_1^3=0.89)=0.32$ 和 $Q(Z_2^3=0.96 \mid Z_1^3=0.94)=0.55$。方程（6.3）规定出 r_3 的值。这个模型归纳概括如下：

ω	Z_1^2	Z_1^3	Z_2^3	r_2	r_3	Q
ω_1	0.91	0.8223	0.90	0.0989	0.1111	0.2456
ω_2	0.91	0.8223	0.92	0.0989	0.0870	0.0544
ω_3	0.94	0.89	0.94	0.0638	0.0638	0.0917
ω_4	0.94	0.89	0.95	0.0638	0.0526	0.1950
ω_5	0.97	0.94	0.96	0.0309	0.0417	0.2273
ω_6	0.97	0.94	0.98	0.0309	0.0204	0.1860

剩下来的是计算风险中性概率测度 Q。这立刻从已计算出的条件概率得出：$Q(\omega)$的值如上所示。

现在我们转向一个新的专题，即到期收益率（Yield to Maturity）。这是一个适应的随机过程，记为 $Y^\tau=\{Y_t^\tau: t=0, \cdots, \tau-1\}$，它是惟一地与每一个零息债券相联系着的。当人们进行投资且以这一常数利率按复利计息时，Y_t^τ 值应是定义成一个时期的利率，以使资金总和等于零息债券的当前价格，也就是 Z_t^τ 将在时间 τ 确切地变为 $Z_\tau^\tau=1$。换句话说，

$$Z_t^\tau(1+Y_t^\tau)^{\tau-t}=1, \quad 0 \leqslant t < \tau \leqslant T$$

其与

$$(6.5) \qquad Z_t^\tau=(1+Y_t^\tau)^{t-\tau}, \quad 0 \leqslant t < \tau \leqslant T$$

以及

$$(6.6)\qquad Y_t^\tau=[Z_t^\tau]^{1/t-\tau}-1,\quad 0\leqslant t<\tau\leqslant T$$

是相同的。注意到，当前即期利率 $Y_t^{t+1}=r_{t+1}$。

在每一个时间 t，存在着被称为利率的期限结构（Term Structure of Interest Rates）或者收益曲线（Yield Curve）的收益率 $\{Y_t^{t+1},\cdots,Y_t^T\}$ 集合。考虑到方程（6.5）和（6.6），利率的期限结构的知识等价于零息债券价格 $\{Z_t^{t+1},\cdots,Z_t^T\}$ 的期限结构的知识。

例 6.1（续） 运用方程（6.6），我们迅速地推导出下面的收益率。 206

ω	Y_0^1	Y_0^2	Y_0^3	Y_1^2	Y_1^3	Y_2^3
ω_1	0.06	0.0582	0.0582	0.09	0.0911	0.10
ω_2	0.06	0.0582	0.0582	0.09	0.0911	0.08
ω_3	0.06	0.0582	0.0582	0.06	0.0600	0.07
ω_4	0.06	0.0582	0.0582	0.06	0.0600	0.05
ω_5	0.06	0.0582	0.0582	0.03	0.0314	0.04
ω_6	0.06	0.0582	0.0582	0.03	0.0314	0.02

注意到，期限结构的种类很多。时间 $t=0$ 的期限结构相对于到期日而言是递减的，时间 $t=1$ 的两个期限结构都是递增的，而时间 $t=1$ 的第三个期限结构是一个常数。

关于期限结构模型的另一个重要概念是远期利率（Forward Interest Rate）。假设有一个时间 s，并考虑 τ-到期日的零息债券的远期价格 O_s，在时间 t 交割，其中 $s\leqslant t\leqslant\tau$。鉴于原理（4.22）和方程（6.2），这必是

$$O_s=\frac{Z_s^\tau}{E_Q[B_s/B_t\,|\,\mathscr{F}_s]}=\frac{Z_s^\tau}{Z_s^t},\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau\leqslant T$$

由于存在无套利机会，所以这一方程具有经济意义。在一种情况下，你在时间 s 购买 τ-到期日折价债券，然后一直持有它到时间 τ。在另一种情况下，你在时间 s 签订一份远期合约，在时间 t 去交割这一相同的债券，然后一直持有到它在时间 τ 到期为止，在时间 τ 的融资支付利用了在时间 s 以确切的 $O_sZ_s^t$ 美元投资于 t-到期日的折价债券。在两种情况下，你在时

间 τ 确保有 1 美元，这样时间 s 的费用由一价定律必是相同的。

对于 $\tau=t+1$ 的特殊情况，

$$(6.7) \qquad O_s=\frac{Z_s^{t+1}}{Z_s^t}, \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$$

必是在时间 t 交割的且在一个时期后到期的零息债券的时间 $-s$ 的远期价格。对应于远期价格（6.7）的收益率记为$f(s,t)$，它必是

$$(6.8) \qquad f(s,t)=\frac{Z_s^t}{Z_s^{t+1}}-1$$

因为在时间 t 以利率$f(s,t)$投资的 Z_s^{t+1}/Z_s^t 美元将在时间 $t+1$ 变为 1 美元。注意到，$f(s,t)>0$，因为如同前面指出的，$t\to Z_s^t$ 是一个严格递减的函数。由于收益率$f(s,t)$是与单时期相联系的，所以它称为远期即期利率（Forward Spot Interest Rate）或者直接称为远期利率（Forward Interest Rate）。

207 在（6.8）中取 $t=s$，我们从（6.3）中看到

$$f(s,s)=r_{s+1}, \quad 0\leqslant s< T$$

这在逻辑上是不矛盾的，因此如果立刻交割，那么远期利率和即期利率是一致的。我们从（6.8）中还看出，$f(s,t)$是 $\mathscr{F}_s$ - 可测的随机变量，对于每一个 $t\geqslant s$。因此，对每一个固定的t，$s\to f(s,t)$是一个适应的随机过程。

集合 $\{f(s,s),\cdots,f(s,T-1)\}$ 称为时间-s 的远期利率的期限结构（Term Structure of Forward Interest Rates）。考虑到方程（6.8），零息债券价格的期限结构的知识为你揭示出远期利率的期限结构。反之也成立，因为 $Z_s^s=1$，所以你能够运用（6.8）以递归方式推导出剩下来的零息债券价格。因此，期限结构的这三种类型是等价的。

在远期利率和折价债券的价格之间一个有用的关系是从等式

$$Z_s^\tau = \prod_{t=s+1}^{\tau} [Z_s^t / Z_s^{t-1}]$$

得到的。把（6.8）代入上式，得出

(6.9)
$$Z_s^\tau = \prod_{t=s+1}^{\tau} [1 + f(s, t-1)]^{-1}$$

将这与方程（6.2）相比较。

例 6.1（续） 运用方程（6.8）我们迅速推导出下面的远期利率。

ω	f(0,0)	f(0,1)	f(0,2)	f(1,1)	f(1,2)	f(2,2)
ω_1	0.06	0.0564	0.0581	0.09	0.0921	0.10
ω_2	0.06	0.0564	0.0581	0.09	0.0921	0.08
ω_3	0.06	0.0564	0.0581	0.06	0.0600	0.07
ω_4	0.06	0.0564	0.0581	0.06	0.0600	0.05
ω_5	0.06	0.0564	0.0581	0.03	0.0329	0.04
ω_6	0.06	0.0564	0.0581	0.03	0.0329	0.02

这与方程（6.9）是一致的，例如，因为

$$Z_0^2 = \frac{1}{(1.06)\ (1.0564)} = 0.893$$

习题 6.1 对于满足 $T=5$ 的期限结构模型，假设时间 $t=0$ 的期限结构如下所示。推导出其他两种期限结构的形式。

(a) 零息债券价格的期限结构是 $Z_0^1=0.96$，$Z_0^2=0.915$，$Z_0^3=0.88$，208
$Z_0^4=0.837$ 以及 $Z_0^5=0.80$。

(b) 收益率的期限结构是 $Y_0^1=4\%$，$Y_0^2=5\%$，$Y_0^3=6\%$，$Y_0^4=7\%$ 以及 $Y_0^5=6.5\%$。

(c) 远期利率的期限结构是 $f(0,0)=4\%$，$f(0,1)=6\%$，$f(0,2)=5.5\%$，$f(0,3)=5\%$ 以及 $f(0,4)=5\%$。

习题 6.2 对于除了 $Q(\omega_i)=i/21$ 对于 $i=1,\cdots,6$，与例 6.2 相同的模型，

计算所有的零息债券、收益率以及远期利率(提示:证明 $Z_0^3=0.8604$)。

6.2 网格、马尔可夫链模型

已知一个任意域流$\mathbb{F}$，对即期利率过程 r 及模型中其他要素的详细说明通常是困难的，结果各种利率和价格过程在主观概率测度 P 下将是现实的，此外，它们在时间-0 的价值将与任意的时间-0 期限结构一致。人们值得去发展一类简单的模型，以使这些目标得以满足。

想起一个明显的模型候选者，即在 3.5 节中已研究的利率二项式模型。其思想是在二项式模型中对即期利率建模正如对风险证券建模一样，选取风险中性条件概率的 q 值，然后零息债券价格可从方程（6.2）得出。然而，由于这个模型仅涉及四个参数（也就是 r_1，u，d 和q）的事实，所以没有理由指望计算出的零息债券价格匹配任意一个期限结构。这类模型太简单了。

但是，使用二项式模型方法其全部内容并没有丢失。适度的推广将是一项值得做的工作。就二项式模型而论，人们保留了相同信息结构的模型，如图 3.4 中所示。然而，即期利率过程 r 将沿着 3.6 节中例 3.6 的风险证券线被推广到可作为马尔可夫链的程度上。更准确地说，设 X 表示满足初始值$X_0=0$，满足状态空间$E=\{0,1,\cdots,T\}$以及转移概率
满足

$$P\{X_{t+1}=j\mid X_t=n\}>0,\quad j=n+1\text{ 或者 }j=n,$$
$$P\{X_{t+1}=j\mid X_t=n\}=0,\quad \text{其他}$$

对于 $t=0$，1，…，$T-1$ 的马尔可夫链。因此，X_t 能够被认为是在t 次抛掷硬币之后头面的累加次数；但是不像在 3.5 和 3.6 节中所研究过的二项式过程 N_t 那样，硬币各次抛掷不必是独立的或者同分布的。抛掷硬币 $t+1$ 次为头面的概率，却通常既依赖于 t 又依赖于X_t 的现值。

图 6.1 表示以 X_0 开始的 X 在每一个时间t 可能达到的状态的结点网
209 络。各分枝对应于正的转移概率。不用说，这个图在本质上与图 3.5 中二项式模型的网格是相同的。

马尔可夫链 X 是非平稳的，因为转移概率能够随着 t 的变化而变化。然而，通过设 $\hat{X}_t=$（X_t，t）定义一个新的随机过程，显然 $\hat{X}$ 也是一个

马尔可夫链，事实上，$\hat{X}$ 是平稳的。实际上，图 6.1 中的结点对应着它的每一个形式为（n，t）的可能状态，而分枝对应着它可能的正马尔可夫转移概率。这种“平稳”的观点对于即将发展起来的期限结构模型会更方便。

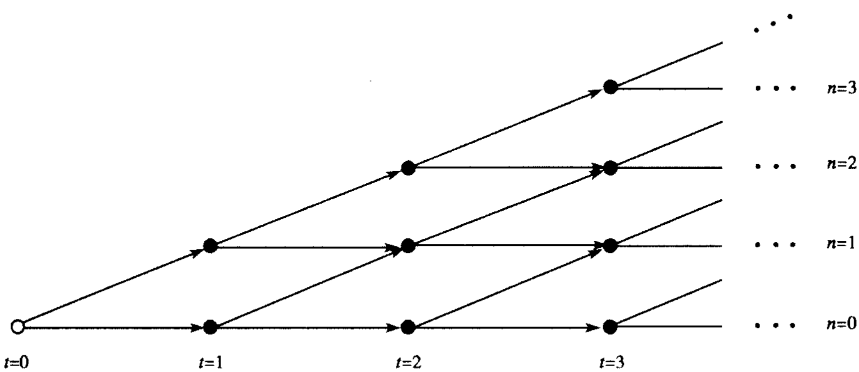


图 6.1　马尔可夫链 X 的状态空间

现在假设存在函数$\rho_t:\{0,1,\cdots,t\}\to(0,\infty)$对于 $t=0$，1，…，$T-1$。通常，每一个这样的函数在其定义域上都是严格递增的，但这不是决定性的。我们能够通过设

$$r_{t+1}(\omega)=\rho_t(X_t(\omega)),\quad t=0,1,\cdots,T-1$$

定义即期利率过程 r。马尔可夫链 X 能够被解释成满足那种性质的“外生”因素，这里那种性质是指它的知识蕴含着即期利率 r 的知识。在时间 t，一旦知道 $X_t=n$，比如说，你不仅知道$r_{t+1}=\rho_t(n)$，而且你知道在时间 $t+1$ 的即期利率 r_{t+2}将是$\rho_{t+1}(n)$或者 $\rho_{t+1}(n+1)$。特别，如果每一个函数 ρ_t 在其定义域上是严格递增的，那么 r_{t+1}的知识等价于 X_t 的知识，同时即期利率过程本身是一个马尔可夫链。这是通常的情况。

当然，函数 ρ_t 的显性知识不是必须的；它们被引进的主要目的是作为把这种期限结构模型与 3.6 节中关于马尔可夫链的讨论，特别是例 3.5 相联系的一种纽带。为了发展期限结构模型，人们能直接从图 6.1 中所示的状态空间表示法去对即期利率过程 r_t 给出详细说明，方法是通过规定它在网格中的每一个结点上的值。设 $r_{t+1}(n)$表示与状态（n，t）相联系的值，对于 $n=0$，1，…，t 和$t=0$，1，…，$T-1$。即使$r_{t+1}(n_1)=$

$r_{t+1}(n_2)$，人们的理解仍旧是在这个证券市场中的代理人在时间 t 知道基
210 本状态$\hat{X}_t=(n,t)$。

为了完成对期限结构的详细说明，有必要规定过程 $\hat{X}$ 的条件风险中性转移概率。由于从状态$\hat{X}_t=(n,\ t)$ 转移的仅有两个类型是可行的，即转移到状态（$n+1$，$t+1$）或者状态（n，$t+1$），所以，引入记号

$$q(n,t)=Q\{\hat{X}_{t+1}=(n+1,t+1)\mid\hat{X}_t=(n,t)\}$$

是方便的，对于 $n=0$，1，…，t 和$t=0$，1，…，$T-1$。例如，注意到

$$Q\{r_{t+2}=r_{t+2}(n)\mid\hat{X}_t=(n,t)\}=1-q(n,t)$$

现在马尔可夫链期限结构模型的完备详细说明，能够简明地以网格图的形式表示出来，如图 6.2 所示。满足 T 时间的时期在这个网格中存在$1+2+\cdots+T=T(T+1)/2$ 个结点，而不计算在时间 T 的最终结点。这样，在此模型中存在作为具体规定的总数$T(T+1)$个参数，每一个结点有一个 r 值和一个q 值。

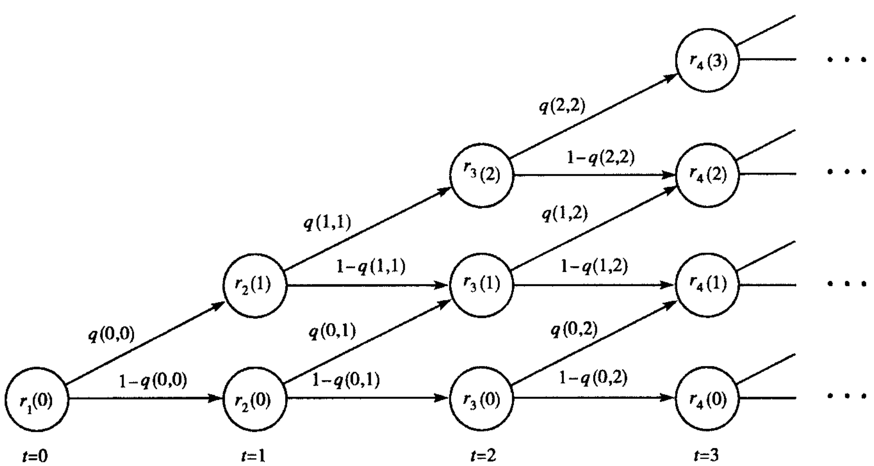


图 6.2　马尔可夫链期限结构模型

关于零息债券的价格如何呢？考虑到方程（6.2）和马尔可夫性质，我们有

$$Z_t^\tau = E_Q[1/\{(1+r_{t+1})\cdots(1+r_\tau)\}|\mathscr{F}_t]$$
$$= E_Q[1/\{(1+r_{t+1})\cdots(1+r_\tau)\}|X_t]$$

换句话说，零息债券价格依赖于基本因素 X_t 的状态，然而不同的是它与价格的历史及利率无关。如同即期利率一样，Z_t^τ 的值能表示成 X_t 的某一个函数。等价地，过程 Z^τ 完全凭借知道其在图 6.2 网格中每一个结点上 211
的值来规定说明。我们利用这后一种方法，并设 $Z_t^\tau(n)$ 表示对应于 $X_t = n$ 的结点上 Z_t^τ 的值。

就即期利率及条件风险中性概率而论，拥有 $Z_t^\tau(n)$ 的公式是有用的。我们能够从方程（6.4）中推导出公式，现在将（6.4）重新写成

(6.10)
$$Z_t^\tau(n) = \frac{1}{1+r_{t+1}(n)}[q(n,t)Z_{t+1}^\tau(n+1) + [1-q(n,t)]Z_{t+1}^\tau(n)]$$

记

$$\delta(n,t,1) = \frac{q(n,t)}{1+r_{t+1}(n)} \quad 及 \quad \delta(n,t,0) = \frac{1-q(n,t)}{1+r_{t+1}(n)}$$

因此，(6.10) 能够简化成为

$$Z_t^\tau(n) = \sum_{i=0}^{1} \delta(n,t,i) Z_{t+1}^\tau(n+i)$$

由于 $Z_\tau^\tau = 1$，所以对 t 的倒推归纳法能够运用这一方程来证明对于 $t = 0, \cdots, \tau$ 和 $n = 0, \cdots, t$ 有

(6.11)
$$Z_t^\tau(n) = \sum_{i_1=0}^{1} \delta(n,t,i_1) \sum_{i_2=0}^{1} \delta(n+i_1, t+1, i_2) \cdots \cdots \sum_{i_{\tau-1}=0}^{1} \delta(n+i_1+\cdots+i_{\tau-t-1}, \tau-1, i_{\tau-1})$$

$r_{t+1}(n_2)$，人们的理解仍旧是在这个证券市场中的代理人在时间 t 知道基
210 本状态$\hat{X}_t=(n,t)$。

为了完成对期限结构的详细说明，有必要规定过程 $\hat{X}$ 的条件风险中性转移概率。由于从状态$\hat{X}_t=(n, t)$ 转移的仅有两个类型是可行的，即转移到状态 $(n+1, t+1)$ 或者状态 $(n, t+1)$，所以，引入记号

$$q(n,t)=Q\{\hat{X}_{t+1}=(n+1,t+1)\mid \hat{X}_t=(n,t)\}$$

是方便的，对于 $n=0, 1, \cdots, t$ 和$t=0, 1, \cdots, T-1$。例如，注意到

$$Q\{r_{t+2}=r_{t+2}(n)\mid \hat{X}_t=(n,t)\}=1-q(n,t)$$

现在马尔可夫链期限结构模型的完备详细说明，能够简明地以网格图的形式表示出来，如图 6.2 所示。满足 T 时间的时期在这个网格中存在$1+2+\cdots+T=T(T+1)/2$ 个结点，而不计算在时间 T 的最终结点。这样，在此模型中存在作为具体规定的总数$T(T+1)$个参数，每一个结点有一个 r 值和一个q 值。

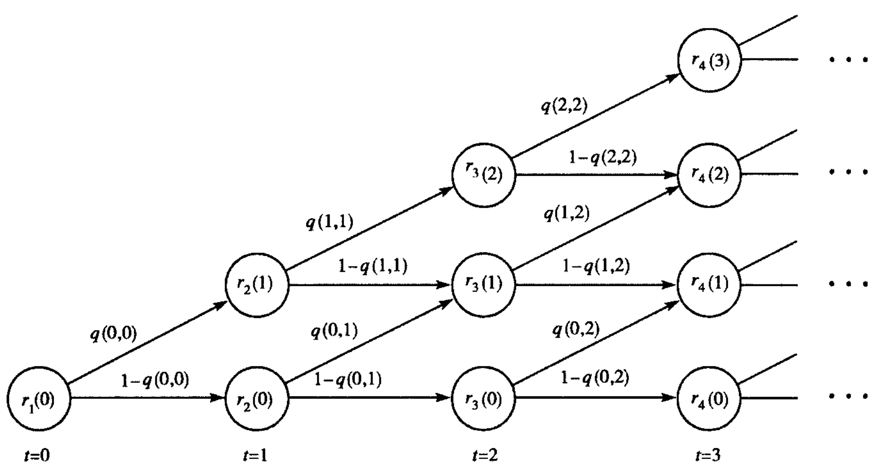


图 6.2　马尔可夫链期限结构模型

关于零息债券的价格如何呢？考虑到方程（6.2）和马尔可夫性质，我们有

$$
\begin{aligned}
Z_t^{\tau} &= E_Q[1/\{(1+r_{t+1})\cdots(1+r_{\tau})\}\mid \mathscr{F}_t] \\
&= E_Q[1/\{(1+r_{t+1})\cdots(1+r_{\tau})\}\mid X_t]
\end{aligned}
$$

换句话说，零息债券价格依赖于基本因素 X_t 的状态，然而不同的是它与价格的历史及利率无关。如同即期利率一样，Z_t^{τ} 的值能表示成 X_t 的某一个函数。等价地，过程 Z^{τ} 完全凭借知道其在图 6.2 网格中每一个结点上 211
的值来规定说明。我们利用这后一种方法，并设 $Z_t^{\tau}(n)$ 表示对应于 $X_t = n$ 的结点上 Z_t^{τ} 的值。

就即期利率及条件风险中性概率而论，拥有 $Z_t^{\tau}(n)$ 的公式是有用的。我们能够从方程（6.4）中推导出公式，现在将（6.4）重新写成

(6.10)
$$
\begin{aligned}
Z_t^{\tau}(n) = \frac{1}{1+r_{t+1}(n)}[q(n,t)Z_{t+1}^{\tau}(n+1) \\
+[1-q(n,t)]Z_{t+1}^{\tau}(n)]
\end{aligned}
$$

记

$$
\delta(n,t,1)=\frac{q(n,t)}{1+r_{t+1}(n)} \quad \text{及} \quad \delta(n,t,0)=\frac{1-q(n,t)}{1+r_{t+1}(n)}
$$

因此，(6.10) 能够简化成为

$$
Z_t^{\tau}(n) = \sum_{i=0}^{1}\delta(n,t,i)Z_{t+1}^{\tau}(n+i)
$$

由于 $Z_{\tau}^{\tau}=1$，所以对 t 的倒推归纳法能够运用这一方程来证明对于 $t=0$，…，τ 和 $n=0$，…，t 有

(6.11)
$$
\begin{aligned}
Z_t^{\tau}(n) = \sum_{i_1=0}^{1}\delta(n,t,i_1)\sum_{i_2=0}^{1}\delta(n+i_1,t+1,i_2)\cdots \\
\cdots\sum_{i_{\tau-1}=0}^{1}\delta(n+i_1+\cdots+i_{\tau-t-1},\tau-1,i_{\tau-1})
\end{aligned}
$$

特别，零息债券时间-0的价格是由

$$\textbf{(6.12)} \qquad Z_0^{\tau} = \sum_{i_1=0}^{1}\delta(0,0,i_1)\sum_{i_2=0}^{1}\delta(i_1,1,i_2)\cdots \cdots\sum_{i_\tau=0}^{1}\delta(i_1+\cdots+i_{\tau-1},\tau-1,i_\tau)$$

给出的。

如这节开始所述，人们的愿望是，期限结构模型与观察到的时间-0的零息债券价格的期限结构相一致。原则上，方程（6.12）能够被用来以一种前后一贯的方式来选取模型的参数值。但是，对此存在两个问题。第一，用方程（6.12）求解右边参数的目的很难达到。第二，我们一般的马尔可夫期限模型需要 $T(T+1)$个参数，而观察到的时间 0-的期限结构连同（6.12）仅给出$T(T+1)$个未知量中的 T 个方程。我们在对参数的选取上仍有相当大的自由度。

这个问题将通过模型以更为详细说明的方法来解决。其思想是通过对
212 即期利率以及/或者条件风险中性概率做一些假定，缩减参数的有效数目。目的是获得一个求解惟一参数值的方程组。

通常的详细规定是对“波动性”做出某种假定，即将波动性取成比值 $r_{t+1}(n+1)/r_{t+1}(n)$或者比值$[1+r_{t+1}(n+1)]/[1+r_{t+1}(n)]$。这两种方法在下面的两个例子中加以验证。

例 6.4 假设条件风险中性概率是与 n 相独立的，也就是

$$q(n,t)=q(t),\quad 0\leqslant n\leqslant t<T$$

这 T 个数$q(0),\cdots q(T-1)$，即所有的条件风险中性概率是已具体指定的。另外，T 个数$c(0),\cdots,c(T-1)$也是具体规定的，并且它需要满足(第一个等式刚好是（6.3）)

$$\textbf{(6.13)} \qquad \frac{Z_t^{t+1}(n+1)}{Z_t^{t+1}(n)}=\frac{1+r_{t+1}(n)}{1+r_{t+1}(n+1)}=c(t),\quad 0\leqslant n\leqslant t<T$$

数 $c(t)$能够被解释成是对时间 t 的即期利率波动性的度量，该度量与 n

无关。运用（6.13）递归地得出

$$\textbf{(6.14)}\quad Z_{\tau-1}^{\tau}(n+i)=Z_{\tau-1}^{\tau}(n)c^{i}(\tau-1),\quad 0\leqslant n\leqslant n+i\leqslant\tau-1<T$$

特别，

$$\textbf{(6.15)}\quad Z_{\tau-1}^{\tau}(i)=Z_{\tau-1}^{\tau}(0)c^{i}(\tau-1),\quad 0\leqslant i\leqslant\tau-1<T$$

由于 $Z_{\tau-1}^{\tau}(n)=1/[1+r_{\tau}(n)]$，这表明一旦知道 $r_t(0)$，你能够推出 $r_t(n)$ 对于所有 $n\geqslant 1$ 。因此，如果我们能够选取 T 个数 $r_0(0),\cdots,r_{T-1}(0)$（等价地 $Z_0^1(0),Z_1^2(0),\cdots,Z_{T-1}^{T}(0)$）与 T 个观察到的零息债券价格 $Z_0^1,\cdots,Z_0^T$ 相一致，那么这个模型将是被完全说明的。

为了说明如何做到这点，需用处理下面的方程：

$$\textbf{(6.16)}\quad Z_t^{\tau}(n)=\prod_{j=t}^{\tau-1}g(j,\tau-1)Z_j^{j+1}(n),\quad n=0,1,\cdots,t$$

其中，$g(s,s)\equiv 1$ ，而

$$g(j,s)\equiv 1-q(j)+q(j)c(j+1)\cdots c(s),\quad j=0,1\cdots,s-1$$

方程（6.16）能利用对自变量 t 的倒推归纳法来证实，从 $t=\tau-1$ 开始，对此显然成立。假设（6.16）对 $t+1$ 是正确的，方程（6.10）给出

$$Z_t^{\tau}(n)=Z_t^{t+1}(n)\left[q(t)Z_{t+1}^{t}(n+1)+[1-q(t)]Z_{t+1}^{\tau}(n)\right]$$ 213

$$\begin{aligned}
&=Z_t^{t+1}(n)\Big[q(t)\prod_{j=t+1}^{\tau-1}g(j,\tau-1)Z_j^{j+1}(n+1)\\
&\qquad+\{1-q(t)\}\prod_{k=t+1}^{\tau-1}g(k,\tau-1)Z_k^{k+1}(n)\Big]\\
&=Z_t^{t+1}(n)\Big[q(t)\prod_{j=t+1}^{\tau-1}g(j,\tau-1)Z_j^{j+1}(n)c(j)\\
&\qquad+\{1-q(t)\}\prod_{k=t+1}^{\tau-1}g(k,\tau-1)Z_k^{k+1}(n)\Big]
\end{aligned}$$

这里最后一个等式利用了（6.14）。因此

$$\begin{aligned} Z_t^{\tau}(n) &= Z_t^{t+1}(n)\left[q(t)\prod_{j=t+1}^{\tau-1}c(j)+1-q(t)\right]\prod_{j=t+1}^{\tau-1}g(j,\tau-1)Z_j^{j+1}(n) \\ &= Z_t^{t+1}(n)g(t,\tau-1)\prod_{j=t+1}^{\tau-1}g(j,\tau-1)Z_j^{j+1}(n) \end{aligned}$$

以及方程（6.16）被证实。

从（6.16）得出结论

$$\frac{Z_0^{t+1}(0)}{Z_0^{t}(0)}=\frac{\prod_{j=0}^{t}g(j,t)Z_j^{j+1}(0)}{\prod_{j=0}^{t-1}g(j,t-1)Z_j^{j+1}(0)}=\frac{Z_t^{t+1}(0)\prod_{j=0}^{t-1}g(j,t)}{\prod_{j=0}^{t-2}g(j,t-1)}$$

其中，第二个等式利用了 $g(t,t)=g(t-1,t-1)=1$。因此，这与（6.15）一起给出重要的结果对于 $0\leqslant n\leqslant t<T$：

$$\textbf{(6.17)}\qquad Z_t^{t+1}(n)=\frac{Z_0^{t+1}(0)}{Z_0^{t}(0)}[c(t)]^{n}\frac{\prod_{j=0}^{t-2}g(j,t-1)}{\prod_{j=0}^{t-1}g(j,t)}$$

（6.17）的右边是完全已知的，理由来自于已明确说明的 $q(t)$ 和 $c(t)$，或者零息债券价格的时间-0 的期限结构。因此，$r_{t+1}(n)=1/Z_t^{t+1}(n)-1$ 是已知的，对于所有 n 和 t。

数 $c(t)$ 正常是在 1 附近，这意味着即期利率从一个时期到下一个时期没有变化太大。实际上，为了阻止利率成为负的或者过分的大，这些数必须小心谨慎地选取。例如，如果 $c(t)=1$，那么由（6.14），$Z_t^{t+1}(n)$ 是与 n 无关的。这也蕴含 $g(j,t)=g(j,t-1)$，所以（6.17）成为 $Z_t^{t+1}(n)=Z_0^{t+1}(0)/Z_0^{t}(0)$，也就是在时间 t 的一个时期的零息债券价格，不仅依赖于状态 n，而且依赖于初始的期限结构。

214 这个模型能够被推广到允许风险中性条件概率 $q(t)$ 依赖于状态 n 的情况上。在相反方向上，一个重要的特殊情况是通过取 $q(t)=q$ 和 $c(t)=1/k$ 来获得的，对于所有 t，其中 q 和 k 都是满足 $q<1$ 的明确说明的正的纯量。于是，对于 $j<s$，函数 g 成为

$$g(j,s)=1-q+qk^{j-s}\equiv\frac{1}{h(s-j)}$$

其中，新的函数 h 是以一种明显的方式来定义的。在这种情况下（6.17）直接变为$Z_t^{t+1}(n)=Z_0^{t+1}(0)k^{-n}h(t)/Z_0^t(0)$。

例 6.5 假设$q(n,t)=5$ 对于所有 n 和t，这样

$$\delta(n,t,1)=\delta(n,t,0)=\frac{0.5}{1+r_{t+1}(n)}=0.5Z_t^{t+1}(n)$$

方程（6.12）简化成

$$Z_0^\tau=\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau-1}Z_0^1(0)\sum_{i_1=0}^{1}Z_1^2(i_1)\sum_{i_2=0}^{1}Z_2^3(i_1+i_2)\cdots \tag{6.18}$$
$$\cdots\sum_{i_{\tau-1}=0}^{1}Z_{\tau-1}^{\tau}(i_1+\cdots+i_{\tau-1})$$

剩下来的是对即期利率的$T(T+1)/2$ 个值进行具体指定。对这些值的选取要与 T 个时间-0 的零息债券价格以及$T(T-1)/2$ 个规定的即期利率波动性相一致，给出总数为$T(T+1)/2$ 个的约束。

即期利率波动性定义为

$$\sigma_t(n)\equiv\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_{t+2}(n+1)}{r_{t+2}(n)}\right),\quad 0\leqslant n\leqslant t\leqslant T-1 \tag{6.19}$$

这样，如果你知道 r_{t+1}或者关于 n 的一个值$Z_t^{t+1}(n)$，那么如同例 6.4 一样，你就知道所有 $n=0$，…，t 的值。例如，$r_{t+2}(n+1)=r_{t+2}(0)\exp\{2[\sigma_t(0)+\cdots+\sigma_t(n)]\}$。运用这种思想，方程（6.18）以及时间 0 的期限结构，你能够依时间向前以递归方式来解出所有即期利率的值。以（6.18）中$\tau=2$ 及（6.19）中 $t=0$ 开始，你求解出两个未知量$r_2(0)$和 $t_2(1)$。通常，一旦知道$Z_{t-1}^t(n)$和 $r_t(n)$，对于所有 $0\leqslant n<t<\tau$，你就使用$\tau-1$ 个满足 $t=\tau-2$ 的（6.19）形式连同（6.18）可求解出τ个未知量 $r_\tau(0),\cdots,r_\tau(\tau-1)$。

一种可供选择的观点是，把即期利率过程 r 认为是由随机微分方程

$$\Delta r_{t+1}=\mu(t,r_t)+\sigma(t,r_t)N_t \tag{6.20}$$

215 来调节的，其中 $\mu:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 和 $\sigma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ 均是特定的函数，$\{N_t\}$ 是满足 $Q(N_t=1)=Q(N_t=-1)=0.5$ 的独立分布的随机变量的序列，而且像前面一样 $\Delta r_{t+1}=r_{t+1}-r_t$。这个随机微分方程公式是吸引人的，因为在风险中性概率测度 Q 下即期利率变化的条件期望是$\mu(t,r_t)$，而即期利率变化的条件方差是$\sigma^2(t,r_t)$。

已知定义在二项式网格上的即期利率过程 r，很容易提供关于 μ 和σ 的函数。例如，一旦知道$r_t(n),r_{t+1}(n)$及 $r_{t+1}(n+1)$，随机微分方程给出

$$r_{t+1}(n+1)-r_t(n)=\mu(t,r_t(n))+\sigma(t,r_t(n))$$

及

$$r_{t+1}(n)-r_t(n)=\mu(t,r_t(n))-\sigma(t,r_t(n))$$

在此情况下,人们必有

$$\mu(t,r_t(n))=\frac{r_{t+1}(n+1)+r_{t+1}(n)-2r_t(n)}{2}$$

及

$$\sigma(t,r_t(n))=\frac{r_{t+1}(n+1)-r_{t+1}(n)}{2}$$

更有用的方法是以 r 的随机微分方程开始，然后推导出二项式网格公式。例如，假设

$$\Delta r_{+1}=\emptyset(t)-ar_t+\sigma(t)N_t \tag{6.21}$$

其中，a 是一个满足 $0<a<1$ 的纯量，而 $\varnothing$ 和 σ 均是其定义域$\mathbb{R}$上的正函数。这一公式是吸引人的，因为它表明如果 $r_t>\varnothing(t)/a$，那么利率倾向于递减，否则利率倾向于递增。然而，为了这一过程与二项式网格公式相一致，函数 σ 必满足某一个约束。特别，一个上下（Up-down）运动（即 $N_t=1$ 及 $N_{t+1}=-1$）必获得与下上（Down-up）运动（即 $N_t=-1$ 及 $N_{t+1}=1$）相同的即期利率的值。换句话说，我们必有

$$
\begin{aligned}
r_{t+2} &= \varnothing(t+1)+(1-a)\varnothing(t)+(1-a)^2 r_t+(1-a)\sigma(t)-\sigma(t+1) \\
&= \varnothing(t+1)+(1-a)\varnothing(t)+(1-a)^2 r_t-(1-a)\sigma(t)+\sigma(t+1)
\end{aligned}
$$

对于所有 t。使其成立的充分必要条件（假定 $\sigma>0$）是 $\sigma(t+1)=(1-a)\sigma(t)=(1-a)^t\sigma(1)$。因此，这个随机微分方程公式对二项式网格的适应导致了对“波动性”函数 σ 的一个苛刻的限制。

这个关于波动性函数的限制能够凭借三项式网格来对其修改。其思想是从一个时期到下一个时期即期利率运动到三个可能值中的一个上：“上升”、“居中”、“下跌”。此外，各种各样的路径重新结合：上下＝中中＝上下、上中＝中上、中下＝下中。这样，在一个时期之后将有三个结点，两个时期之后有五个结点，进而，一般说来在 t 时期之后有 $2t+1$ 个结 216
点。

r 的随机微分方程与（6.20）有相同的形式，只是现在随机变量 $\{N_t\}$ 是独立的，但是满足 $Q(N_t=1)=Q(N_t=-1)=q(t)$ 及 $Q(N_t=0)=1-2q(t)$，其中 $0<q(t)<1/2$。因此（参见习题 6.7），即期利率变化的条件均值和方差分别是 $\mu(t,r_t)$ 和 $2q(t)\sigma^2(t,r_t)$。

现在再一次地考察特殊情况（6.21），只是 $\{N_t\}$ 如同前一段所述。这个公式与三项式网格是一致的，当且仅当（参见习题 6.8）$\sigma(t+1)=(1-a)\sigma(t)=(1-a)^t\sigma(1)$，条件与前相同。在此情况下，即期利率变化的条件方差是 $2q(t)(1-a)^{2t-2}\sigma(1)$。因此，选取概率 $q(t)$ 的灵活性赋予建模者某些用理想值去适应条件方差的余地。例如，倘若这些概率满足 $0<q(t)<1/2$，那么这些方差通过取 $q(t)=0.5(1-a)^{2-2t}$ 能成为常数。

习题 6.3 对例子 6.4 证明，如果 $m_t^{-1} \leqslant [c(t)]^t \leqslant m_t$ 对于某个数 $m_t > 1$，那么

$$\frac{Z_0^{t+1}(0)}{m_t Z_0^t(0)} \leqslant Z_t^{t+1}(n) \leqslant \frac{m_t Z_0^{t+1}(0)}{Z_0^t(0)}$$

运用这一事实证明，为了保证即期利率保持在指定的上限值和下限值之间，如何选取 c 的值。

习题 6.4 对于满足 $q(t) = q$ 和 $c(t) = 1/k$ 的例 6.4 的特殊情况，证明以任意的 q，k 值和初始期限结构开始，可能获得负的利率。

习题 6.5 对于例 6.4 中的模型，证明

(a) $Z_t^{\tau}(n) = Z_t^{\tau}(0) \prod_{j=t}^{\tau-1} c^n(j), n \leqslant t < \tau$

(b) $Z_t^{\tau}(n) = [Z_0^{\tau}(0)/Z_0^t(0)] \left[\prod_{j=t}^{\tau-1} c^n(j)\right] \left[\prod_{j=0}^{t-1} \frac{g(j, t-1)}{g(j, \tau-1)}\right]$,

$n \leqslant t < \tau$

(c) $f(t, \tau, n) = [Z_0^{\tau}(0)/Z_0^{\tau+1}(0)][c^n(\tau)] \left[\prod_{j=0}^{t-1} \frac{g(j, \tau)}{g(j, \tau-1)}\right] - 1$,

$n \leqslant t < \tau$

其中，$f(t, \tau, n)$ 表示对应于状态 n 在时间 t 的远期即期利率。

习题 6.6 例 6.5 能够推广到允许满足 $0 < q(n, t) < 1$ 的任意条件概率上，在此情况下，波动性是由

$$\sigma_t(n) = \ln\{r_{t+2}(n+1)/r_{t+2}(n)\} \sqrt{q(n, t)[1 - q(n, t)]}$$

定义的。对于满足 $Z_0^1 > Z_0^2 > \cdots > Z_0^{\tau}$ 的折价债券价格的任意期限结构与满足 $\sigma_t(n) > 0$ 的任意波动性，通过归纳法证明，存在惟一的且严格正的即
217 期利率过程 r，使得模型与这些量及无套利相一致。

习题 6.7 假设即期利率 r 是由随机微分方程（6.20）所调节的，满足 $Q(N_t = 1) = Q(N_t = -1) = q(t)$ 及 $Q(N_t = 0) = 1 - 2q(t)$，其中 $0 < q(t) < 1/2$。验证即期利率变化的条件均值和方差分别是 $\mu(t, r_t)$ 和 $2q(t)\sigma^2(t, r_t)$。

习题 6.8 假设即期利率 r 是由随机微分方程（6.21）所调节的，满足

$Q(N_t=1)=Q(N_t=-1)=q(t)$及$Q(N_t=0)=1-2q(t)$，其中$0<q(t)<1/2$。假定$\sigma(t)>0$，验证这个公式是与三项式网格相一致的，当且仅当$\sigma(t+1)=(1-a)\sigma(t)=(1-a)^t\sigma(1)$。

习题 6.9 假设即期利率是由随机微分方程（6.20）所调节的，满足形式为$\sigma(t,r)=\sqrt{r}\sigma(t)$的波动性函数，对于$\mathbb{R}$上的某一个正的函数$\sigma$。在对$\mu$和$\sigma$什么样的限制条件下，这个公式将与：

(a) 二项式网格

(b) 三项式网格

相一致？

6.3 收益曲线模型

在前面两节中，期限结构模型的构建强调了即期利率过程$r=\{r_t:t\geq 1\}$的作用。其思想是首先规定一个概率空间和域流，然后规定过程r（通常r取为马尔可夫链）。最后，运用像（6.2）那样的方程规定出零息债券过程。这是一种很容易实施的方法，利用了各种各样的无套利期限结构模型。然而，这一方法有一个缺点是：它对不同到期日的收益率和零息债券价格行为的建模是很困难的。例如，建模者会把在时期 10 到期的零息债券的波动性参与到模型中。或者建模者可能对短时期利率和长时期利率之间的利差特别感兴趣。像这些特征都不能用即期利率方法来显性地建模表示出来。

一种可供选择方法——收益曲线（Yield Curve）或者整体收益(Whole Yield）方法，是通过将整个期限结构认为是一个随机过程的状态来建模。在对概率空间和信息流的域流子模型规定之后，你就直接对整个期限结构依时间如何演进作详细说明。这样做要通过运用收益的期限结构、零息债券价格的期限结构，或者远期即期利率的期限结构。无论怎样选取，在一种期限结构过程被规定后，另外两种以及即期利率过程可从6.1节中的方法来获得。此外，期限结构过程经常被取为一个马尔可夫 218
链，而且人们能运用现实世界或者风险中性概率测度来具体实施。

收益曲线方法的不足之处是，人们担心套利机会的进入会促使建模的发展与实现比用即期利率方法更困难。把方程（6.3）和（6.4）结合在一起，得出

$$(6.22)\qquad Z_s^{\tau}=Z_s^{s+1}E_Q[Z_{s+1}^{\tau}|\mathscr{F}_s],\quad 0\leqslant s<\tau\leqslant T$$

对于无套利机会而言，充分且必要条件是存在一个概率测度 Q（风险中性概率测度），使得这个方程对于所有的指标 s 和τ均成立。但是，像在下面例子中所阐述的，对于任何一个概率测度而言，对期限结构过程的任意选取不会满足（6.22）。

例 6.6 假设 $T=3$，$K=8$ 以及信息子模型是一个二项式树（但不是网格）。时间 0 的零息债券价格取为 $Z_0^1=0.95$，$Z_0^2=0.90$，$Z_0^3=0.85$。在"上升"运动的情况下，时间 1 的折价债券价格取为 $Z_1^2=0.94$ 和 $Z_1^3=0.89$；而在"下跌"运动情况下，时间 1 的折价债券价格取为 $Z_1^2=0.96$ 和 $Z_1^3=0.91$。设 q 表示在时间 1 和时间 0 之间的"上升"运动风险中性条件概率。对于$\tau=2$ 的方程（6.22）蕴含 $q=0.6316$，而对于$\tau=3$ 的方程（6.22）蕴含 $q=0.7632$。但是不存在概率测度 Q，在此情况下，方程（6.22）既对于$\tau=2$ 成立，又对于$\tau=3$ 成立。因此，必存在一个套利机会。

为了产生一个套利机会，设 H_i 表示购买零息债券在时间 0 的单位数量，此零息债券在 i 时期后到期，$i=1$，2 和 3。这个投资组合的初始价值是 $V_0=0.95H_1+0.9H_2+0.85H_3$；为了拥有套利机会，例如，我们想要 $V_0=0$ 蕴含$H_2=(-19/18)H_1-(17/18)H_3$ 。在一个上升运动后，这个投资组合的时间 1 价值将是

$$V_1=H_1+0.94H_2+0.89H_3=0.0078H_1+0.0022H_3$$

而在一个下跌运动后，这个投资组合的时间 1 价值则将是

$$V_1=H_1+0.96H_2+0.91H_3=-0.0133H_1+0.0033H_3$$

这样，使 V_1 右边的两个值为严格正的任何一个交易策略将是一个套利机会。例如，人们能够取 $H_1=0$ 和 $H_3=18$，在此情况下，$H_2=-17$。

例 6.6 所阐述的问题是模型被过分详细规定，以至于其对（6.22）不可能成立。为了绕过这一困难，技巧是对风险中性概率测度 Q 及期限结构过程价值给予足够地规定，以使（6.22）（或者其等价的一种形式）能

够用来惟一地对模型的协调做出规定。这将通过运用信息的二元树子模型来实施，其中从一个结点“上升”运动的风险中性概率测度将总是用 q 表示（真实的值可能从一个结点到另一个结点不等）。这里的目标是解释如何得到一个对零息债券价格的期限结构过程令人满意的规定。稍后，一种可供选择的更有效的方法将被提出来，其中已构造出的过程就是远期即期利率的期限结构。 219

假设信息树 s 结点每次的零息债券价格的期限结构 $\{Z_s^{s+1}, Z_s^{s+2}, \cdots, Z_s^T\}$ 已被规定出来。这会是一个满足 $1>Z_s^{s+1}>Z_s^{s+2}>\cdots>Z_s^T>0$ 的 $T-s$ 个数的任何集合。以两步完成的目标是在两个“后序”结点上对这些零息债券价格的时间 $s+1$ 值给出规定。这两步过程能够在信息树中的其他结点上进行复制，因而完成了对期限结构过程的规定。

第一步是设置上升运动事件中的时间 $s+1$ 零息债券价格。这些将是记为$Z_{s+1}^{s+2}(u)Z_{s+1}^{s+3}(u)\cdots Z_{s+1}^{T}(u)$的 $T-s-1$ 个任意数，且满足

$$(6.23)\qquad 1>Z_{s+1}^{s+2}(u)>Z_{s+1}^{s+3}(u)>\cdots>Z_{s+1}^{T}(u)>0$$

它正是建模者能够并入合乎需要特征的模型，例如，在所运用的方法中期限结构从一个时间时期到下一个时间时期转换。

第二步并且是最后一步，是运用方程（6.22）对“下跌”运动事件中 $T-s-1$ 个零息债券价格给出规定，它们记为$Z_{s+1}^{s+2}(d),Z_{s+1}^{s+3}(d),\cdots,Z_{s+1}^{T}(d)$。对 $Z_{s+1}^{\tau}(d)$求解，（6.22）给出

$$(6.24)\qquad Z_{s+1}^{\tau}(d)=\frac{Z_s^{\tau}/Z_s^{s+1}-qZ_{s+1}^{\tau}(u)}{1-q},\quad \tau=s+2,\cdots,T$$

因此，这就完成了对两个后序结点上的期限结构过程的规定，只是可能有一个问题：无法确保零息债券价格的期限结构将是“合乎逻辑的”，并满足不等式

$$(6.25)\qquad 1>Z_{s+1}^{s+2}(d)>Z_{s+1}^{s+3}(d)>\cdots>Z_{s+1}^{T}(d)>0$$

考虑到（6.24），在一个上升运动后零息债券价格仅仅满足（6.23）中的不等式是不充分的；它们必须满足某些附加的约束。

方程（6.24）表明$Z^T_{s+1}(d)>0$，当且仅当

$$(6.26) \qquad Z^T_{s+1}(u)<\frac{Z^T_s}{qZ^{s+1}_s}$$

这是容易满足的，因为右边一定是严格正的。

220 方程（6.24）表明$1>Z^{s+2}_{s+1}(d)$，当且仅当

$$(6.27) \qquad Z^{s+2}_{s+1}(u)>\frac{Z^{s+2}_s}{qZ^{s+1}_s}-\frac{1-q}{q}$$

这也是容易满足的，由简单的计算可证明右边一定是严格小于 1 的。

最后，剩下的（6.25）中的不等式是

$$Z^{\tau}_{s+1}(d)>Z^{\tau+1}_{s+1}(d),\quad \tau=s+2,\cdots,T$$

方程（6.24）表明这些不等式成立，当且仅当

$$(6.28) \qquad Z^{\tau}_{s+1}(u)-Z^{\tau+1}_{s+1}(u)<\frac{Z^{\tau}_s-Z^{\tau+1}_s}{qZ^{s+1}_s},\quad \tau=s+2,\cdots,T-1$$

给定满足$q\in(0,1)$且$1>Z^{s+1}_s>\cdots>Z^T_s>0$的任意$q$，$Z^{s+1}_s$，…，及$Z^T_s$值，选取$Z^{s+2}_{s+1}(u),\cdots,Z^T_{s+1}(u)$，以使（6.28）、（6.23）、（6.26）及（6.27）都满足是可能的（参见习题 6.10）。类似地，给定满足$1>Z^{s+1}_s>\cdots>Z^T_s>0$的任意$Z^{s+1}_s$，…，及$Z^T_s$值以及满足（6.23）的任意$Z^{s+2}_{s+1}(u),\cdots,Z^T_{s+1}(u)$值，选取充分接近于 0 的$q$值，以使（6.28）成立是可能的。因此，利用一点点灵活性，在后序两点上对零息债券价格的合乎逻辑的期限结构给出规定是可能的。此外，由于运用了方程（6.22），所以保证无套利机会的存在。

例 6.7 假设$Z^{s+i}_s=\delta^i$和$Z^{s+1+i}_{s+1}(u)=\theta^i$对于$i=1$，2，…以及两个数$\delta,\theta\in(0,1)$。数$\delta$和$T$是固定的；对$q$和$\theta$的选取存在某种灵活性。不等式（6.26）与

(6.29) $$q\,\theta^{T-s-1}<\delta^{T-s-1}$$

是相同的，而不等式（6.27）与

(6.30) $$1-q+q\,\theta>\delta$$

是相同的。此外，(6.28) 中的不等式与

(6.31) $$q(1-\theta)\theta^{\tau-s-1}<(1-\delta)\delta^{\tau-s-1},\quad \tau=s+2,\cdots,T-1$$

是相同的。现在假设 $\theta=\delta+\varepsilon$ 对于某一个 $\varepsilon>0$。如果 $q<(\delta/\theta)^{T-s-1}$，那么不等式（6.29）将是正确的，如果 ε 是充分的小，那么适当的 q 值能是合适的。不等式（6.30）自动地成立，因为 $1-q+q\theta>1-q+q\delta>(1-q)\delta+q\delta=\delta$。不等式（6.31）是正确的对于所有 $\tau\leqslant T-1$，当且仅当它对于 $\tau=T-1$ 是成立的，所以，我们最终对 q 和 ε 的要求是

$$q<\frac{(1-\delta)}{(1-\delta-\varepsilon)}\left(\frac{\delta}{\delta+\varepsilon}\right)^{T-s-2}$$

对于适当的 q 值和 ε 值，要求常常是容易达到的。 221

在二元树的每一个结点上构造一个零息债券价格的期限结构是难以处理的，因为你需要担心形式（6.25）的约束。运用远期即期利率的期限结构通常容易些，因为你仅仅需要在每一个结点上确保远期利率为正的就行，而不是像（6.25）那样的约束（当然，在两种情况下你必须担心无套利的条件）。

为了理解如何构造一个远期即期利率收益率曲线模型，假设（非负的）远期即期利率的一个期限结构 $\{f(s,s),\cdots,f(s,T-1)\}$ 在二元信息树的 s 结点上一次被规定出来。设 q 是时间（$s+1$）那样结点上的一个"上升"运动的条件风险中性概率，其中那样的结点是指其上的期限结构 $\{f_u(s+1,s+1),\cdots,f_u(s+1,T-1)\}$ 已被规定出来的结点。目标是使用无套利条件去产生在时间（$s+1$）"下跌"结点的期限结构 $\{f_d(s+1,s+1),\cdots,f_d(s+1,T-1)\}$。

运用方程(6.9)，将 Z 代入到方程(6.22)中，人们得到无套利条件

$$(6.32) \quad \prod_{t=s+2}^{\tau}[1+f(s,t-1)]^{-1} = E_Q\left[\prod_{t=s+2}^{\tau}[1+f(s+1,t-1)]^{-1} \mid \mathscr{F}_s\right], \quad \tau = s+2,\cdots,T$$

我们能利用这 $T-s-1$ 个方程来求解 $T-s-1$ 个变量 $f_d(s+1,s+1)$, $\cdots,f_d(s+1,T-1)$。记 $g(s,t)\equiv[1+f(s,t)]^{-1}$, $g_u(s,t)\equiv[1+f_u(s,t)]^{-1}$以及 $g_d(s,t)\equiv[1+f_d(s,t)]^{-1}$。于是,(6.32)能够重新写为

$$\prod_{t=s+2}^{\tau} g(s,t-1) = q\prod_{t=s+2}^{\tau} g_u(s+1,t-1) + (1-q)\prod_{t=s+2}^{\tau} g_d(s+1,t-1)$$

在此情况下

$$(6.33) \quad g_d(s+1,\tau-1) = \frac{\prod_{t=s+2}^{\tau} g(s,t-1) - q\prod_{t=s+2}^{\tau-1} g_u(s+1,t-1)}{(1-q)\prod_{t=s+2}^{\tau} g_d(s+1,t-1)}, \quad \tau = s+2,\cdots,T$$

因此，以$\tau=s+2$ 开始（在此情况下，分母恰好是 $1-q$），然后$\tau=s+3$ 等等，g_d 的值能够递归地计算出。给定任意的 q 值、f 的值与 f_u 的值，无法保证所有的 f_d 值结果为正的。然而，给定任意的 f 的值以及对选取 q 与 f_u 的值的某种灵活性，得到非负的 f_d 的值总是可能的。

222

习题 6.10 验证（6.28）后面说法的结果：给定满足 $q\in(0,1)$ 及 $1>Z_s^{s+1}>\cdots>Z_s^T>0$ 的任意 q，Z_s^{s+1}，$\cdots$，及 Z_s^T 的值，选取 $Z_{s+1}^{s+2}(u)$，$\cdots$，Z_{s+1}^T以至于满足（6.28）及（6.23），(6.26）以及（6.27）。

习题 6.11 在例 6.7 中，假设 $s=0$，$\delta=0.95$ 及 $T=8$。如果 $q=0.5$，那么 $\theta>0.95$ 的什么值是可行的？如果 $\theta=0.96$，那么 q 的什么值是可行的。对于 $q=0.5$ 与 $\theta=0.96$ 的情况，计算$Z_1^\tau(d)$,$\tau=2,\cdots,T$ 。

习题 6.12 假设 $s=0, q=0.5, T=5, f(0,0)=0.05, f(0,1)=0.06,$

$f(0,2)=0.07, f(0,3)=0.06$ 以及 $f(0,4)=0.05$。此外,假设 $f_u(1,t)=f(0,t)+0.01$ 对于所有 $t \geqslant 1$。运用(6.33)验证 $f_d(1,1)=0.0502$, $f_d(1,2)=0.0603, f_d(1,3)=0.0505$ 以及 $f_d(1,4)=0.0407$。

习题 6.13 假设 $f(s,s)$, …, $f(s,T-1)$ 的正值是固定的，对于下列情况请解释是否总是可以产生满足（6.33）的 $f_d(s+1,s+1),\cdots,f_d(s+1,T-1)$ 的正值，如果是，请给出证明。如果不是，请举出反例。

(a) $q \in (0,1)$ 与 $f_u(s+1,s+1),\cdots,f_u(s+1,T-1)$ 的正值均是固定的任意数。

(b) $q \in (0,1)$ 是一个固定的数,但是存在对正数 $f_u(s+1,s+1),\cdots,f_u(s+1,T-1)$ 选取的灵活性。

(c) 正数 $f_u(s+1,s+1),\cdots,f_u(s+1,T-1)$ 是固定的,但是存在对 $q \in (0,1)$ 选取的灵活性。

6.4 远期风险调整概率测度

为了更便利计算利率衍生证券，这节将介绍和描述一种新的概率测度的性质。特别，关于未定权益的价格一种新的且十分有用的公式将被发展起来。然而，首先是来自于概率论的一些基本结果。

本节自始至终设定时间 $\tau \leqslant T$，而且考虑满足 $E_Q[M_\tau]=1$ 的一个严格正的随机变量 $M_\tau \in \mathscr{F}_\tau$。目前，我们简略地取 Q 为风险中性概率测度，但这里 Q 是一个任意的、严格正的概率测度。

通过设

$$P_\tau(\omega) \equiv M_\tau(\omega) Q(\omega), \quad 所有\ \omega \in \Omega$$

来定义一个新的概率测度，记为 P_τ。注意到，事实上 P_τ 是一个合乎逻辑的概率测度，因为 $P_\tau(\omega)>0$ 对于所有 ω，同时假设 $E_Q[M_\tau]=1$ 蕴涵 $P_\tau(\Omega)=1$。设 E_τ 表示对应于 P_τ 的期望算子。

其次，通过设

$$M_t \equiv E_Q[M_\tau | \mathscr{F}_t], \quad t=0,1,\cdots,\tau$$

223 定义一个鞅 $M=\{M_t: t=0, \cdots, \tau\}$。注意$M_0=E_Q[M_\tau]=1$ 且 M 对于 Q 而言是一个鞅，但不必对 P_τ 而言是一个鞅。这个鞅在下面的技术性结果中发挥作用，技术性结果涉及在两种概率测度下的条件期望。

(6.34) 如果 X 是一个随机变量，那么$E_\tau[M_tX|\mathscr{F}_t]=E_Q[M_\tau X|\mathscr{F}_t]$对于 $t=0, 1, \cdots, \tau$。

显然，（6.34）是正确的对于 $X\in\mathscr{F}_t$，进而方程直接变为 $M_tX=XE_Q[M_\tau|\mathscr{F}_t]$。容易看出，它对于 $t=0$ 也是成立的，从而 $M_0=1$，而且我们有

$$E_\tau[X]=\sum_\omega X(\omega)P_\tau(\omega)=\sum_\omega X(\omega)M_\tau(\omega)Q(\omega)=E_Q[M_\tau X]$$

对于一般情况而言，有必要考虑任意 $A\in\mathscr{P}_t$，即对应于 $\mathscr{F}_t$ 的 Ω 分割中的事件，并证明

(6.35) $$E_\tau[M_tX|A]=E_Q[M_\tau X|A]$$

关于左边我们有

$$E_\tau[M_tX|A]=\frac{\sum_{\omega\in A}X(\omega)M_t(\omega)P_\tau(\omega)}{\sum_{\omega\in A}P_\tau(\omega)}=\frac{\sum_{\omega\in A}X(\omega)M_t(\omega)M_\tau(\omega)Q(\omega)}{\sum_{\omega\in A}M_\tau(\omega)Q(\omega)}$$

但是，M_t 在 A 上是常数，而且是由

$$M_t(\omega)=E_Q[M_t|A]=\sum_{\hat\omega\in A}M_\tau(\hat\omega)Q(\hat\omega)/Q(A),\quad \text{所有 } \omega\in A$$

给出的。这样，把此式代入到$E_\tau[M_tX|A]$的表达式中，得到

$$E_\tau[M_tX|A]=\frac{\sum_{\omega\in A}X(\omega)M_\tau(\omega)Q(\omega)}{Q(A)}=E_Q[M_\tau X|A]$$

这就完成了（6.35）的验证，从而证实了（6.34）。

我们现在能够解释概率论中的一个基本关系：

(6.36) 随机过程 $YM=\{Y_tM_t:t=0,\cdots,\tau\}$ 在 Q 下是一个鞅，当且仅当适应的随机过程 $Y=\{Y_t:t=0,\cdots,\tau\}$ 在 P_τ 下是一个鞅。

为了理解这点，注意到，YM 在 Q 下是一个鞅，当且仅当 $Y_tM_t=E_Q[Y_\tau M_\tau|\mathscr{F}_t]$，对于所有 t。现在运用满足 $X=Y_\tau$ 的（6.34），我们看到后者是正确的，当且仅当 $Y_tM_t=E_\tau[M_tY_\tau|\mathscr{F}_t]$，对于所有 t。但是 $E_\tau[M_tY_\tau|\mathscr{F}_t]=M_tE_\tau[Y_\tau|\mathscr{F}_t]$，这样后者与 $Y_t=E_\tau[Y_\tau|\mathscr{F}_t]$ 是相同的，对于所有 t，也就是 Y 在 P_τ 下是一个鞅。

由于这些预备知识有些偏离主题，现在我们准备转回到期限结构模型上。设随机过程 $\pi=\{\pi_t:0\leqslant t\leqslant s\}$ 表示诸如股票、零息债券或者未定权益的资产价格，其中 $\tau\leqslant s\leqslant T$。令 $Y_t=\pi_t/Z_t^\tau$，并且从原理（4.22）中回想起，Y_t 表示在时间 τ 资产交割的时间-t 远期价格（Forward Price）。运用 224
我们远期价格的标准记号，因此，我们有时将 $Y_t=\pi_t/Z_t^\tau$ 写成 O_t。

其次，设 Q 是风险中性概率测度，而令 $M_\tau=[B_\tau Z_0^\tau]^{-1}$。注意到，$M_\tau(\omega)>0$ 与 $E_Q[M_\tau]=(1/Z_0^\tau)E_Q[1/B_\tau]=1$（因为 $Z_0^\tau=E_Q[1/B_\tau]$）。因此，我们能够如上所述继续讨论，并定义 Q-鞅

$$M_t=E_Q[M_\tau|\mathscr{F}_t]=\frac{1}{Z_0^\tau}E_Q[1/B_\tau|\mathscr{F}_t]=\frac{Z_t^\tau}{Z_0^\tau B_t}$$

其中，最后一个等式是来源于 Z_t^τ 的风险中性公式（6.1）。我们也可以定义远期风险调整概率测度（Forward Risk Adjusted Probability Measure）[也称 τ 远期概率测度（τ Forward Probability Measure）]：

$$P_\tau(\omega)=M_\tau(\omega)Q(\omega)=\frac{Q(\omega)}{Z_0^\tau B_\tau(\omega)}$$

现在观察到，$Y_tM_t=O_tM_t=(\pi_t/Z_t^\tau)(Z_t^\tau/[Z_0^\tau B_t])=\pi_t/[Z_0^\tau B_t]$，所以过程 YM 表示资产被常数 Z_0^τ 除后的折现价格。这在风险中性概率测度

Q 下是一个鞅，所以由（6.36）我们有下面重要的结果：

(6.37) 在远期风险调整概率测度 P_τ 下，资产在时间 τ 交割的时间-t 远期价格 O_t 是一个鞅。

原理（6.37）是重要的，因为它导致了衍生证券价格的一个新的且有用的公式。设 $\pi_\tau \in \mathscr{F}_\tau$ 是时间-τ 证券的价格；例如，π_τ 是未定权益时间-τ 的支付。但是，这种资产在时间 τ 交割的时间 τ 远期价格是 $O_\tau = \pi_\tau$，所以（6.37）蕴含

$$O_t = \pi_t / Z_t^\tau = E_\tau[O_\tau / \mathscr{F}_t] = E_\tau[\pi_\tau | \mathscr{F}_t], \quad t \leqslant \tau$$

通过用 Z_t^τ 相乘得出下面的：

(6.38) 如果 π_t 是证券时间-t 的价格，那么

$$\pi_t = Z_t^\tau E_\tau[\pi_\tau | \mathscr{F}_t], \quad t \leqslant \tau$$

当即期利率是常数或者确定的时候，传统的风险中性公式 $\pi_t = B_t E_Q[\pi_\tau / B_\tau | \mathscr{F}_t]$ 是方便的，进而银行账户过程时间-τ 的价值 B_τ 是确定的，而且这个公式简化为 $\pi_t = (B_t / B_\tau) E_Q[\pi_\tau | \mathscr{F}_t]$。因此，对于衍生证券你所需要的全部内容是风险中性概率测度下 π_τ 的条件分布。而对于即期利率 r 为随机的利率模型及其他情形，银行账户价值 B_τ 不是条件期望外在的因素，所以为了应用传统公式你需要在风险中性概率测度下 (π_τ, B_τ) 的条件联合分布（Conditional Joint Distribution）。实际上，这样很难得到结果。另一方面，甚至具有随机利率时，为了应用公式（6.38），你所需要的全部是在对应于时间-τ 的远期调整概率测度下 π_τ 的条件分布。

225 **例 6.1（续）** 对于 $\tau = 3$，我们首先计算出 $M_3(\omega) = [Z_0^3 B_3(\omega)]^{-1} = [0.844\{1 + r_1(\omega)\}\{1 + r_2(\omega)\}\{1 + r_3(\omega)\}]^{-1}$。于是，我们运用风险中性概率计算出远期风险调整概率测度 $P_3(\omega) = M_3(\omega) Q(\omega)$。这些数值连同前面运用 $M_t = E_Q[M_3 | \mathscr{F}_t]$ 计算出的鞅 M 的值，在下面给出。

ω	B_3	M_0	M_1	M_2	M_3	P_3
ω_1	1.2709	1.0	0.939	0.9323	0.9323	0.1714
ω_2	1.2478	1.0	0.939	0.9495	0.9495	0.1102
ω_3	1.2023	1.0	0.995	0.9855	0.9855	0.1495
ω_4	1.1798	1.0	0.995	1.0043	1.0043	0.1489
ω_5	1.1355	1.0	1.051	1.0434	1.0434	0.2694
ω_6	1.1136	1.0	1.051	1.0640	1.0640	0.1509

为了阐述公式（6.38）的应用，考虑满足时间 3 支付 $X(\omega_i)=i$ 的未定权益，$i=1,\cdots,6$。π_2 的计算是容易的，因为$\pi_2=Z_2^3E_3[X|\mathscr{F}_2]=Z_2^3X$。因而，$\pi_2(\omega_6)=Z_2^3(\omega_6)X(\omega_6)=0.9804(6)=5.8824$，同时，类似地，对于 $i=1,\cdots,5$ 分别得到$\pi_2(\omega_i)=0.9091$，1.8518，2.8038，3.8096 及 4.8075。

对于$\pi_1=Z_1^3E_3[X|\mathscr{F}_1]$，我们需要的是条件概率分布，但是这很容易从 P_3 中计算出来。例如，

$$\begin{aligned}E_3[X|\{\omega_1,\omega_2\}] &= 1P_3(\omega=\omega_1|\{\omega_1,\omega_2\})+2P_3(\omega=\omega_2|\{\omega_1,\omega_2\})\\ &=\frac{P_3(\omega_1)}{P_3(\omega_1)+P_3(\omega_2)}+2\frac{P_3(\omega_2)}{P_3(\omega_1)+P_3(\omega_2)}\\ &=0.6087+2(0.3913)=1.3913\end{aligned}$$

这样 $\pi_1(\omega_1)=\pi_1(\omega_2)=Z_1^3(\omega_1)E_3[X|\{\omega_1,\omega_2\}]=0.84(1.3913)=1.1687$。类似地 $\pi_1(\omega_3)=\pi_1(\omega_4)=3.1141$ 及 $\pi_1(\omega_5)=\pi_1(\omega_6)=5.0375$。

为了完成过程 π 的计算，我们有$\pi_0=Z_0^3E_3[X|\mathscr{F}_0]=0.844E_3[X]$，所以我们直接运用概率测度 P_3 自身并计算出 $\pi_0=3.113$。

最后，运用 $O_t=\pi_t/Z_t^3$，我们立刻得到远期价格过程：$O_0=3.6884$，$O_1(\omega_1)=O_1(\omega_2)=1.3913$，$O_1(\omega_3)=O_1(\omega_4)=3.4990$，$O_1(\omega_5)=O_1(\omega_6)=5.3590$ 及 $O_2(\omega_i)=O_3(\omega_i)=i$ 对于 $i=1,\cdots,6$。运用$O_t=E_3[O_3|\mathscr{F}_t]$及对应于 P_3 的条件概率，直接验证过程 O 事实上在P_3 下是一个鞅。

例 6.2（续） 为了对已经知道的在时间 2 支付的某些衍生证券的计算做准备，我们感兴趣的是相对应的远期风险调整概率测度 P_2。由于$M_2=[Z_0^2B_2]^{-1}=[0.8905(1+r_1)(1+r_2)]^{-1}$及 $Q(\omega)=1/6$，对于所有 ω，

所以几个有意思的量是：

ω	B_2	M_2	P_2
ω_1	1.1554	0.9719	0.1620
ω_2	1.1554	0.9719	0.1620
ω_3	1.1236	0.9994	0.1666
ω_4	1.1236	0.9994	0.1666
ω_5	1.0918	1.0285	0.1714
ω_6	1.0918	1.0285	0.1714

对于网格形式的利率模型而言，计算远期风险调整概率测度并不比对一般模型的计算更容易些。这是因为尽管即期利率过程 r 是一个路径独立的马尔可夫链，满足网格的每一个结点对应于在时间上某点即期利率的值，但是银行账户过程 B 是非路径独立的。通向一个结点的不同路径将对应着即期利率的不同序列，进而对应着不同的银行账户价值。一般说来，对于二项式网格而言，B_t 将取 2^{t-1}个值中的一个，而对于时间 t 仅存在 $t+1$ 个结点。因此，当计算远期调整概率测度时，网格形式损失其简化的大部分优点。对于网格模型计算所需要的内容不比具有相同状态 ω 数的一般模型更容易些。特别，与 6.2 节中二项式网格模型相联系的远期风险调整概率测度不存在简单的计算公式。

习题 6.14 对于例 6.1，用详细的计算验证：

(a) M 在 Q 下是一个满足 $E_Q[M_3]=1$ 的鞅。

(b) 计算满足（6.38）的价格过程 π，对于所有 t 和 ω。

(c) 计算满足传统风险中性估值公式的价格过程 π，对于所有 t 和 ω。

(d) 计算远期价格过程 O 在 P_3 下是一个鞅。

习题 6.15 对于例 6.1，假设一个衍生证券具有时间 -3 的价格 $\pi_3(\omega_i)=\max\{i-3,0\}, i=1,\cdots,6$。计算时间-0 的 π_0 价格。

习题 6.16 对于例 6.2，假设存在满足时间-2 价格 $\pi_2(\omega_1)=\pi_2(\omega_2)=7, \pi_2(\omega_3)=\pi_2(\omega_4)=9$，以及 $\pi_2(\omega_5)=\pi_2(\omega_6)=-1$。证明 $\pi_0=4.3848$ 并计算 π_1。

习题 6.17 对于例 6.2，规定出对应于 $\tau=3$ 的 Q-鞅 M 与远期风险调整

概率测度 P_3。

习题 6.18 满足如同（6.36）中的过程 M，证明过程 $X=\{X_t=0,\cdots\tau\}$ 在 P_τ 下是一个鞅，其中 $X_t(\omega)=1/M_t(\omega)$，对于所有 ω 和 t。

习题 6.19 如果一个 $X=1_A$ 是未定权益时间-τ 的支付，其中 $A\in\mathscr{F}_\tau$，那么证明它的时间 -0 价格是 $\pi_0=Z_0^\tau P_\tau(A)$。

227

6.5 定息债券与债券期权

考察一个对零息债券 Z^s 具有时间-τ 支付的欧式买入期权：

$$X=(Z_\tau^s-K)^+,\quad 0\leqslant\tau<s\leqslant T$$

我们的目的是计算 X 的时间-t 价格 π_t，对于 $t<\tau$。运用（6.38），这个价格是由

$$\pi_t=Z_t^\tau E_\tau[(Z_\tau^s-K)^+|\mathscr{F}_t,\quad t\leqslant\tau \tag{6.39}$$

给出的，其中 E_τ 表示相对于远期风险调整概率测度 P_τ 的期望。因此，我们首先需要在 P_τ 下的 Z_τ^s 的条件概率分布，然后我们能够计算出条件期望。

当然，如其不然的话，我们能运用传统的风险中性估值公式：

$$\pi_t=B_tE_Q[(Z_\tau^s-K)^+/B_\tau|\mathscr{F}_t],\quad t\leqslant\tau \tag{6.40}$$

特定的环境所要求的方法从计算上的观点来说，将是最容易的。

例 6.2（续） 对于一般模型，诸如这个例子，远期风险调整方法常常是最佳的，尤其是如果你打算去估值，而不是对具有相同支付的时间的情况建模。假设 $K=0.95$，$t=0$，$\tau=2$ 以及 $s=3$。于是，（6.39）给出

$$\begin{aligned}\pi_0&=0.8905E_2[(Z_2^3-0.95)^+]\\&=0.8905\{0.1666(0.0024)+0.1714(0.0115)+0.1714(0.0304)\}\\&=0.0068\end{aligned}$$

如其不然，运用（6.40）我们得出

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= E_Q[(Z_2^3-0.95)^+/B_2] \\
&= 0.1667(0.0024)/1.1236+0.1667(0.0115)/1.0918 \\
&\quad +0.1667(0.0304)/1.0918 \\
&= 0.0068
\end{aligned}
$$

在 6.4 节末尾的评论是，利率的网格模型提供不了远期风险调整概率测度的简单计算公式，因为银行账户过程是路径依赖的。基于同样的缘由，对于风险中性公式（6.40）的运用相同的评论仍是正确的：当基本模型如同 6.2 节中的网格模型一样时，未定权益的价格，诸如我们关于债券的买入期权不存在简单的计算公式。

228 定息债券正是许多零息债券的线性组合。为了理解这点，假设一个定息债券预定在时间 t_n 支付 C_n 美元对于 $n=1$，…，N，其中 $t<t_1<\cdots<t_N$。凭借风险中性估值公式（6.1）或者远期风险调整公式（6.38），在时间 t_n 支付 C_n 的未定权益时间-t 的价格恰好是 $Z_t^{t_n}C_n$。此外，这一现金流的价格正是每一个分量的和，这样用 β_t 表示此债券的时间-t 价格，我们有

$$
\beta_t = \sum_{n=1}^{N} Z_t^{t_n} C_n
$$

总之，定息债券的价格等于现金流的期望折现价值，其中期望是相对于风险中性概率测度而言的。

例 6.1（续） 假设 $C_1=7$，$t_1=2$，$C_2=107$ 及 $t_2=3$。于是，$\beta_0=7Z_0^2+107Z_0^3=96.559$，而

$$
\beta_1(\omega)=7Z_1^2+107Z_1^3=\begin{cases}96.302, & \omega=\omega_1,\omega_2 \\ 101.834, & \omega=\omega_3,\omega_4 \\ 107.376, & \omega=\omega_5,\omega_6\end{cases}
$$

现在假设我们有一个关于这个定息债券的欧式买入期权。时间-τ 支付同

前面一样是$X=(\beta_{\tau}-K)^{+}$，其中，$t<\tau<t_1$。对于时间-t 价格，我们能运用（6.1）得出

$$\text{(6.41)} \qquad \pi_t = B_t E_Q\Big[\Big(\sum_{n=1}^{N} Z_T^{t_n} C_n - K\Big)^{+} / B_T \,\Big|\, \mathscr{F}_t\Big]$$

或者我们能够使用（6.38），得到

$$\text{(6.42)} \qquad \pi_t = Z_t^{\tau} E_{\tau}\Big[\Big(\sum_{n=1}^{N} Z_T^{t_n} C_n - K\Big)^{+} \,\Big|\, \mathscr{F}_T\Big]$$

运用远期风险调整公式或者风险中性方法很难找到任何计算上的捷径。

例 6.1（续） 假设我们有一个关于定息债券的买入期权，其执行价格 $K=100$，并且执行日期 $T=1$。方程（6.41）给出时间-0 价格

$$\pi_0 = (0.1517+0.1483)(1.834/1.06)+(0.2582+0.1418)(7.376/1.06)$$
$$=3.3025$$

习题 6.20 设 c 和 p 分别表示一个欧式买入期权和一个卖出期权的时间-0 价格，两者具有相同的执行日期 τ、相同的执行价格 K 以及相同的原生证券，原生证券是满足到期日 $s>t$ 的零息债券。证明下面期权平价原理成 229
立：$c-p=Z_0^s-KZ_0^{\tau}$。在例 6.2 的情况下，当 $K=0.95$、$\tau=2$ 及 $s=3$ 时，计算 p。对于这种特殊的卖出期权和相对应的买入期权，验证期权平价原理。

习题 6.21 对于例 **6.1**，计算具有执行价格 $K=0.95$、执行日期 $\tau=2$ 以及原生证券 Z^3 的欧式卖出期权和买入期权的时间-0 价格。验证相对应的期权平价原理。

习题 6.22 对于例 **6.2**，计算在时间 2 支付 8 美元，且在时间 3 支付 108 美元的定息债券的时间-0 价格和时间-1 价格。计算关于这个债券的欧式卖出期权和买入期权的时间-0 价格，其中执行价格是 $K=102$，并且执行日期是 $\tau=1$。

6.6 互换与互换期权

互换（Swaps）是两个交易者之间达成的一项协议，其中第一个交易者以浮动利率支付给第二个交易者；而第二个交易者以固定利率支付给第一个交易者，两个交易者的支付是以相同的本金数为基础的。在一个时间区间上每一时期都有支付发生。浮动利率支付是根据即期利率 r 来确定的，所支付价值事实上发生在一个时期的期末［互换是拖后结算的(Settled In Arrears)］或者在一个时期的开头［互换是预先结算的(Settled In Advance)］。

当协议达成时，普通互换的初始浮动利率支付是根据即期利率来确定的；这不论是对拖后结算还是对预先结算都是成立的。还存在一种远期开始互换（Forward Start Swaps），当协议达成时，它的初始支付是以其后的即期利率为依据来确定的。

互换的价值正好是净现金流的期望现值，这样对一方交易者而言的价值就是其对方交易者价格的反面。具有支付方互换（Payer Swap）的价值是从支付固定利率并接收浮动利率的交易者观点得来的。接收方互换(Receiver Swap）的价值正好与其相反。

这节将集中在基于本金 1 的每一个时期拖后结算的支付方远期开始互换，其他情况留给读者来完成。固定利率记为 K。对于以 r_τ 为基础的初始浮动利率支付，其交易者将支付 K 美元，并在时间 τ 接收 r_τ 美元。类似的支付将在每一个时期经过时间-s 发生，这样，此支付方远期开始互换的时间-t 价值是

$$\pi_t = E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_t}{B_u}(r_u - K)\middle|\mathscr{F}_t\right],\quad t<\tau\leqslant s\leqslant T \tag{6.43}$$

可以证明，关于 π_t 存在一个简单又有用的公式。由于 $Z^u_{u-1} = (1+r_u)^{-1}$，这个值等于

230

$$\pi_t = E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_t}{B_u}\left(\frac{1}{Z^u_{u-1}} - (1+K)\right)\middle|\mathscr{F}_t\right]$$

$$= E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s} \frac{B_t}{B_u Z_{u-1}^u}\middle|\mathscr{F}_t\right] - (1+K)E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_t}{B_u}\middle|\mathscr{F}_t\right]$$

$$= \sum_{u=\tau}^{s} E_Q\left[\frac{B_t}{B_u Z_{u-1}^u}\middle|\mathscr{F}_t\right] - (1+K)\sum_{u=\tau}^{s} Z_t^u$$

其中，最后一个等式运用了方程（6.2)。现在再一次利用 $Z_{u-1}^u = (1+r_u)^{-1} = B_{u-1}/B_u$，人们得到

$$\begin{aligned}\pi_t &= \sum_{u=\tau}^{s} E_Q\left[\frac{B_t}{B_{u-1}}\middle|\mathscr{F}_t\right] - (1+K)\sum_{u=\tau}^{s} Z_t^u \\ &= \sum_{u=\tau}^{s} Z_t^{u-1} - (1+K)\sum_{u=\tau}^{s} Z_t^u \\ &= Z_t^{\tau-1} - K\sum_{u=\tau}^{s-1} Z_t^u - (1+K)Z_t^s \\ &= Z_t^{\tau-1} - \sum_{u=\tau}^{s} C_u Z_t^u\end{aligned}$$

其中，现金流变量 $C_u = K$ 对于 $u=\tau, \cdots, s-1$ 以及 $C_s = 1+K$ 是已被引进的。这样远期互换的价格是由简单的现值计算给出的。特别，在普通互换的情况下，由于 $\tau = t+1$，时间-t 价格是

$$\pi_t = 1 - \sum_{u=t+1}^{s} C_u Z_t^u \tag{6.44}$$

这应该解释成 1 减去定息支付债券的时间-t 价格，债券具有面值 1 且息票比率 K。

远期互换比率（Forward Swap Rate）κ是使得远期互换时间-t 价值为零的固定比率K 的值，也就是

$$\kappa = \kappa(t,\tau,s) \equiv \frac{Z_t^{\tau-1} - Z_t^s}{Z_t^\tau + \cdots + Z_t^s}$$

（普通）互换比率（Swap Rate）是当 $\tau = t+1$ 的特殊情况，也就是$\kappa(t,t+1,s)$。

例 6.1（续） 满足 $K=0.06$，$t=0$，$\tau=1$ 及 $s=3$，支付方互换的时间-0 价格是

$$\begin{aligned}\pi_0 &= Z_0^0 - KZ_0^1 - KZ_0^2 - (1+K)Z_0^3 \\ &= 1 - 0.06(0.9434) - 0.06(0.893) - 1.06(0.844) \\ &= -0.0049\end{aligned}$$

231 在此情况下，接收方互换的价格是 0.0049。互换比率是

$$\kappa = \frac{Z_0^0 - Z_0^3}{Z_0^1 + Z_0^2 + Z_0^3} = \frac{1-0.844}{0.9434+0.893+0.844} = 0.0582$$

支付方互换期权（Payer Swaption）像一个欧式买入期权，它是关于相对应的支付远期互换的时间 $\tau-1$ 价值的买入期权，其中执行日期是 $\tau-1$，并且执行价格是零。以类似的方式，接收方互换期权（Receiver Swaption）是相对于接收方互换来定义的。因而，支付方互换期权和接收方互换期权各自具有时间-t 价格（$t<\tau$）

$$E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}\left(E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_{\tau-1}}{B_u}(r_u - K)\middle|\mathscr{F}_{\tau-1}\right]\right)^+\middle|\mathscr{F}_t\right]$$

与

$$E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}\left(E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_{\tau-1}}{B_u}(K - r_u)\middle|\mathscr{F}_{\tau-1}\right]\right)^+\middle|\mathscr{F}_t\right]$$

注意，支付方互换期权价格减接收方互换期权价格等于

$$\begin{aligned}&E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_{\tau-1}}{B_u}(r_u - K)\middle|\mathscr{F}_{\tau-1}\right]\middle|\mathscr{F}_t\right] \\ &= E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_{\tau-1}}{B_u}(r_u - K)\middle|\mathscr{F}_t\right] \\ &= E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_t}{B_u}(r_u - K)\middle|\mathscr{F}_t\right]\end{aligned}$$

它是远期开始互换的时间-t 价格。因而，下面的平价关系成立：

(6.45) 支付方互换期权－接收方互换期权＝远期互换

鉴于方程（6.44），支付方互换的时间-$(\tau-1)$价格是由

$$\pi_{\tau-1}=1-\sum_{u=\tau}^{s}C_u Z_{\tau-1}^{u}$$

给出的，所以支付方互换期权的时间-t 价格的另一种表达式是

$$E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}\left(1-\sum_{u=\tau}^{s}C_u Z_{\tau-1}^{u}\right)^{+}\middle|\mathscr{F}_t\right]$$

这提供了另外一种解释：

(6.46) 支付方互换期权是与关于定息债券的卖出期权相同的，其中执行日期是 $\tau-1$，并且执行价格是 1。这个定息债券具有面值 1 且息票比率 K。

类似地，接受方互换期权能解释成为关于定息债券的买入期权。 232

于是能够获得另一种解释：

(6.47) 支付方（接收方）互换期权像一个关于互换比率$\kappa(\tau-1，\tau，s)$的一些买入（卖出）期权的投资组合。

更确切地说，假设对于每一个时间 $u=\tau，\tau+1，\cdots，s$ 存在一个满足时间-u 支付$[\kappa(\tau-1,\tau,s)-K]^{+}$的买入期权。为了理解这个投资组合像一个支付方互换期权,考虑它的时间-$(\tau-1)$价值，即

$$E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_{\tau-1}}{B_u}[\kappa(\tau-1,\tau,s)-K]^{+}\middle|\mathscr{F}_{t-1}\right]$$

由此可得，这个投资组合的时间-t 价值是

$$E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_{\tau-1}}{B_u}[\kappa(\tau-1,\tau,s)-K]^+\,\middle|\,\mathscr{F}_{\tau-1}\right]\middle|\,\mathscr{F}_t\right]$$

$$=E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}[\kappa(\tau-1,\tau,s)-K]^+\,E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s}\frac{B_{\tau-1}}{B_u}\,\middle|\,\mathscr{F}_{\tau-1}\right]\middle|\,\mathscr{F}_t\right]$$

$$=E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}[\kappa(\tau-1,\tau,s)-K]^+\sum_{u=\tau}^{s}Z_{\tau-1}^{u}\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right]$$

但是，由互换比率的定义，$\kappa(\tau-1,\tau,s)[Z_{\tau-1}^{\tau}+\cdots+Z_{\tau-1}^{s}]=Z_{\tau-1}^{\tau-1}-Z_{\tau-1}^{s}$，这样将此代入到上面表达式，得出

$$E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}\left(1-Z_{\tau-1}^{s}-K\sum_{u=\tau}^{s}Z_{\tau-1}^{u}\right)^+\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right]$$

$$=E_Q\left[\frac{B_t}{B_{\tau-1}}\left(1-\sum_{u=\tau}^{s}C_uZ_{\tau-1}^{u}\right)^+\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right]$$

由（6.46），它被认为是支付方互换期权的时间-t 价格。

例 6.4 满足 $K=0.06$，$t=1$，$\tau=2$ 及 $s=3$，支付方互换的时间-t 价格是

$$\pi_1=1-KZ_1^2-(1+K)Z_1^3$$

$$=\begin{cases}1-0.06(0.9174)-1.06(0.8417)=\ \ 0.0528, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ 1-0.06(0.9434)-1.06(0.8901)=-0.0001, & \omega=\omega_3,\omega_4\\ 1-0.06(0.9709)-1.06(0.9427)=-0.0576, & \omega=\omega_5,\omega_6\end{cases}$$

支付方互换期权的时间-0 价格是

$$E_Q\left[\frac{B_0}{B_1}(\pi_1)^+\right]=(0.1667+0.1667)\left[\frac{1}{1.06}0.528\right]=0.0166$$

233 接收方互换期权的时间-0 价格是

$$E_Q\left[\frac{B_0}{B_1}(-\pi_1)^+\right]=2(0.1667)\frac{0.0001}{1.06}+2(0.1667)\frac{0.0576}{1.06}=0.0181$$

注意到，远期开始互换的时间-0 价格是

$$\frac{0.1667+0.1667}{1.06}[0.0528-0.0001-0.0576]=-0.0015$$

实际上，这样平价关系（6.45）是满足的。

为了验证解释（6.47），注意到，我们有

$$\kappa=\kappa(\tau-1,\tau,s)=\kappa(1,2,3)=\frac{Z_1^1-Z_1^3}{Z_1^2+Z_1^3}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1-0.8417}{0.9174+0.8417}=0.09, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ \dfrac{1-0.8901}{0.9434+0.8901}=0.06, & \omega=\omega_3,\omega_4\\ \dfrac{1-0.9427}{0.9709+0.9427}=0.03, & \omega=\omega_5,\omega_6\end{cases}$$

所以

$$(\kappa-K)^+=(\kappa-0.06)^+=\begin{cases}0.03, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

利率的投资组合有两个期权，其中一个在时间 $t=2$ 支付，另一个在时间 $t=3$ 支付。在事件 $A\equiv\{\omega_1,\omega_2\}$ 上，每一次支付 0.03 美元，而其他情况则支付为零。这个现金流的时间-0 现值是

$$E_Q\left[\frac{0.03}{B_2}1_A\right]+E_Q\left[\frac{0.03}{B_3}1_A\right]$$
$$=\frac{2(0.1667)(0.03)}{1.06(1.09)}+\frac{0.1667(0.03)}{1.06(1.09)(1.1)}+\frac{0.1667(0.03)}{1.06(1.09)(1.08)}$$
$$=0.0166$$

该值等于支付方互换期权的时间-0 价格，与（6.47）一致。

习题 6.23 对于例 **6.2** 中满足 $K=0.06$，$\tau=1$ 及 $s=3$ 的模型，计算支付方互换和接收方互换的时间-0 价格，并计算 $t=0$ 的互换比率。

习题 6.24 对于例 6.1 中满足 $K=0.06$，$\tau=2$ 及 $s=3$ 的模型

(a) 计算支付方互换的时间-1 价格。

(b) 计算支付方远期开始互换的时间-0 价格。

(c) 计算支付方互换期权的时间-0 价格。

(d) 计算接收方互换期权的时间-0 价格，并验证平价关系 (6.45)。

(e) 计算互换比率$\kappa(1, 2, 3)$。

234 (f) 通过规定适当的期权投资组合并计算它的时间-0 价值验证 (6.47)。

习题 6.25 证明支付方远期开始互换预先结算 (Settled In Advance) 的时间-t 价格是

$$\pi_t = E_Q\left[\sum_{u=\tau}^{s} \frac{B_t}{B_{u-1}}(r_u - K) \mid \mathscr{F}_t\right], \quad t < \tau \leqslant s \leqslant T$$

6.7 上限与下限

上限簇 (Caplet) 是关于在时间某一固定点上即期利率 r 的欧式买入期权。如同互换一样，上限簇能够拖后结算或者预先结算。在前者情况下，上限簇的时间 τ 支付就是 $(r_\tau - K)^+$，其中 K 是敲定价格或者执行价格。对于 $t \leqslant \tau$，这个上限簇的时间 t 价格是

$$\pi_t = B_t E_Q[(r_\tau - K)^+ / B_\tau \mid \mathscr{F}_t] = Z_t^\tau E_\tau[(r_\tau - K)^+ \mid \mathscr{F}_t]$$

上限 (Cap) 是上限簇的一个集合，它们具有共同的执行价格，并且在一段时间内的每一个时期里都相同。* 一般说来，上限中的某些上限簇将有支付而另一些则没有支付，这依赖于即期利率是否越过敲定价格。正如互换一样，既存在普通上限，又存在远期开始上限，这依赖于初始上限簇是否对应着当前的即期利益。远期开始上限拖后结算的时间-t 价格是

$$\text{(6.48)} \quad \pi_t = B_t \sum_{u=\tau}^{s} E_Q[(r_u - K)^+ / B_u \mid \mathscr{F}_t], \quad t < \tau \leqslant s \leqslant T$$

普通上限的时间-t 的价格是由满足 $\tau=t+1$ 的相同公式给出的。

例 6.1（续） 假设执行价格 $K=0.06$，并考察普通上限拖后结算。$\tau=1$ 上限簇的支付是零，所以它的时间-0 价格是零。$\tau=2$ 上限簇的支付是

$$(r_2(\omega)-0.06)^+=\begin{cases}0.03, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这样，它的时间-0 价格是

$$E_Q[(r_2-0.06)^+/B_2]=(0.1839+0.1161)\frac{0.03}{(1.06)(1.09)}=0.0078$$

$\tau=3$ 上限簇的支付是 235

$$(r_3(\omega)-0.06)^+=\begin{cases}0.04, & \omega=\omega_1\\ 0.02, & \omega=\omega_2\\ 0.01, & \omega=\omega_3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以，它的时间-0 价格是

$$\begin{aligned}E_Q[(r_3-0.06)^+/B_3]=&\frac{0.1839(0.04)}{1.06(1.09)(1.1)}+\frac{0.1161(0.02)}{1.06(1.09)(1.08)}\\&+\frac{0.1517(0.01)}{1.06(1.06)(1.07)}=0.0091\end{aligned}$$

因此，满足 $\tau=1$ 且 $s=3$ 的相对应的上限时间-0 价格是 $0.0078+0.0091=0.0169$。

下限簇（Floorlets）是以类似于上限簇的方式来定义的，只是它们是关于即期利率的卖出期权。类似地，下限（Floors）是下限簇的一个集合，从而它与上限类似。特别，远期开始下限拖后结算的时间-t 价格是

$$(6.49)\quad \pi_t = B_t \sum_{u=\tau}^{s} E_Q[(K - r_u)^+ / B_u | \mathscr{F}_t], \quad t < \tau \leqslant s \leqslant T$$

将这式与（6.43）及（6.48）比较，立刻得出下面的平价关系：

(6.50) 上限价格减去下限价格等于互换价格。

例 6.1（续） 考察满足 $K=0.06$，$\tau=1$ 及 $s=3$ 的拖后结算的下限。由于 $r_1=0.06$，所以 $\tau=1$ 下限簇具有等于零的时间-0 价格。$\tau=2$ 下限簇具有时间-0 价格

$$E_Q[(0.06-r_2)^+/B_2]=(0.2582+0.1418)\frac{0.03}{(1.06)(1.03)}=0.011$$

$\tau=3$ 下限簇具有时间-0 价格

$$\frac{0.1483(0.01)}{1.06(1.06)(1.05)}+\frac{0.2582(0.02)}{1.06(1.03)(1.04)}+\frac{0.1418(0.04)}{1.06(1.03)(1.02)}=0.0108$$

因此，下限的时间-0 价格是 $0.011+0.0108=0.0218$。注意这与平价关系（6.50）相一致，因为相对应上限的价格是 0.0169，而（参见 6.6 节）-0.0049是相对应互换的价格。

上限期权（Caption）是指其原生证券为远期上限的卖出期权或者买入期权。下限期权（Floortion）是指其原生证券为远期下限的卖出期权或
236 者买入期权。存在着一些所谓复合期权（Compound Options）的例子，也就是指其原生证券为它们自己期权的期权。

上限期权或者下限期权的执行日期通常是在与原生证券中初始上限簇或下限簇相联系的时间之前。此外，上限期权或下限期权的敲定价格与上限或下限的敲定价格一般是不一样的。

上限期权或者下限期权的价格计算最好考虑成两个步骤。第一，你计算在风险中性概率测度或者远期风险调整概率测度下上限期权支付或下限期权支付的条件概率分布。换句话说，首先你计算未定权益的概率分布。第二，你以标准的方法计算这个未定权益的价格。这将在下面的例子中加

以阐述。

例 6.1（续） 首先考察满足 $K=0.06$，$\tau=2$ 及 $s=3$ 的远期开始上限。$\tau=2$ 上限簇具有时间-1 价格

$$B_1E_Q[(r_2-0.06)^+/B_2|\mathscr{F}_1]=\begin{cases}1(0.03)/1.09=0.0275, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$\tau=3$ 上限簇具有时间-1 价格

$$\begin{aligned}&B_1E_Q[(r_3-0.06)^+/B_3|\mathscr{F}_1]\\&=\begin{cases}\dfrac{0.613(0.04)}{1.09(1.1)}+\dfrac{0.387(0.02)}{1.09(1.08)}=0.0271, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ \dfrac{0.5057(0.01)}{1.06(1.07)}=0.0045, & \omega=\omega_3,\omega_4\\ 0, & \omega=\omega_5,\omega_6\end{cases}\end{aligned}$$

其中，0.613 等于条件概率$Q(\omega_1|\{\omega_1,\omega_2\})$等等。因而，这个远期开始上限的时间-1 价格是

$$\pi_1=\begin{cases}0.0275+0.0271=0.0546, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ 0.0045, & \omega=\omega_3,\omega_4\\ 0, & \omega=\omega_5,\omega_6\end{cases}$$

注意到，这个上限的时间-0 价格是

$$\pi_0=E_Q[\pi_1/B_1]=\frac{0.3(0.0546)}{1.06}+\frac{0.3(0.0045)}{1.06}=0.0168$$

如前面以不同方式计算出的结果。

现在考察上限期权，特别是关于满足敲定价格 0.02 以及执行日期 $\tau=1$的这种上限的卖出期权。它的时间 - 1 支付是

$$
(0.02-\pi_1)^+=\begin{cases}0, & \omega=\omega_1,\omega_2\\ 0.0155, & \omega=\omega_3,\omega_4\\ 0.02, & \omega=\omega_5,\omega_6\end{cases}
$$

237 在此情况下，上限期权的时间-0 价格是

$$
E_Q[(0.02-\pi_1)^+/B_1]=\frac{0.3(0.0155)}{1.06}+\frac{0.4(0.02)}{1.06}=0.0119
$$

类似地，上限期权是具有相同的敲定价格和执行日期的买入期权，其时间-0 价格是

$$
E_Q[(\pi_1-0.02)^+/B_1]=\frac{0.1(0.0346)}{106}=0.0098
$$

习题 6.26 考察例 6.2 中的模型。

(a) 计算满足 $K=0.06$，$\tau=2$ 及 $s=3$ 的远期开始上限拖后结算的时间-0 价格和时间-1 价格。

(b) 计算满足上述相同参数的远期开始下限拖后结算的时间-0 价格和时间-1 价格。

(c) 验证（a）和（b）中的时间-0 价格满足平价关系（6.50）。

(d) 计算卖出上限期权和买入上限期权的时间-0 价格，其中原生证券与（a）中的相同，敲定价格是 0.01 以及执行日期是 $\tau=1$。

(e) 计算卖出下限期权和买入下限期权的时间-0 价格，其中原生证券与（b）中的相同，敲定价格是 0.01 以及执行日期是 $\tau=1$。

译者注

* 上限是由一系列的上限簇或者相关联的一组上限簇所构成的，因而，上限簇是上限的一个组成部分。每一个上限簇具有单一支付，这样上限具有一系列的支付或者相关联的一组支付。类似地，下限是由一系列的下限簇或者相关联的一组下限簇所构成。因此，下限簇是下限的一个组成部分。每一个下限簇具有单一支付，所以下限具有一系列的支付或者相关联的一组支付。

7

无限样本空间模型

7.1 有限范围模型

资产定价的基本定理表明，存在无套利机会当且仅当存在一个风险中性概率测度。在前几章中，在关键性的假设即基本样本空间 Ω 具有有限多个元素的条件下，此定理被证明对于单时期模型和多时期模型都是正确的。这个假设是关键性的，因为它能使人们应用线性规划的简单结果，或者更一般地使用关于有限维空间中研究问题的分离超平面定理的简单形式。但是，当样本空间 Ω 具有可数无限多个元素或者不可数无限多个元素时，表示最终财富的随机变量的空间将是一个无限维空间。对于这些无限维背景设置确实存在分离超平面定理，但是对这样定理的直接应用将导致失败，因为技术上的应用有问题。这将需要更多的细致分析。

可以证明，如果交易时期数 T 是有限的，那么资产定价的基本定理在无限样本空间 Ω 情况下仍然是正确的。这节的目的是建立这一结果。然而，如同在下面一节中将看到的那样，当交易时期数 T 是无限的时候，此定理将不成立。

这一章的许多结果比前面一些章的技术性更强些。首先，在发展无限样本空间理论之前有必要推广作为信息子模型的域流的概念。回想起 Ω 中子集的集合 $\mathscr{F}$ 称为 Ω 上的代数（Algebra），如果

1　$\Omega \in \mathscr{F}$

2　$F \in \mathscr{F} \Rightarrow F^c = \Omega \setminus F \in \mathscr{F}$

3　F 和 $G \in \mathscr{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathscr{F}$。

集合 $\mathscr{F}$ 称为 σ 代数（σ-algebra），如果加上

4　F_1，F_2，$\cdots \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathscr{F}$。

239 简言之，（4）表明 $\mathscr{F}$ 中可数个子集的并集仍是 $\mathscr{F}$ 中的集合。如果 Ω 是有限的，那么（4）是多余的，因为 Ω 仅有有限多个子集。但是，如果 Ω 具有无限多个子集，那么（3）不蕴含（4）。条件（4）是必须要求做到的。

我们的目标是用 σ 代数作为投资者在时间不同点上所知道信息的模型。回想起代数在有限样本空间里就是用于这个目的。此外，回想到当 Ω 是有限的时候，Ω 上的代数等价于 Ω 上的分割，从而得出代数作为投资者所知道信息的模型这样一种直觉的解释。可惜的是，当 Ω 具有无限多个元素时，类似的结果对 Ω 上 σ 代数不成立。从第 3 章回想起，由于 $A \subset \Omega$ 是对应于 $\mathscr{F}$ 的分割 $\mathscr{P}$ 的元素，人们必有 $A \in \mathscr{F}$ 及 $\{B \in \mathscr{F}$，$A \neq B$ 和 $B \subset A\} \Rightarrow B = \emptyset$。但是，人们把这个要求应用于无限样本空间会得出愚蠢的毫无价值的结果。例如，如果 $\Omega = [0, 1]$ 且 $\mathscr{F}$ 包含所有形式为 (a, b) 的开区间，其中 a 和 b 均是有理数，那么这个要求蕴含着相对应的分割包括作为不同元素的所有有理数单位区间。

不过，我们将用 σ 代数对经济行为人在时间不同点上所知道的信息来建模。证明这个方法正确的经济直觉是引起怀疑的，因为分割解释是粗糙的，我们必须稳固它，使它与 σ 作为当 Ω 有限时具有良好意义的概念的自然推广相一致。

如同有限样本空间的情况一样，证券市场中的信息流将由域流（Filtration）$\mathbf{F} = \{\mathscr{F}_t : t = 0, 1, \cdots, T\}$ 来建模，其中 $\{\mathscr{F}_t\}$ 是 σ 代数的一个递增序列。特别，$\mathscr{F}_{t-1} \subseteq \mathscr{F}_t$ 对于 $t = 1, \cdots, T$，因为投资者随着时间流逝而获得信息。概率测度 P 使得概率 $P(A)$ 是明确定义的，对于每一个 $A \in \mathscr{F}_T$。

相对于 σ-代数而言，随机变量 X 称为是可测的（Measurable），如果对于每一个实数 x，子集 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$ 是 σ 代数 $\mathscr{F}$ 的元素。在这种情况下，人们写成 $X \in \mathscr{F}$。随机过程 $X = \{X_t : t = 0, \cdots, T\}$ 称为是适应的（Adapted），如果 $X_t \in \mathscr{F}_t$ 对于所有 t。随机过程 $H = \{H_t : t = 1, \cdots, T\}$ 称为是可料的（Predictable），如果 $H_t \in \mathscr{F}_{t-1}$ 对于所有 t。

此处，引进一个新的而且更技术性的概念是方便的。当人们讲起方程、不等式以及像涉及的随机变量时，包含词语——几乎必然成立（Almost Surely）常常是合适的。这意味着，方程或诸如此类的数学命题成立，对于所有 $\omega\in\Omega$，可能把某一个 $\omega\in A$ 除外，其中 A 是 $\mathcal{F}_T$ 中使得$P(A)=0$ 的某一个事件。换句话说，尽管所讨论的关系可能不成立对于所有 $\omega\in\Omega$，然而惟一的例外是不重要的且能被忽略掉。几乎必然成立经常缩写为 a.s.。

证券市场模型剩下的部分大部分与前面的相同。存在一个银行账户（Bank Account）过程$B=\{B_t: t=0, 1, \cdots, T\}$，它是满足 $B_0=1$ 的适应的、非递减的随机过程。存在 N 个风险证券（Risky Security）过程$S_n=\{S_n(t): t=0, 1, \cdots, T\}$，其中 S_n 是非负的、适应的随机过程对于 n 240
$=1, 2, \cdots, T$。还有 N 个折现价格过程（Discounted Price Processes）$S_n^*=\{S_n^*(\mathrm{t}): t=0, 1, \cdots, T\}$，其中$S_n^*(t)\equiv S_n(t)/B_t$ 对于所有 t。

我们现在准备处理资产定价的基本定理。首先，在表述基本结果（结果如此技术以致它的解释将被略去）之后，才能解决这个定理。[①]这里 Y 和Z 均是在$\mathbb{R}^N$ 中取值的随机变量，$\|Y\|$ 表示向量 Y 的欧几里得范数，并且 $Z\cdot Y$ 表示向量 Y 和Z 的内积。

(7.1) 假设 $\mathcal{G}$ 和$\mathcal{H}$是满足 $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{H}\subseteq\mathcal{F}_T$ 的两个σ 代数。
设 $Y\in\mathcal{H}$使得

(7.2) $$\{Z\in\mathcal{G} \text{ 及 } Z\cdot Y\geqslant 0 \text{ a.s.}\}\Rightarrow\{Z\cdot Y=0 \text{ a.s.}\}$$

那么存在一个纯量值的随机变量 $D\in\mathcal{H}$使得

(7.3) $$0<D\leqslant 1, \text{a.s.}$$
(7.4) $$E[D\|Y\|]<\infty, \text{以及}$$
(7.5) $$E[YD|\mathcal{G}]=0$$

简言之，(7.2) 表明仅有满足不等式的随机变量 $Z\in\mathcal{G}$ 实际上满足等式。不久，我们看到这与单一时期无套利机会的说法是相同的。随机变量 D 将起到状态价格密度的作用，并且将它用于风险中性概率测度的构造中。

交易策略 H、价值过程 V、折现价值过程 V^* 以及折现增益过程 G^*

完全是以与有限样本空间 Ω 情况中相同的方式来定义的（参见 3.1 节）。此外，套利机会也是以同样方式来定义的：自融资交易策略 H 是一个套利机会（Arbitrage Opportunity），当且仅当（1）$V_0=0$，（2）$V_T\geqslant 0$ 以及（3）$E[V_T]>0$。正如（3.17）那样，H 是一个套利机会的等价条件是折现增益过程满足$V_0^*=0, G_T^*\geqslant 0$ 及 $E[G_T^*]>0$。

鉴于套利机会的这个后者特征，缺少套利机会蕴含着类似（7.2）的条件，这件事一点都不令人惊讶。为准备证明这点，设$S^*=\{S_t^*: t=0, 1, \cdots, T\}$ 表示其第 n 个分量为S_n^* 的$\mathbb{R}^N$ 值过程，其中 S_n^* 是第n 个风险证券的折现价格过程，$n=1, \cdots, N$。关于这里的下标是否表示时间 t 或者证券 n 不应该引起混淆。用 $\Delta S_t^*=S_t^*-S_{t-1}^*$表示一个$\mathbb{R}^N$ 值的随机变量是方便的。

(7.6) 如果存在无套利机会，那么对于所有$t\in\{1, 2, \cdots, T\}$及所有的$\mathbb{R}^N$ 值随机变量Z，

(7.7) $\{Z\in\mathscr{F}_t \text{ 及 } Z\cdot\Delta S_t^*\geqslant 0 \text{ a.s.}\}\Rightarrow\{Z\cdot\Delta S_t^*=0\ a.s.\}$

241 原理（7.6）能够用反证法来证明，因为如果存在某一个 t 和某一个 $Z=(Z_1, \cdots, Z_N)\in\mathscr{F}_{t-1}$，使得 $Z\cdot\Delta S_t^*\geqslant 0\ a.s.$ 且$P(Z\cdot\Delta S_t^*>0)>0$，那么人们能够构造出一个套利机会，现在对这一事实给出证明。

设 $A\in\mathscr{F}_{t-1}$表示集合$\{\omega\in\Omega: P(Z\cdot\Delta S_t^*>0|\mathscr{F}_{t-1})(\omega)>0\}$，而且注意到，由假设$P(A)>0$。套利机会 H 是通过取$H_n(s)(\omega)=0$ 对于所有 $s<t$，所有 $\omega\in\Omega$ 以及 $n=0, 1, \cdots, N$；取

$$H_n(t)(\omega)=\begin{cases} Z_n(\omega), & \omega\in A, n=1,\cdots,N \\ -Z\cdot S_{t-1}^*(\omega), & \omega\in A, n=0 \\ 0, & \omega\in A^C \end{cases}$$

并且取

$$H_n(s)(\omega)=\begin{cases} V_{(s-1)}^*(\omega), & n=0 \text{ 及 } \omega\in A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对于 $s=t+1$，…，T 获得的。显然，H 是可料的且 $V_0=0$。H 是自融资的，这留给读者来证明（参见习题 7.1)。这一策略获得时间 t 财富 V_t 且把它存入银行账户中持有，这样如果 $V_t \geqslant 0$，那么 $V_T \geqslant 0$。但是，如果 $\omega \in A$，那么 $V_t(\omega)=Z \cdot \Delta S_t^*(\omega) \geqslant 0$，否则 $V_t(\omega)=0$，所以事实上 $V_T \geqslant 0$。此外，如果 $E[V_t]>0$，那么 $E[V_T]>0$。但是

$$E[V_t]=E[1_A Z \cdot \Delta S_t^*]=E[1_A E[Z \cdot \Delta S_t^* \mid \mathscr{F}_{t-1}]]>0$$

这样，所有这些蕴含 H 是一个套利机会，这是一个矛盾。

原理（7.1）和（7.6）现在能够用来证明，无套利机会蕴含风险中性概率测度的存在。风险中性概率测度（Risk Neutral Probability Measure）是以与有限样本空间情况相同的方式来定义的；它是一个概率测度 Q，在每一个风险证券的折现价格成为一个鞅的情况下等价于 P。通过等价性(Equivalent)，这意味着对于每一个事件 $A \in \mathscr{F}_t$ 概率 $P(A)=0$，当且仅当 $Q(A)=0$。简言之，在关于事件能发生和不能发生的两种概率测度之间存在一个一致的关系。

为了理解无套利为什么蕴含风险中性概率测度 Q 的存在，我将指出如何构造这个测度。通过设 $\mathscr{F}_{T+1}=\mathscr{F}_T$，$S_{T+1}^*=S_T^*$，$D_{T+1}=1$ 以及 $Y_{T+1}=0$。纯量值的随机变量 D_1，…，D_T 与 $\mathbb{R}^N$ 值的随机变量 Y_1，…，Y_T 现在分别以时间倒推递归地定义。例如，假设 D_{t+1}，…，D_T 与 Y_{t+1}，…，Y_T 已定义出来，使得

(7.8) $\quad D_k$ 是 $\mathscr{F}_k$ 可测的，$t+1 \leqslant k \leqslant T+1$

(7.9) $\quad Y_k=\Delta S_k^* E\left[D_{k+1} \cdots D_{T+1} \mid \mathscr{F}_k\right]$ a.s.，$t+1 \leqslant k \leqslant T$

(7.10) $\quad 0<D_k \leqslant 1$ a.s.，$t+1 \leqslant k \leqslant T+1$

(7.11) $\quad E[D_k \| Y_k \|]<\infty, t+1 \leqslant k \leqslant T$，以及

(7.12) $\quad E[Y_k D_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]=0$ a.s.$, t+1 \leqslant k \leqslant T$

现在运用满足 $\mathscr{G}=\mathscr{F}_{t-1}$，$\mathscr{H}=\mathscr{F}_t$ 及 $Y=Y_t$ 的原理（7.1），其中 Y_t 如同 242
（7.9）中的一样满足 $k=t$。注意到，$Y_t \in \mathscr{F}_t$。此外，因为（7.6），所以性质（7.2）成立。这样凭借（7.1），存在一个纯量值的随机变量 D_t，使得方程（7.8），（7.10），（7.11）与（7.12）关于 $k=t$ 均成立。

一旦对 D_1，…，D_T 做出规定，下一步是再多定义几项。令

$$D_0 \equiv \frac{1}{1+\|S_0^*\|} \quad 与 \quad D = D_0 D_1 \cdots D_T$$

注意到，$0 < D \leqslant 1$ a.s.。另外，通过取

$$Q(A) \equiv \frac{E[D 1_A]}{E[D]}, \quad 所有事件\ A \in \mathscr{F}_T$$

定义出可以证明为风险中性概率测度，也就是

$$E_Q[X] \equiv \frac{E[DX]}{E[D]}, \quad 所有随机变量\ X \in \mathscr{F}_T$$

显然，Q 是一个等价于 P 的概率测度。剩下来的是证明，折现证券价格在 Q 下是一个鞅。为此存在两部分。第一部分是证明通常的条件期望值关系。另一部分是证明折现风险价格过程在 Q 下是可积的（Integrable），也就是证明这个过程的各种期望值是定义明确的且是有限的。

243 为证明 Q-可积性，我们有

$$E_Q[\|S_0^*\|] = \frac{1}{E[D]} E[D\|S_0^*\|] = \frac{1}{E[D]} E[D_0 D_1 \cdots D_T \|S_0^*\|]$$
$$\leqslant \frac{1}{E[D]} E[D_0 \|S_0^*\|] \leqslant \frac{1}{E[D]} < \infty$$

我们也有

$$\begin{aligned} E_Q[\|S_t^* - S_{t-1}^*\|] &= \frac{1}{E[D]} E\Big[D \|S_t^* - S_{t-1}^*\|\Big] \\ &= \frac{1}{E[D]} E\Big[D_0 \cdots D_t \|S_t^* - S_{t-1}^*\| D_{t+1} \cdots D_T\Big] \\ &= \frac{1}{E[D]} E\Big[D_0 \cdots D_t \|S_t^* - S_{t-1}^*\| E[D_{t+1} \cdots D_T | \mathscr{F}_t]\Big] \\ &= \frac{1}{E[D]} E\Big[D_0 \cdots D_t \|Y_t\|\Big] \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{E[D]} E\left[D_t \| Y_t \|\right]$$

但是，由（7.11）这最后一个表达式是有限的，所以 S^* 是 Q-可积的。

剩下的是证明，$E_Q[S_t^* | \mathscr{F}_{t-1}] = S_{t-1}^*$ 对于所有 t，也就是证明 $E_Q[\Delta S_t^* | \mathscr{F}_{t-1}] = 0$ 对于所有 t。我们有

$$\begin{aligned}
E_Q[\Delta S_t^* | \mathscr{F}_{t-1}] &= \frac{1}{E[D]} E[D \Delta S_t^* | \mathscr{F}_{t-1}] \\
&= \frac{1}{E[D]} E[D_0 \cdots D_{t-1} D_t (\Delta S_t^*) D_{t+1} \cdots D_T | \mathscr{F}_{t-1}] \\
&= \frac{D_0 \cdots D_{t-1}}{E[D]} E[D_t (\Delta S_t^*) E[D_{t+1} \cdots D_T | \mathscr{F}_T] | \mathscr{F}_{t-1}] \\
&= \frac{D_0 \cdots D_{t-1}}{E[D]} E[D_t Y_t | \mathscr{F}_{t-1}]
\end{aligned}$$

但是，由（7.12）这最后一个表达式等于 0，所以 S^* 在 Q 下事实上是一个鞅。

概括地讲，如果存在无套利机会，那么存在一个风险中性概率测度。由于与有限样本空间所讨论的情况一样，其逆是对的。因此，我们可以建立即使样本空间 Ω 具有无限多个元素，下面的陈述也是正确的：

(7.13) 资产定价的基本定理（Fundamental Theorem of Asset Pricing）假设交易时期数 T 是有限的，那么存在无套利机会，当且仅当存在一个风险中性概率测度。

习题 7.1 说法：在解释（7.6）中所构造出的套利机会是一个自融资交易策略。证明这个主张。

习题 7.2 假设存在一个满足 $\Delta S_t = \exp\{\sigma W_t + \mu\}$ 的单个证券 S，其中 $\{W_t\}$ 是一个独立的标准正态随机变量的序列，而 μ 和 σ 均是正的常数。另外，假设即期利率是一个常数 $r \geqslant 0$。首先，对于 $T=1$ 的情况推导出一个风险中性概率测度，然后对于 $T<\infty$ 的一般情况给出证明。

7.2 无限范围模型

具有无限样本空间的有限范围模型* 与具有有限样本空间的有限范围模型没有什么不同，因为资产定价的基本定理在这两种情况下都成立。但是，当存在无限交易时期数时，此定理几乎全部不正确，而且存在着与交易策略的可行性相联系的重大的建模问题。本节将阐述这些内容及其相关的内容。

首先，通过无限范围模型表示的内容意味着什么呢？对于有限范围的模型来说，不言而喻的假设是，时间指标 t 记载着时期数与由某种测量单
244 位所记录下来的流逝时间，比如月份或年。这意味着时间时期等于持续期，例如一年。对于无限范围问题保留这种组织结构将导致选取 $T=\infty$，意味着存在（可数的）无限交易时期数，所有时期具有相同的长度。

然而，为了某些目的的实用性存在一种可供选择的方法：存在一个有限计划范围，然而在计划范围之前也存在（可数的）无限交易时期数。当然，这里各种时期具有不同的长度，可由计量时间来度量。例如，具有一个一年的计划范围，时期 t 持续 $(1/2)^t$ 年，$t=1, 2, \cdots$。每一个方式（而且不可否认，两种方式的术语不是完全一致的），无限范围模型（Infinite Horizon Models）的定义特征是（可数的）无限交易时期数；无论以计量时间度量的计划范围是否是有限的以及所有时期是否是相同的计量时间长度，这对本节的目的而言都是不重要的问题。人们自始至终地应该把 t 看成是时期数的计数，从而令 $T=\infty$。

对无限范围模型来建立证券价格过程没有多大困难。不用说，样本空间 Ω 将必须是无限的。随着对概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 的规定，信息的域流模型 $\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t: t=0, 1, \cdots\}$ 将是一个 σ 代数，满足 $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_{t+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}$ 对于所有 t。于是，像前面一样，证券价格将是非负的、适应的随机过程。

然而，当对交易策略做出规定时，我们迅速地遇到新增加的问题。像往常一样，我们将要求交易策略是可料的随机过程，因为这将致使投资者无法使用所有过去和现在可获得的信息研究未来。然而，不用增加一些限制，无限次交易机会将允许投资者产生套利的利润，即使对于完美合理的股票价格模型。这将在下面处理非常简单的二项式股票价格模型的例子中加以阐述。

例 7.1 考察一个简单的二项式股票价格模型，其中“上升”因素 u

$=1.1$，“下跌”因素 $d=0.9$，而无风险利率 $r=0$。这里的目标是描述你以零美元开始，并且你一定以 1 美元来结束的套利机会。上升运动的概率严格地在 0 和 1 之间；确切的数值并不重要。但注意到，这个模型存在一个风险中性概率测度；它是与在一个时期中上升运动和下跌运动的等条件概率相一致的。

其思想是运用“倍增”策略，其中你在时间 $t=0$ 着手借入 10 美元，将这些资金全部投资于股票。如果股票在第一个时期上涨，那么你的投资变成 11 美元，这样你偿还 10 美元的借款，而你获得余下的 1 美元，然后撤出。另一方面，如果股票下跌，那么你的股票投资价值为 9 美元；由于你欠债 10 美元，这使你有 1 美元负债。你能够通过借入成倍于初始 10 美元资金投资于股票来“补救”(Recover)。特别，你借入附加的 11 美元，245
产生总的借款 21 美元，并将其 20 美元投资于股票。如果股票在第二个时期上涨，那么你的股票投资变成 22 美元，这样你偿还 21 美元借款，获得余下的 1 美元，然后撤出。但是，如果股票下跌，那么你的股票投资变为 18 美元，留给你 3 美元负债，这要求你至少一倍甚至更多倍的“加倍”借入资金。

一般说来，如果在第一个 t 次时期里存在至少一次上升运动，那么你将获得想得到的 1 美元利润，同时你将一直到时间 t 为止结束所有借款和交易。另一方面，如果股票在第一个 t 次时期中的每一个时期股票下跌，在 t 次时期之后，你将有 $1-2^t$ 美元负债，你将在借款上欠下$11(2)^{t-1}-1$ 美元，而你当前投资在股票的价值为$9(2)^{t-1}$(验证：$1-2^t=9(2)^{t-1}-[11(2)^{t-1}-1]$)。在后一种情况下，于是你在时间 t 将借入附加的$11(2)^{t-1}$美元来增加你的股票投资到$10(2)^t$ 美元且继续下去。

现在如果仅仅存在有限时期数 T，那么有一个正的概率使股票每一个时期都将下跌，因而你将以 $1-2^T$ 美元负债结束，在此情况下，这不会是一个套利机会。但是具有无限交易时期数时，股票价格不断下跌并结束负债的概率等于零。换句话说，在倍增策略下，以 1 美元结束作为你最终财富的概率等于 1。这就是套利机会。

什么地方出了问题呢？我们的套利机会的概念不适合无限范围模型情况吗？当你在每一个有限时间上驱走成为负债的风险时，谈论在未来一定拥有正的财富极为不合常规，但是记住无限范围模型能够与有限计量时间的计划范围以及可变长度的无限交易时期数相联系。利用后一种观点，我们在未来的有限距离上涉及正的财富。我们的套利机会的概念是没有问题

的。

例 7.1 所反映的问题是，特定的交易策略是不切实际的。首先，投资者拥有负债数量不存在一个下界（这在 t 时期后会是 $1-2^t$），也不存在借款数量的一个上界（这在 t 时期后会是$11(2)^{t-1}-1$ 美元）。此外，投资者需要拥有的股票股数不存在上界（随着每股价格下跌，已投资的美元数会无限制地增长，所以拥有的股数也将无限制地增长）。这些情况从建模和经济观点来看都是不切实际的。

制定一个除掉这些不切实际情况的假设是合理的。例如，人们会规定
246 交易策略（也就是股票数量的多头或空头）是有界的。或者人们规定投资者的财富存在一个下界。像这些假设将除掉产生套利机会的倍增策略。这正是我将要采用的方法。

现在转到资产定价的基本定理上，即存在一个风险中性概率测度当且仅当存在无套利机会。为了讨论这个问题，鉴于前面的讨论，有必要小心地给出关于无限范围模型的套利机会（风险中性概率测度的定义与有限范围模型没有什么不同）。一个可料的交易策略 H 称为是可取的（Admissible），如果存在一个纯量 $m<\infty$，使得时间 t 的财富 $V_t \geqslant -m$ 对于所有 t（这个不等式以概率 1 成立；注意可取性除掉了倍增策略）。可取的、自融资交易策略 H 称为是一个套利机会（Arbitrage Opportunity），如果（回想起 $V_t^*=V_t/B_t$ 是投资组合时间 t 的折现价值）：

1 $V_0=V_0^*=0$

2 存在一个随机变量 $V^* \in \mathscr{F}$，使得 $V_t^* \to V^*$ 当 $t \to \infty$（即 $P(V_t^*-V^*)=1$）

3 $V^* \geqslant 0$

4 $E[V^*]>0$

这样，(1)、(3) 和 (4) 与有限范围情况中的相同，只是这里它们涉及在无限交易时期数之后的折现价值 V^*，V^* 在 (2) 中已给出。

现在容易解释下面的：

(7.14) 如果存在一个风险中性概率测度 Q，那么存在无套利机会。

为了理解这点，假设 H 是一个满足如同 (2) 中的 V^* 且 $V_0^*=0$ 的可取交易策略。于是，正如在有限范围情况一样，$t \to V_t^*$ 在 Q 下是一个鞅，

所以$E_Q[V_t^*]=V_0^*=0$ 对于所有 t。由 Fatou 引理（关于随机变量序列的一个技术性收敛定理）得出$E_Q[V^*]\leqslant 0$，所以 V^* 不能既满足（3）又满足（4）。因而 H 不能成为一个套利机会。

可惜的是，(7.14) 的逆连同 (7.14) 构成了资产定价的基本定理，这对一般的无限范围模型而言是不正确的。这将用下面的例子来阐述。

例 7.2 考察具有一个风险证券 S 的证券市场模型，$r=0$ 以及可数的样本空间 $\Omega=\{1, 2, \cdots\}$。设 $S_0=1$，且对于所有 $t\geqslant 1$ 及所有 $\omega\in\Omega$，设

$$S_t(\omega)=\begin{cases}(1/2)^t, & t<\omega\\ (\omega^2+2\omega+2)(1/2)^\omega, & t\geqslant\omega\end{cases}$$

这意味着，在状态 ω 价格每时期减少 50% 持续 $\omega-1$ 个连续时期，由时间 247
$\omega-1$ 到时间 ω 价格增加了$(\omega^2+2\omega)(1/2)^\omega$，而且从那时起价格是一个常数。换句话说

$$\Delta S_t(\omega)=S_t(\omega)-S_{t-1}(\omega)=\begin{cases}-(1/2)^t, & t<\omega\\ (\omega^2+2\omega)(1/2)^\omega, & t=\omega\\ 0, & t>\omega\end{cases}$$

设 H_t 表示从时间 $t-1$ 到时间 t 持有风险证券的股数。给定价格过程的性质，就算是对交易策略的注意加以限制也没有什么损失，其中 $\{H_t\}$ 是一个实数的序列。为避免倍增策略，也假设序列 $\{H_t\}$ 是有界的。当然，交易策略必须是自融资的。因此，可取的交易策略完全由初始财富 V_0 与有界的实数序列 $\{H_t\}$ 来描述。

如果 $t<\omega$，那么在时期 t 中投资组合在价值上损失 $(1/2)^t H_t$；而如果 $t=\omega$，那么投资组合盈利$(\omega^2+2\omega)(1/2)^\omega H_t$。当然，如果 $t>\omega$，那么投资组合在价值上保持常数不变，尽管 H_t 的值是非零的。因此，时间 t 投资组合的价值在可取的交易策略$(V_0,\{H_t\})$下是

$$V_t(\omega)=\begin{cases}V_0-\sum\limits_{s=1}^{t}(1/2)^s H_s, & t<\omega\\ V_0-\sum\limits_{s=1}^{\omega-1}(1/2)^s H_s+(\omega^2+2\omega)(1/2)^\omega H_\omega, & t\geqslant\omega\end{cases}$$

容易验证，此价值过程 V 是有下界的，因为要求序列 H_t 成为有界的。

在这个市场中的无套利是由三个因素得出的：价格上升的日期是不可料的；如果 ω 充分的大，那么甚至在价格上升以后价格将是任意的低；而且仅仅有界交易策略是允许的。回想起套利机会的定义，以及因为 $r=0$的 $V_t=V_t^*$ 事实。如果 $V_0=0$ 且$\{H_t\}$使得 $V_t \to V$，满足$V(\omega)\geqslant 0$ 对于所有 ω，那么

$$\textbf{(7.15)} \quad -\sum_{t=1}^{\omega-1}(1/2)^t H_t+(\omega^2+2\omega)(1/2)^{\omega} H_{\omega} \geqslant 0 \text{ ，} \quad \text{所有 } \omega \in \Omega$$

现在对于某一个整数 k 及某一个$\varepsilon>0$，假设

$$\textbf{(7.16)} \qquad \sum_{t=1}^{k}(1/2)^t H_t>\varepsilon$$

通过归纳方法，运用（7.15）容易得出

248 $$(\omega^2+2\omega)(1/2)^{\omega} H_{\omega}>\varepsilon, \quad \text{所有 } \omega>k$$

但是,这不能成立,因为$\{H_t\}$是有界的,所以存在任何一个整数 k 及 $\varepsilon>0$,使得(7.16)是正确的。换句话说,它必是

$$\textbf{(7.17)} \qquad \sum_{t=1}^{k}(1/2)^t H^t \leqslant 0, \quad \text{所有 } k \geqslant 1$$

在(7.15)中取 $\omega=1$ 且在(7.17)中 $k=1$,由此可得 $H_1=0$。更一般地说,如果 $H_1=H_2=\cdots=H_{k-1}=0$,那么(7.15)与(7.17)蕴含 $H_k=0$。这样,通过归纳方法我们的套利机会的候选者满足 $H_t=0$ 对于所有 t。不存在任何套利机会。

为了证明不存在任何的风险中性概率测度 Q,考察风险中性条件概率应该是什么。设 q_{t-1}表示从时间 $t-1$ 到时间 t 的“上升”运动的风险中性条件概率。相对应的 ΔS_t 条件期望必是零,也就是

$$q_{t-1}(t^2+2t)(1/2)^t+(1-q_{t-1})[-(1/2)^t]=0,\quad 所有\ t\geqslant 1$$

这蕴含

(7.18) $$q_{t-1}=(t+1)^{-2},所有\ t\geqslant 1$$

因此，另一种归纳方法证明无条件风险中性概率 $Q(\omega\geqslant t)$ 必等于 $(t+1)/(2t)$，应该注意到，当 $t\to\infty$ 时，它收敛于 1/2。如果这不是一个有效的概率测度，则它必是

$$\lim_{t\to\infty}Q(\omega\geqslant t)=0$$

而这里此极限等于 1/2。这样，不存在那样的概率测度，即在此测度下价格过程 S 是一个鞅。

虽然例 7.2 是一个令人灰心的结果，但是它并不是我们研究的终结。* *首先，当一些人愿意讨论证券模型从经济上的观点来看是一个合理的模型，而另一些人则讨论这是不正确的。对套利机会定义的适度变化能导致对不合意交易策略的识别。②这些变化能成为非常技术性的，所以这里不对它们继续展开讨论。其次，我们必须致力于取出像这里的例子。这样的例子是罕见的。实际上，风险中性概率测度始终地存在于证券市场的现实模型中，虽然存在无限交易时期数。

习题 7.3 详细证明 (7.15) 及 (7.16) 蕴含 $(\omega^2+2\omega)(1/2)^{\omega}H_{\omega}>\varepsilon$，对于所有 $\omega>k$。

习题 7.4 详细证明 (7.15) 及 (7.17) 蕴含 $H_t=0$，对于所有 $t=0$。 249

习题 7.5 详细证明 (7.18) 蕴含 $Q(\omega\geqslant t)=(t+1)/(2t)$。

注释

① 这个结果及相当多的后续发展是以 Dalang、Morton 和 Willinger(1990)为基础的。也参看 Schachermayer(1992)。

② 关于这个论题综合的、高等的研究参看 Schachermayer(1994)。

译者注

* 本文把“finite horizon models”译为“有限范围模型”，其中“horizon”在不同的语言环境里中文译法也不同，它的基本含义是水平、范围、视域等，本文采用将“horizon”译为“范围”，认为这样更符合该专业术语的含义。类似地，还有“infinite horizon models”译成“无限范围模型”。

* * “it is not the end of the wond”（中文翻译为“但是它并不是我们研究的终结”），这句话的意思是，例题 7.2 的含义不一定不好，而且它一定不是致命的或者毁灭性的。正如连续时间模型一样，具有无限时间时期数时，你能够拥有或者无套利的或者无风险中性概率测度的模型。但是，如同作者在同一段文字叙述中所解释的那样，这样模型是非常稀少的，所以有理由把人们的注意力限制在具有风险中性概率测度的模型上。

附录：

线 性 规 划

线性规划是一个最优化问题，其中存在一个含有一个或多个变量的线性目标函数，同时也存在一些线性约束。线性规划有着许多用途广泛的应用，诸如交通运输系统的安排、生产和库存的控制以及稀缺资源的配置。线性规划的研究已经是运筹学中基本的内容。从Dantzig(1998）的经典著作，到Murty(1976）与Chvatal(1980）精心整理的书，直到最近Sierksma (1996）与Vanderbei(1998）的教科书，有许多实用性的书专注这个主题。这个附录的目的是，提供一个在本书中应用于证券市场理论方面的线性规划的简要概括归纳。

一个典型的线性规划是

(A.1)
$$\begin{aligned} \min\quad & c'X \\ \text{s.t.}\quad & AX \geqslant b \\ & X \geqslant 0 \end{aligned}$$

的形式，其中决策变量构成非负的列向量 $X \in \mathbb{R}^n$，同时许多数据资料构成的列向量 $c \in \mathbb{R}^n$，列向量 $b \in \mathbb{R}^m$ 以及 $m \times n$ 的矩阵$A = (a_{ij})$。可行域，也就是 $\{X \in \mathbb{R}^n : AX \geqslant b,\ X \geqslant 0\}$，或者是空集或者是$\mathbb{R}^n$ 中的一个凸集，形成一个 $m \times n$ 个半平面的交集。此外，如果可行域是非空的，那么它有一些角（Corners)、顶点（Vertices）或者极值点（Extreme Points)，也就是这种可行点不能够表示成其他可行点的凸组合。由于目标函数是线性的，所以如果最优解存在，那么至少有一个极值点是最优的。

许多线性规划可以通过使用两种算法中的一种来求解。单纯形算法(Simplex Algorithm）及其变化形式是以一种系统的方式由一个极值点到另一个极值点的变动，直到达到最优极值点为止。椭球方法（Ellipsoid Method）忽略极值点，却更注意求解某一个不等式组，它喜欢具有计算

时间的理论，而计算时间是由数据资料规模大小以某一固定的多项式来获得上界的。这两种算法容易在商业化的计算程序上获得。

251 存在（A.1）的几种形式变形：目标函数能是求最大的，m 个约束中的一些能够是等式以及 / 或者相反的不等式，同时一些变量在符号上能是无约束的。然而，所有这样的变形都能够转换成标准形式（Standard Form）（A.1）。例如，求最大化 $c'X$ 与求最小化 $-c'X$ 是相同的，约束 $\sum_j a_{ij}X_j \leqslant b_i$ 与 $\sum_j(-a_{ij})X_j \geqslant -b_i$ 是相同的。还有，约束 $\sum_j a_{ij}X_j = b_i$ 与约束对 $\sum_i a_{ij}X_j \leqslant b_i$ 及 $\sum_i a_{ij}X_j \geqslant b_i$ 是相同的。最后，如果变量 X_j 在符号上是无约束的，那么等价于在问题中的每一处将它用两个非负变量的差来代替，比如说 $U_j - V_j$。

每一个线性规划（LP）与它的对偶形式（Dual）构成一对。例如，标准形式（A.1）线性规划的对偶是

(A.2)
$$\begin{aligned} \max \quad & Y'b \\ \text{s.t.} \quad & A'Y \leqslant c \\ & Y \geqslant 0 \end{aligned}$$

其中，$Y \in \mathbb{R}^m$ 是变量的列向量。运用前面一段的变换，直接证明（A.2）的对偶是原始的LP(A.1)(参见习题 A.1)。这个原理对于在前面一段中所讨论的任何一种变形都是正确的。一般说来，习惯上称初始的 LP 为原始的（Primal），人们说“对偶的对偶是原始的。”

花费一点时间考察上面讨论的不同变形的对偶形式是值得的。首先，注意 m 个原始约束在一一对应关系下与对偶变量相对应。类似地，n 个原始变量在一一对应关系下与对偶约束相对应。为了建立任意 LP 的对偶形式，人们开始就要弄清楚如果原始目标函数是求最小化的，那么不存在“小于或等于”（也就是“$\leqslant$”）的约束。类似地，如果原始目标函数是求最大化的，那么一定不存在任何一个“大于或等于”（也就是“$\geqslant$”）的约束。

其次，如在（A.1）和（A.2）之间进行比较，如果原始问题是“求最大化的”，那么其对偶问题就是“求最大小化的”，反之亦然。在原始目标函数中的数据资料变成对偶形式中右边的数据资料，反过来也是一样。如果原始约束的左边数据资料形成一个矩阵 A，那么相对应的对偶矩阵变为转置 A'（记住 $(AX)' = X'A'$）。此外，如果原始变量要求为非负的，那么相对应的对偶的约束是一个不等式（如果对偶目标函数是求最大化的，那么“$\leqslant$”；否则“$\geqslant$”）。而且，如果原始约束是一个不等式，那

么相对应的对偶变量要求为非负的。

现在考虑变形问题。如果原始变量在符号上是无约束的，那么相对应的对偶约束是一个等式（参见习题 A.2）。同时，如果对偶约束是一个等式，那么相对应的对偶变量在符号上是无约束的（参见习题 A.3）。

每一个线性规划能够被归类到三个类型中的一种。如下面指出的： 252

(A.3) 给定任意一个线性规划，或者

(a) 它具有有限个最优解，

(b) 最优解是无界的，或者

(c) 可行域是一个空集。

例如，相对于非负变量 X_1 及 X_2 求最小化的 X_1 是（a）的一个例子，而把这变为一个求最大化的问题则给出（b）的一个例子。增加约束 $X_1+X_2\leqslant -7$ 则给出（c）的一个例子。

在线性规划的类型与它的对偶问题的类型之间存在一种逻辑关系。假设 X 是关于（A.1）可行的，且 Y 是关于（A.2）可行的。用行向量 Y' 左乘以原始约束得出 $Y'AX\geqslant Y'b$。与此同时，对偶约束是与 $Y'A\leqslant c'$ 相同的，这样用列向量 X 右乘以这个式子得到 $Y'AX\leqslant c'X$。把这些不等式组合起来得出 $c'X\geqslant Y'b$。由于 X 与 Y 是任意的可行点，所以得到一些合乎逻辑的结论是：

(A.4) 如果线性规划在类型（A.3a）中，那么它的对偶不能在类型（A.3b）中。此外，如果线性规划在类型（A.3b）中，那么它的对偶一定是在类型（A.3c）中。

如果线性规划在类型（A.3a）中，那么它的对偶能在（A.3c）中吗？回答是否定的。

(A.5) 如果线性规划在类型（A.3a）中，那么它的对偶同样是在（A.3a）中。

在证明这个结果之前，应该提到一种可能，即一个线性规划及其对偶都是在类型（A.3c）中（参见习题 A.4）。这样，如果一个线性规划在类型（A.3c）中，那么由此可得，它的对偶或者在类型（A.3b）中，或者

在（A.3c）中，但是它不能在（A.3a）中。

为了证明（A.5），证明中将用到 Farkas 引理，它是由分离超平面定理推导出的。尽管这个引理已经在习题 1.11 中陈述过，为了方便的缘故，这里将它重述一遍：

(A.6) 已知矩阵 D 及行向量 d，或者存在一个列向量 v，使得 $Dv\leqslant 0$ 且纯量 dv 是严格正的，或者存在一个非负行向量 w 使得 $wD=d$，但是两者不能同时存在。

为了应用这个引理，取矩阵 D 是由 $n+m$ 行及 $m+1$ 列构成的，满足（A'，c）构成头 n 行以及（$-I$，0）构成后 m 行，其中 I 是 $m\times m$ 的单位矩阵。设 d 等于 $m+1$ 维的行向量（0，…，0，-1）。留给读者（习题 A.5）去证明（A.2）是可行的，当且仅当存在某一个 v，使得 $Dv\leqslant 0$ 且 dv 是严格正的。

现在我们证明（A.5），通过假设线性规划（A.1）在类型（A.3a）中，而 LP（A.2）在类型（A.3c）中，然后推导出一个矛盾。如果 LP
253 （A.2）在类型（A.3c）中，通过前面一段和（A.6），那么存在一个非负的行向量 $w=(w_1,\ w_2)$ 使得 $wD=d$，其中 w_1 具有 n 个分量及 w_2 具有 m 个分量。一旦写出这个方程，明显地得到两个方程，一个方程是 $w_1c=-1$。另一个方程是 $w_1A'-w_2=0$，它确实与 $Aw'_1\geqslant 0$ 相同。所以（A.2）不可行性蕴含 w_1 的存在，使得 $Aw'_1\geqslant 0$ 且 $w_1c=-1$。

其次，设 X 是原始LP(A.1)的一个可行解，并考察点 $X+\lambda w_1$，其中 λ 是任何一个非负的纯量。显然，$X+\lambda w_1$ 对于所有非负 λ 值是非负的。此外，$A(X+\lambda w_1)\geqslant b$，所以 $X+\lambda w_1$ 事实上对于所有非负 λ 是原始可行的。目标函数是 $c(X+\lambda w_1)=cX-\lambda$，这样设 λ 增加到无穷大，显然目标函数减少到负无穷大。这与我们的假设原始LP(A.1)在类型（A.3a）中相矛盾。

可以证明（A.5）的结论能够被加强。下面结果的证明与（A.5）的证明相类似，因此，把它留给读者来完成（参见习题 A.6）。

(A.7) 对偶定理：如果线性规划在类型（A.3a）中，那么它的对偶形式也同样在（A.3a）中，而且各自的目标函数最优值是互相相等的。

习题 A.1 运用变换："求最大化 cX 与求最小化 $-cX$ 是相同的"等来证明（A.1）是（A.1）对偶的对偶。

习题 A.2 运用上述变换以及在（A.1）与（A.2）之间的对偶性证明，如果原始变量在符号上是无约束的，那么相对应的对偶约束是一个等式。

习题 A.3 运用上述变换以及在（A.1）与（A.2）之间的对偶性证明，如果原始约束是一个等式，那么相对应的对偶变量在符号上是无约束的。

习题 A.4 证明线性规划

$$\begin{aligned}\min\quad & X_1-2X_2\\ \text{s.t.}\quad & X_1-X_2\geqslant -1\\ & -X_1+X_2\geqslant 2\\ & X_1\geqslant 0,\ X_2\geqslant 0\end{aligned}$$

与它的对偶形式都没有可行解。

习题 A.5 满足如同在（A.5）的证明中所定义的 D 和 d，证明不存在 v，使得 $Dv\leqslant 0$ 且 dv 是严格正的，当且仅当LP(A.2)是不可行的。换句话说，证明存在某一个 v，使得 $Dv\leqslant 0$ 且 dv 是严格正的，当且仅当LP(A.2)是可行的。

习题 A.6 证明对偶定理（A.7）。提示：如果它是不成立的，那么 $AX\geqslant b$，$Y'A\leqslant c$，$X\geqslant 0$，$Y\geqslant 0$ 以及 $c'X\leqslant Y'b$ 不能存在任何一个解。

参考文献

Bartle, Robert G. and Sherbert, Donald R. 1992: *Introduction to Real Analysis*, Wiley, New York.

Baxter, Martin and Rennie, Andrew 1996: *Financial Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge.

Bazaraa, M.S. 1993: *Nonlinear Programming*, Wiley, New York.

Berberian, Sterling K. 1994: *A First Course in Real Analysis*, Springer-Verlag, New York.

Bertsekas, Dimitri P. 1976: *Dynamic Programming and Stochastic Control*, Academic Press, New York.

Bingham, N.H. and Kiesel, Rüdiger 1998: *Risk Neutral Valuation*, Springer-Verlag, New York.

Bjork, Tomas 1998: *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford.

Browder, Andrew, Halmos, P.R. and Axler, S. 1996: *Mathematical Analysis: An Introduction*, Springer Verlag, New York.

Brown, William C. 1991: *Matrices and Vector Spaces*, Marcel Dekker, New York.

Chiang, Alpha C. 1974: *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, McGraw Hill, New York.

Chvatal, V. 1980: *Linear Programming*, W.H. Freeman & Co., New York.

Cinlar, Erhan, 1975: *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Cox, John C. and Rubenstein, Mark 1985: *Options Markets*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Dalang, R.., Morton, A. and Willinger, W., 1990: "Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models", *Stochastics and Stochastic Reports*, 29, pp. 185 – 201.

Dantzig, G.B. 1998: *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Denardo, Eric V. 1982: *Dynamic Programming: Models and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Dixit, Avinash K. 1990: *Optimization in Economic Theory*, Oxford University Press, Oxford.

Dixit, Avinash K. and Pindyck, Robert S. 1994: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Doob, J.L. 1953: *Stochastic Processes*, Wiley, New York.

Dothan, Michael U. 1990: *Prices in Financial Markets*, Oxford University Press, Oxford.

Duffie, Darrell 1988: *Security Markets: Stochastic Models*, Academic Press, New York.

——1992: *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Durrett, Richard 1991: *Probability: Theory and Examples*, Wadsworth & Brooks, Pacific Grove, CA.

Eatwell John, Milgate, Murray and Newman, Peter 1989: *The New Palgrave: Finance*, W.W.Norton, New York.

Elliott, Robert J. and Kopp, P.Ekkehard 1998: *Mathematics of Financial* 255
Markets, Springer-Verlag, New York.

Feller, William 1968: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.1, 3rd edn., Wiley, New York.

——1971: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.2, 2nd edn. Wiley, New York.

Gantmacher, F.R. 1959: *The Theory of Matrices*, 2 vols, Chelsea, New York.

Harrison, J. Michael and Pliska, Stanley, R. 1981: "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading," *Processes and Their Applications*, 11, pp. 215-60.

Hayhurst, George 1987: *Mathematical Programming Applications*, Macmillan, New York.

Hoel, P., Port, S. and Stone, C. 1972: *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin, Boston.

Huang, Chi-fu and Litzenberger, Robert H. 1988: *Foundations for Financial Economics*, North-Holland, New York.

Hull, John 1997: *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Ingersoll, Jr., Jonathan E. 1987: *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, Totowa, NJ.

Jarrow, Robert A. 1988: *Finance Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Jarrow, Robert and Turnbull, Stuart 1996: *Derivative Securities*, South-Western College Publishing, Cincinnati.

Jeter, Melvyn W. 1986: *Mathematical Programming: An Introduction to Optimization*, Marcel Dekker, New York.

Karatzas, Ioannis and Shreve, Steven E. 1998: *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, New York.

Karlin, Samuel and Taylor, Howard M. 1975: *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

——1981: *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

Karr, Alan F. 1993: *Probability*, Springer-Verlag, New York.

Kijima, Masaaki 1997: *Markov Processes for Stochastic Modeing*, Chapman & Hall, London.

Klein, E. 1973: *Mathematical Methods in Theoretical Economics*, Academic Press, New York.

Korn, Ralf 1997: *Optimal Portfolios*, World Scientific Publishing Co., Singapore.

Lamberton, Damien and Lapeyre, Bernard 1996: *Introduction to Stochastic*

Calculus Applied to Finance, Chapman & Hall, London.

Lay, David C. and Guardino, Karen 1997: *Linear Algebra and Its Applications*, Addison-Wesley, Harlow, Essex.

Luenberger, David G. 1998: *Investment Science*, Oxford University Press, Oxford.

Markowitz, Harry 1990: *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Blackwell, Oxford.

Merton, Robert C. 1990: *Continuous-Time Finance*, Blackwell, Oxford.

Mikosch, Thomas 1998: *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing Co., Singapore.

Mikusinski, Jan and Mikusinski, Piotr 1993: *An Introduction to Real Analysis: Form Number to Integral*, Wiley, New York.

Murty, Katta G. 1976: *Linear and Combinatorial Programming*, Wiley, New York.

Musiela, Marek and Rutkowski, Marek 1997: *Martingale Methods in Fi-* 256
nancial Modeling, Springer-Verlag, New York.

Neveu, J.1975: *Discrete-parameter Martingales*, North-Holland, Amsterdam.

Norris, J. 1998: *Markov Chains*, Cambridge University Press, Cambridge.

Olkin, Ingram, Gleser, Leon J. and Derman, Cyrus 1980: *Probability Models and Applications*, Macmillan, New York.

Ostaszewski, Adam 1993: *Mathematics in Economics: Models and Methods*, Blackwell, Oxford.

Panjer, Harry et al.1998: *Financial Economics, With Applications to Investments, Insurance and Pensions*, The Actuarial Foundation, Schaumburg, Illinois.

Pitman, Jim 1993: *Probability*, Springer-Verlag, New York.

Pliska, Stanley R.1982: "A discrete time stochastic decision model," in *Advances in Filtering and Optimal Stochastic Control*, (edited by W.H.Fleming and L.G.Gorostiza; Lecture Notes in Control and Information Sciences, 42), Springer-Verlag, New York, pp. 290–304.

——1986: "A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios," *Math. Operations Research*, 11, pp. 371–84.

Puterman, Martin L. 1994: *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*, Wiley, New York.

Rebonato, Riccardo 1998: *Interest Rate Option Models: Understanding, Analyzing and Using Models for Exotic Interest-Rate Options*, John Wiley, Chichester.

Revuz, D. 1984: *Markov Chains*, North-Holland, Amsterdam.

Riess, R. Dean, Johnson, Lee W. and Arnold, Thomas A. 1997: *Introduction to Linear Algebra*, Addison-Wesley, Harlow, Essex.

Rockafellar, R. Tyrrell 1997: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Roman, Steven 1992: *Advanced Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York.

Ross, Sheldon M. 1995: *Stochastic Processes*, John Wiley, Chichester.

——1997a: *A First Course in Probalility*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

——1997b: *Introduction to Probability Models*, Academic Press, New York.

Schachermayer, W., 1992: "A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time", *Insurance: Mathematics and Economics*, 11, pp. 1-9.

——1994: "Martingale measures for discrete-time processes with infinite horizon", *Mathematical Finance*, 4, pp. 25-56.

Sierksma, Gerard 1996: *Linear and Integer programming: Theory and Practice*, Marcel Dekker, New York.

Taylor, Howard M. and Karlin, Samuel 1984: *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press, New York.

Vanderbei, Robert J. 1998: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Kluwer Academic Press, Kingston-upon-Thomes, Surrey.

Whittle, Peter 1982: *Optimization Over Time: Dynamic Programming and Stochastic Control*, Vol. 1, Wiley, New York.

——1983: *Optimization Over Time: Dynamic Programming and Stochastic Control*, Vol. 2, Wiley, New York.

Williams, David 1991: *Probability with Martingales*, Cambridge University

Press, Cambridge.

Wilmott, Paul, Dewynne, Jeff and Howison, Sam 1993: *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press, Oxrord.

257 索引

A

B

C

D

E

F

G

H

I

K

L

M

O

P

R

S

T

U

V

W

Y

Z

译者后记

目前，金融学是经济学学科中一个内容庞大、应用广泛，并且研究极其活跃的领域。当代金融学发展呈现两个十分突出的特征：其一是金融科学数量化，其二是金融科学工程化。我认为，金融科学数量化是指金融学理论研究模式趋向于数学化（即推理演绎数学化）、应用研究定量化（指建立相应的数学模型）以及运用计算机求解模型数值问题的广泛化。这样的发展导致了金融数学或称为数理金融学（现今人们也称为数学金融学）的孕育、诞生和发展。

现代金融学诞生在20世纪50年代。在公司财务方面取得重要突破——MM理论，即莫迪利安尼（F.Modigliani）和米勒（M.Miller）证明在一定的条件下，一个公司的价值与其所采取的融资方式是发行债券，还是发行股票无关。其次，他们建立一套新的经济学研究方法。他们的研究直接应用一价定律，即两种相同的资产成本其价格必然相同。从此，这一研究方法及证明思想（即套利思想）成为金融学的核心内容。莫迪利安尼和米勒先后荣获诺贝尔经济学奖（1985年和1990年）。这在很大程度上取决于他们俩在此领域里所做的开创性工作。然而，在数学模型方面的主要进展是在投资领域和资本市场，马柯维茨（H.Markowitz）（1952，1959）的投资组合选择均值方差理论提供了对通常资产具有相关收益数量化风险——收益协调的易于处理的模型。从此，金融学的研究开始迈向数学化、定量化的研究道路上。

后来，夏普（W.Sharpe）在1964年和林特（J.Linter）在1965年分别在马柯维茨的基础理论之上，研究资产价格的均衡结构，他们的资本资

产定价模型（CAPM）已成为度量证券风险的基本的数量化模型。随后，CAPM 形成了发展度量金融行业领域中经理投资业绩的整个行业的基础。由于夏普对 CAMP 理论的突出贡献，他与马柯维茨、米勒分享了 1990 年诺贝尔经济学奖。

自从布莱克（Fischer Black）和斯科尔斯（Myron Scholes）、默顿（Robert C. Merton）在 1973 年分别发表“布莱克—斯科尔斯—默顿期权定价公式”以来，期权定价理论的研究就成为数理金融学研究的中心。目前，期权定价理论的应用已经远远超出金融衍生证券的范围。

数理金融学中，人们关注的重点是所谓金融衍生证券的定价问题，而衍生证券的价值依赖于某种原生资产（Underlying Asset）的价格。一个最重要的例子是欧式买入期权（European Call，也称欧式看涨期权），它给其持有者在预先确定的到期日以敲定价格从衍生证券发行者那里购买一定数量的原生资产。此外，其他一些广泛交易的衍生证券包括美式买入期权、美式卖出期权以及欧式卖出期权、远期利率合约、债券期权等。这就导致了数理金融学家考察如下的两个核心问题：（1）对原生资产价格而言，衍生证券的敏感价格是什么？还有，这种价格随时间变化一直到到日期为止，又是如何演变的呢？（2）金融市场中的投资者是如何利用衍生证券来安排自己的最优资产配置的？如何达到自己最优消费投资的？为了处理上述问题，数理金融学家通常采取两个基本步骤：首先，我们需要可以刻画原生资产价格的演变模型，以及衍生证券的价格怎样依赖于原生资产价格而演变的假设。其次，我们需要一些有关市场行为方面（比如投资者、市场制度等）的假设。然后，在此基础上不断探讨和研究一系列的相关问题。

1969～1980 年的这一段时期中，人们看到在衍生证券定价、期限结构理论、资产定价以及最优消费和投资组合等内容上的潜在思想有了令人目不暇接的发展。1981～1999 年的十几年不断发展，这些理论在金融学的各个分支里，在更好地解释实证规律性上取得了扩展和改进。

现在，金融学是经济学科中最为数学化的一个分支。1997 年诺贝尔经济学获奖者默顿（R.C.Merton）教授曾说：“在过去的大多数时间中，数学模型对金融实践的影响是有限的和附属的。但是，在过去 20 年间，这些模型已成为全世界金融机构和市场中实践者的中心内容。在未来，数学模型在包括管理和会计在内的全球性金融系统运作中大概有必不可少的作用。”

经济科学出版社组织翻译出版的“数理金融方法与建模译丛”，是国内目前首次大规模引进数理金融学方面著作和教材的大举措。无疑，此套译丛的出版将会大力促进我国数理金融学的研究、教学的普及和提高。

我能参加“数理金融方法与建模译丛”书目的推荐和筛选工作，并且担当《数理金融学引论》的译者，这要感谢经济科学出版社金融编辑室（第九编辑中心）主任王书燕老师、李洪波女士对我的信任，这期间得到王书燕老师和李洪波女士的多方支持和帮助。在几个月的辛苦翻译工作中，我曾得到北京大学史树中教授、哈尔滨工业大学耿宪章教授和杨庆俊博士的大力指教和帮助，还曾得到严质彬博士、静晓英女士的帮助以及我妻子的鼎立协助。同时感谢责任编辑袁庆海先生细致、辛勤的工作。最后，我还要感谢我的博士生导师冯英浚教授多年来对我从事这一领域的支持和教导。

原书作者——斯坦利·R·普利斯卡教授自始至终对翻译工作给予关注，并为译者正确理解原著提供有益的指导，还专为中文翻译版撰写序言，为此我也要感谢普利斯卡教授。当然，译书中的错误和纰漏请读者指正（2000年第二版中的印刷错误已经做了改正）。译者的联系方式 E-mail：zhongyuwang@163.net。

王忠玉

2001年10月11日

图书在版编目（CIP）数据

数理金融学引论：离散时间模型／（美）普利斯卡（Pliska，S.R.）著；王忠玉译．—北京：经济科学出版社，2003.3
（数理金融方法与建模译丛）
书名原文：Introduction to Mathematical Finance
ISBN 7-5058-2995-5

Ⅰ．数… Ⅱ．①普…②王… Ⅲ．金融学：数理经济学－高等学校－教材 Ⅳ．F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 084537 号

图字：01－2001－2737

责任编辑：袁庆海
责任校对：董蔚挺
版式设计：代小卫
技术编辑：董永亭

数理金融学引论
——离散时间模型
[美]斯坦利·R·普利斯卡/著
王忠玉/译
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京海淀区阜成路甲28号　邮编：100036
总编室电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天津新华印刷一厂印装
690×990　16开　23印张　380000字
2003年3月第一版　2003年3月第一次印刷
印数：0001－5000册
ISBN 7-5058-2995-5/F·2363　定价：49.00元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

数理金融方法与建模译丛

Translation Series of Methods and Modeling in Mathematical Finance

金泉文库

金融时间序列的经济计量学模型

（第二版）

特伦斯 · C · 米尔斯

数理金融学引论

——离散时间模型

斯坦利 · R · 普利斯卡

分形市场分析

——将混沌理论应用到投资与经济理论上

埃德加 · E · 彼得斯

金融风险理论

——从统计物理到风险管理

简 · 菲利普 · 鲍查德

马克 · 波特

全球资产与负债管理建模

威廉 · T · 津巴

约翰 · M · 马尔维

书　评

走进圣殿，参研宝典，令你一切尽在掌握！

——《金泉文库》隆重推出

《数理金融方法与建模译丛》之

《数理金融学引论》

本书是严密而易于进入证券市场的现代金融理论著作，它既适合于商学院或金融学院的高年级本科生及低年级研究生的用书，又适合于数学系的类似用书。证券市场的完整理论需要连续时间的随机过程模型、测度论与数理经济学的知识，而这些内容通常在进入高年级研究生水准之前是未学到的。然而，此教科书仅限于证券价格的离散时间模型，但这种阐述方式仍能使学生获得几乎所有重要的金融概念和数学工具。这本书的目的是提供一种金融学理论的严谨处理，同时保持一种非正式的风格。

斯坦利·R·普利斯卡是芝加哥伊里诺斯大学金融系的一位资深教授。他早期的重要工作是 1981 年与 J. Michael Harrison 联名在《随机过程及其应用》杂志上发表的《连续交易理论中的鞅和随机积分》，这篇论文严格论证了连续时间金融学中的资产定价基本定理，从此成为一篇经典文献。他是学术期刊《数理金融学》(*Mathematical Finance*) 的创始编辑和首任主编。普利斯卡教授以对证券价格的数学理论与经济理论的基础研究，尤其是对随机微积分与套利定价理论之间的重要联系做出了发展，以及对投资组合最优化问题的风险中性的计算方法的发现而著称。

我确信这是一本适合于本科生和MBA课程中关于数理金融学的杰出教材。本书大部分内容阐述具有多次、离散交易日的，以及有限样本空间的模型，从而避免与连续时间模型相联系的技术上的困难。该书重点着力于内容的数学严密与直觉相平衡。

——纽约大学　Peter Lakner 教授

经济科学出版社
Economic Science Press

金泉文库

金泉文库

为适应中国社会主义市场经济的飞速发展，推动中国的金融深化，迎接风云变幻的国际金融给中国带来的严峻挑战，经济科学出版社决定出版《金泉文库》。

《金泉文库》包括国内和国外两个系列。国外系列以译丛的形式推出，目前已经出版和即将出版的包括《当代金融名著译丛》；《当代金融实务译丛》；《华尔街实战译丛》；《电子商务译丛》；《风险投资译丛》；《数理金融方法与建模译丛》；《世界金融史话译丛》；其他风格的译丛也将陆续推出。国内系列包括以下几个方面：当代金融理论；当代金融实务；金融教材；金融趣味读物。

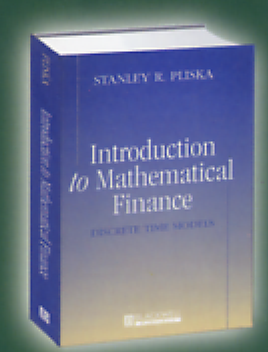
《金泉文库》力求全面地、系统地反映当代金融领域的全貌及其进程，总结和挖掘当代金融已有的和潜在的成果。在选题的采择上，努力开掘出自名家的权威著作，力求建立金融书苑的基础体系，同时把握金融时代发展的脉搏，推出反映金融重点、热点的论著。

“金”者，财富也，金融也；“泉”者，钱币之谓也，又可指清澈之泉水，涤人之目，解人之渴，且泉源永存，流水不腐。

读者的需求、反馈和建议乃《金泉文库》立足之本，丰富和壮大之源（联系电话：010−88191415；E−mail:jr@esp.com.cn）。愿《金泉文库》给读者带来财富，给金融界带来活水。

广发证券股份有限公司高级金融教材译著系列

香港皇权集团资助并重点推介课题



封面设计：苗　苗

ISBN 7-5058-2995-5

9 787505 829954 >

ISBN 7-5058-2995-5/F · 2363定价：49.00元