国家自然科学基金重大项目(金融工程)丛书

金融工程原理

无套利均衡分析

不懂得无套利均衡分析，就是不懂得现代金融学的基本方法论，当然，也就不懂得金融工程的基本方法论。

宋逢明 著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

国家自然科学基金重大项目(金融工程)丛书

金融工程原理

——无套利均衡分析

宋逢明　著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书全面而系统地围绕现代金融学的基本方法论——无套利均衡分析讨论金融工程的原理。通过研读本书，读者将能通晓现代金融学的核心内容，掌握设计、开发和实施新型金融产品的基本方法、技术和工具，完成作为金融工程师的基础训练。

全书共分 10 章。第一章引入基本的无套利均衡分析方法；第二章讨论利率的期限结构，帮助读者建立正确的货币的时间价值概念；第三章和第四章介绍基本的投资和资产定价理论；第五章和第六章通过介绍期权定价理论讨论动态无套利均衡分析；第七章是理论核心，讲解等价鞅测度模型和无套利均衡基本定理，阐明无套利均衡定价与风险中性定价之间的关系；第八章将无套利分析用于各种或有要求权的估值，进而介绍企业融资和投资决策的新技术与新工具；第九章讨论市场环境、交易方式与资产定价，引导读者认识市场结构；第十章概述各种新型的风险管理技术与工具。

本书可用作文科和理工科院校金融、财务、会计、经济和企业管理等专业高年级本科生和研究生相关课程的教材和教学参考书，也可供银行、证券、保险等金融业从业人员或有兴趣的读者阅读与学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

金融工程原理：无套利均衡分析/宋逢明著. —北京：清华大学出版社，1999.10
(国家自然科学基金重大项目金融工程丛书)
ISBN 7-302-03714-0

Ⅰ.金… Ⅱ.宋… Ⅲ.金融学 Ⅳ.F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 42883 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京市通州区人民文学印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：14　字数：331 千字
版　次：1999 年 10 月第 1 版　1999 年 10 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-03714-0/F・237
印　数：0001～5000
定　价：20.00 元

作者说明

在写作本书时，我给自己规定了三项要求：

第一，本书的内容应使文科背景的读者也能理解，从而广大财经类院校的金融专业也可用作教材或教学参考书。对于理工科背景的读者则更是如此。

第二，内容体系要形成特色，即不但国内没有类似的中文著作，也没有现成的英文著作可以直接翻译引进。

第三，尽可能包含最新的研究成果，尤其是 90 年代以来的新发展。还应介绍我们结合中国实际所做的一部分研究。

现在，本书已经交付出版了。我希望本书第一版至少能够部分地符合以上要求。

金融学是一门非常年轻的学科，它从经济学中分离出来成为一门独立的学科还不到半个世纪。无疑，经济学是金融学的基础，金融学发展的过去、现在和将来都必须不断地从经济学的研究成果中汲取营养。但是，金融学从内容、方法到工具，都已经形成了自己独有的学科特色。它不但已经是一门科学，而且在向工程化方向发展，直接地、大规模地创造经济和社会的效益。

金融学从 50 年代奠基到六七十年代成形，在整个这段时期中国都处于封闭状态，当时中国的经济学者没有机会系统地学习和掌握金融学的理论体系。改革开放以后，现代金融学才被逐渐地介绍到国内。至于金融工程的引进，则还是最近几年的事情。由于这种历史原因，目前国内金融学科的教学和研究体系，还存在与国际规范不接轨的地方。国际上金融学科的发展主流在商学院，教学和研究的内容集中在企业和市场的层面，主要由公司财务和资本市场两大部分组成。这两个部分是互相紧密联系的，因为金融系统只有通过企业的财务活动才能真正和实物经济发生联系，而企业的价值又要经过金融市场的交易才能得到正确的评估。由此出发，因为金融学研究的核心问题是金融/财务决策，尤其是强调实际的交易和运作，所以数理工具的使用是必不可少的，但是国内现在大部分金融学专业还是以文科设置的。

金融学和经济学一样是从文科发展而来的。文科背景的研究人员以他们艰苦而巧妙的思辨方式，在经济学和金融学的早期研究中，做出了卓越的贡献，并对后来的发展产生了不可磨灭的影响。在经济学和金融学的发展过程中，数理工具是逐渐被引入和融化在其中的。金融系统是由人参与的复杂系统，与工程方面的复杂系统有很大的不同。对于这一类复杂系统的研究，文科的思维方式依然起到核心的作用。事实上，国际上第一流的金融学家在他们的研究工作中，都是将定性的思维和定量的分析高水平地统一到一起的。我并不认为现在金融学发展的主要障碍在于数学训练的不足，相反，我们反对采用非常高深的数学把经济学和金融学搞成只有少数数学专业工作者看得懂的东西。自 80 年代以来，国际学术界也对在经济领域的研究中曾经过度使用数理工具进行过反思和批判。对于金融

学的研究来说，最重要的仍然是经济学和金融学的理念和意识。我非常有兴趣在金融学研究的方法论方面与同行学者进行探讨，并在本书的序言中提出了一些抛砖引玉的意见。

国内金融学界对数理工具的重要性已经有比较清醒的认识，明显的例证是大部分文科财经类金融专业已经开设了许多数理方面的课程来弥补以往教学的不足。现在的问题是数理训练还未能与经济学和金融学的教学和科研有机地结合起来。但有一点是可以肯定的，现在文科金融专业的师生要阅读规范的金融学文献资料，在数学训练方面并没有严重的欠缺，而仅仅是习惯的问题，即不习惯于比较抽象的数学表达方式。我们在本书中只用到微积分、线性代数、概率论和数理统计的初等知识。对于现在文科财经类专业的学生来说，这些知识都是具备的。而且，我们把稍微难一点的数学推理都放到了数学附录里。不阅读这些附录基本不会影响对内容的理解。因此，如果文科背景的读者在学习本书时一时感觉到困难的话，只要有耐心，稍稍坚持一下，就一定能跨越所有的障碍。而且，这将帮助读者逐渐适应阅读带有数理模型的经济学和金融学文献资料。

金融工程作为一门学科确立只是90年代以来的事情，国外也只出版了十来本冠以金融工程名目的书籍。国内已经有了两个比较重要的译本。一本是马歇尔及其助手编写的《金融工程》(宋逢明等译，清华大学出版社出版)，这是系统而全面介绍这一新兴学科的著作。马歇尔教授原来是国际金融工程师学会的执行主席，是国际上创立这一学科的先驱之一。另一本是格利茨著的《金融工程学》(唐旭等译，经济科学出版社出版)，在技术层面讲得相当好。但是这两本书都没有讲解原理，因为他们认为读者是已经掌握了原理方面的知识的。而讲述原理的内容，在英文教科书里，又都散见于公司财务和投资学的教程里，或者在一些写得相当艰深的专著中，还没有发现一本适合金融工程教学的系统讲解原理的书籍。正因为如此，才促使我下决心来写一本这样的著作。

在本书的内容取材上，尽可能地选取了一些最新发展的研究成果。金融学的发展日新月异，尤其是金融工程诞生以后，各种新的产品(包括技术、工艺和工具等)层出不穷。我只是尽自己所知来做介绍，难免挂一漏万。我指导自己的博士、硕士研究生对新兴的中国金融市场开展了部分金融工程课题的研究，获得了一些颇有意义的结果，本书中对此做了一些简单的介绍。这些研究成果在整理后将以其他的方式发表。

我特别感激国家自然科学基金委员会，正是基金委的支持和鼓励，才使我在金融工程的研究方面取得一些成绩，也使我有勇气为在中国建立符合国际规范的现代化金融学科呐喊。基金委管理科学部和数理学部以大无畏地创导科学的精神，设立了“九五”自然科学基金重大项目“金融数学、金融工程及金融管理(项目编号 79790130)”，为推动我国金融学科的现代化做出了历史性的贡献。本书也是我所主持的该重大项目中“金融工程”课题的一项研究成果。

本书的部分内容为清华大学经济管理学院金融专业的高年级本科生和硕士、博士研究生讲授过。我的博士和硕士研究生梁洪昀、唐俊、田萌为本书设计了部分练习题，谭慧和齐莹的部分研究成果已被吸收入本书中。

鉴于自己的学识和水平，本书中难免存在许多错误与不当之处，敬请读者和同行批评指正。

宋逢明

1999 年 7 月于清华园

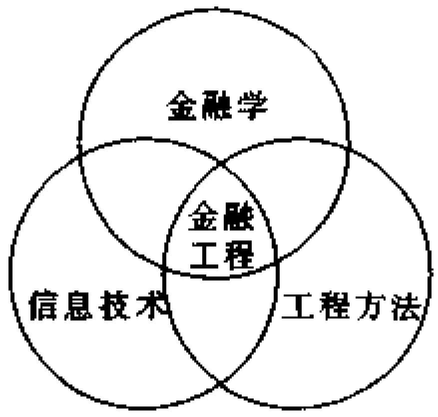
序言：金融工程的方法论基础

金融工程是80年代末，90年代初出现的一门工程型的新兴学科。它将工程思维引入金融领域，综合地采用各种工程技术方法（主要有数学建模、数值计算、网络图解、仿真模拟等）设计、开发和实施新型的金融产品，创造性地解决各种金融问题。

金融产品的涵义是广义的，它既包括金融商品（所有在金融市场交易的金融工具（亦称有价证券），如股票、债券、期货、期权、互换等都可看作是金融商品），也包括金融服务（结算、清算、发行、承销等都是金融服务）。而设计、开发和实施新型金融产品的目的是为了创造性地解决金融问题，因此金融问题的解(solution)，也就可以看作是金融产品。这就给金融产品以最宽泛的定义。

这里提到的“新型”和“创造性”有三层涵义：一是指金融领域中思想的跃进，其创新程度最高，如第一份期权合约的产生；二是指对已有观念作重新理解与运用，如在商品交易所推出金融期货作为新品种；三是指对已有的金融产品进行分解和重新组合，目前层出不穷的新型金融工具的创造，大多建立在这种组合分解的技术之上。

当我们把银行金融业真正看作一种产业的时候，就同样会有它的产品、创造产品的技术和工艺、生产和营销产品的企业（银行和其他金融机构）、交易产品的市场（金融市场）。金融工程的问世，使金融作为一种产业得到了支持它发展的工程学科，就像机械工程支持机械工业发展，电子工程支持电子工业发展一样。而金融工程的创新特征，说明它所提供的是金融业本身的高新科技。事实上，这种金融领域的高新科技已经发挥了巨大的作用。国际炒家在世界范围的金融市场兴风作浪时，他们并不是在盲目地投注赌博，而正是利用这种高新科技，设计出非常精妙的大规模套利和投机策略，向各国金融市场的薄弱环节发动进攻。而各国政府和金融当局，也必将求助于此类高新科技，才能保卫自己的经济和金融的稳定和持续发展。



金融工程大量采用图解、数值计算和仿真技术等工程手段来研究问题。而且，金融工程的研究直接而紧密地联系着金融市场的实际。大部分真正有实际意义的金融工程研究，

必须有计算机技术的支持。图解法需要计算机制表和作图软件的辅助，数值计算和仿真则需要很强的运算能力，经常用到百万甚至上亿次的计算，没有计算机的高速运算和辅助设计，这些技术将失去意义。金融产业与信息产业的结盟，是金融工程的产业背景。

因此，我们可以把金融工程看作现代金融学、信息技术和工程方法的结合(见上图)。它本身是一门新兴的交叉学科，是金融科学的工程化。任何一门科学学科，只有经过工程化，面向产品的创造，才能产生大规模的经济和社会的效益。因此，在金融工程领域的一些领先学者，认为金融工程的产生把金融科学推进到一个新的阶段。

讨论金融工程的方法论基础也就应当从交叉学科的角度出发来进行，即我们要从现代金融学、信息技术和工程方法三个方面和它们的交叉来展开讨论。

第二次世界大战前，金融学完全是经济学的一个分支学科。金融学研究的方法论，总的来说和当时经济学研究的方法论相同。以定性的思维推理和语言描述为主，基本上采用的是经济学的供需均衡分析。一般认为，现代金融理论起始于50年代初。当时，哈里·马柯维茨(H. Markowitz)提出了投资组合理论，最先把数理工具引入金融研究，因此被看作是分析金融学的发端。在这之前，金融学的研究是描述性的，没有精致的数量分析。后人把马柯维茨的工作和70年代初布莱克和舒尔斯提出第一个期权定价公式这两项有较强数学性的工作称为"华尔街的两次数学革命"。

但是，数学毕竟只是工具，数理工具的引入只标志着定量分析开始占据重要的地位。事实上，战后数理经济学和计量经济学的突飞猛进同样意味着定量研究在经济学中发挥了重大的作用。当然，"华尔街的两次数学革命"建立起分析金融学的理论框架，因而数理工具对于现代金融学的研究来说是必不可少的。国际金融学术界一般认为，这一理论框架到80年代已经基本确立。现在分析金融学的研究仍然是重要的，就像当今机械工程的发展，仍然离不开力学研究的支持一样。

金融学在研究方法上完全从经济学中独立出来，应当是在50年代后期莫迪格里亚尼(F. Modigliani)和米勒(M. Miller)在研究企业资本结构和企业价值的关系(即所谓的MM理论)时提出的"无套利(No—Arbitrage)"分析方法。这才是现代金融学的真正的方法论革命！西方主流经济学研究的基本方法是供给和需求的均衡分析，着眼点常常在均衡的存在性和均衡的变动情况。而金融研究的一项核心内容是对金融市场中的某项"头寸"(头寸指对某种金融资产的持有或短缺)进行估值和定价，分析的基本方法是将这项头寸与市场中其他金融资产的头寸组合起来，构筑起一个在市场均衡时不能产生不承受风险的利润的组合头寸，由此测算出该项头寸在市场均衡时的价值即均衡价格。

当市场处于不均衡状态时，价格偏离了由供需关系所决定的价值，此时就出现了套利的机会。而套利力量将会推动市场重建均衡。市场一恢复均衡，套利机会就消失。在市场均衡时无套利机会，这就是无套利均衡分析(严格地说，应称为"无套利机会的均衡分析"，不过这样说太拗口了)的依据。市场的效率越高，重建均衡的速度就越快。金融系统无疑是一个复杂系统。在金融市场中，各个市场参与者想法各异，尤其是个人的风险偏好很不一样，但是，只要出现套利机会，所有的市场参与者就都会抓住机会去套取无风险利润。而套利机会消除后所确定的均衡价格，就与市场参与者的风险偏好无关。因此，无套利均衡分析的思路是非常巧妙的，它抓住了金融市场均衡的最为本质的特性。

现代金融理论研究后来取得的一系列突破性成果，如套利定价理论，以至期权定价公式，都是灵活地利用这种“无套利”的分析方法而得到的。在期权定价理论中，所构筑的组合头寸是动态地保持住无套利特性的，因此需要用微分方程来刻画。

由市场的供需关系所主导的市场价格均衡，一旦价格失衡，就会有许多参与者调整自己的行为来重建市场均衡，但每位市场参与者只对自己的供需状况做有限范围的调整。套利则不然，一旦出现套利机会，每一位套利者都会尽可能大地构筑套利头寸。从理论上讲，因为金融市场容许卖空（对于许多金融商品来说，实际的金融市场也容许卖空。广义地说，只要有信用借贷关系出现，就意味着卖空，而信用借贷关系则是金融所特有的），所以只需要少数几位（甚至在理论上只需一位）套利者就可以重建市场均衡。因此，无套利均衡比供需均衡所产生的市场推动力要强得多，重建市场均衡的速度也要快得多。这就是金融市场的效率为什么要比其他的商品市场和服务市场高得多的原因。反过来，金融市场的这种本质特性决定了对它采用的研究方法应当有别于其他的市场。这是无套利均衡分析方法的根本涵义。也正因为如此，金融市场中价格的变动要比其他市场更为激烈和频繁，风险管理的重要性也就更为突出。

“金融工程师”的称谓起始于本世纪 80 年代伦敦的银行界。当时有的银行建立起专家小组，对客户的风险进行度量，并应用组合工具进行结构化管理。这一类工作就被称为金融工程，而从事此类工作的专家就被称为金融工程师。因此，金融工程原先的狭义定义就是金融风险管理工具和技术的研究。随着七八十年代以来金融创新和金融自由化浪潮的兴起，人们对金融工程的认识迅速拓宽。成立于 1991 年的“国际金融工程师协会(IAFE)”把准确地界定这一新兴学科作为自己的职责之一，这就给出了金融工程的广义定义，也就是我们在这里所采用的定义。但无论如何，金融风险管理是金融工程的一个核心内容。

信息技术的进步对金融工程的发展起到了根本性的支撑作用，为金融工程的研究和应用提供了物质条件和强有力的工具和手段。信息技术的发展还通过影响其他环境因素或与其他因素共同作用，对金融工程产生综合而深远的影响。

对金融工程的发展起到最显著的推动作用的信息技术包括计算机的大规模运算和数据处理能力以及远程通讯技术。高速微处理器、个人电脑、网络系统、先进的数据输入技术等计算机硬件设备应用于金融领域，引起了一系列深刻的变革。通讯技术的发展使信息在全球范围内的迅速传播成为现实，使世界金融市场通过信息连成一体。软件技术的发展则使计算机与通讯技术更直接、更充分地服务于金融工程，各种大规模的计算和分析软件包（包括近似计算和仿真计算）为金融工程提供了开发和实施各种新型金融产品、解决金融和财务问题的有效手段。例如，在使用了计算机与证券分析表软件后，使得复杂的涉及多边的金融交易成为可能，促进了货币与利率互换等金融工具的发展。再如，在进行股票指数期货交易时，金融工程师将复杂的运算关系编成程序，并通过计算机系统和通讯端口获取实时数据和交易信息，这种交易策略被称为“程序化交易”。此外，各种新型期权产品的交易更是离不开计算机软件技术和仿真技术。自动化和人工智能技术在金融工程中也有一定的应用，例如在信用分析、市场模拟等方面取得了很不错的研究和应用成果。

以计算机软、硬件技术和通讯技术为主的多种技术综合应用于金融系统，业已形成了规模巨大的、高效率的金融信息系统。金融信息系统作为一种综合性的金融手段，它的发

展与完善既为金融工程的进一步发展创造了条件，同时也是金融工程本身的重要内容。

信息技术的发展及其在金融系统的广泛应用，降低了交易成本和信息成本，大大地提高了金融市场的效率。各种新型金融产品的投放市场、又增强了金融市场转移和重新配置风险的能力，大大地增加了市场的完全性，从而加强了市场本身抵御和防范金融风险的能力。近年来，因特网技术飞跃发展和对商务领域广泛渗透，网上银行和网络金融市场业务已经构成电子商务的重要组成部分。信息技术对金融工程方法论的影响，还在不断地发展新的涵义。因此，信息技术在金融领域的普遍使用及其支撑作用，是金融工程方法论的又一个重要方面。

所谓工程化的方法论则和其他的现代工程科学一样，主要有数学建模、数值计算、网络图解、仿真模拟等技术手段。工程活动主要依赖于工程师们的创造性劳动，不拘泥于死板的理论教条。工程方法论首先是面向市场，立足于解决实际的问题。产品的设计、开发和实施是一切工程活动的基本内容。在市场经济条件下，产品必须适销对路。如本书序言开头所述，我们给予金融产品最为宽泛的定义。因此，金融工程作为工程型学科的方法论，是围绕着金融产品的创造和实现展开的，而金融产品的推出和改进，又都是以市场为导向的。这就是为什么当前在西方发达国家的金融工程活动，已经发展到“量体裁衣”地提供金融产品的原因。

金融工程的工程方法论大量地采用数学和统计学的工具，也用到其他与系统科学和决策科学有关的工具（如运筹学优化技术）。在计算机信息技术的支持下，也正在发展计算机辅助设计（CAD）和制造（CAM）的技术。至于是否可能向计算机集成制造（CIMS）方向发展，则可能是一个远景。目前，在金融工程的研究方面处于国际领先地位的一些金融学家，正在考虑除了利用金融市场的实际数据开展实证研究——即发展实证的金融学之外，还设想有否可能建立实验室环境来试验各种新设计和开发的金融产品——即发展实验的金融学。总而言之，自然科学和工程的方法论已经向金融学全面渗透。

然而，有一点是最为根本的，金融工程本身是金融学的工程化，因此在本质上是现代金融学的最新发展。现代金融学本身的方法论—无套利均衡分析—也就是金融工程基本的方法论。信息技术和工程方法对金融工程研究的支持，从最基本的方法论角度，应该说都是围绕无套利均衡分析展开的。可以并不夸大地说，不懂得无套利均衡分析，就是不懂得现代金融学的基本方法论，当然，也就不懂得金融工程的基本方法论。就像不懂得供需均衡分析，就不懂得西方经济学的基本方法论一样。

金融工程的一项核心技术是组合分解技术。采用组合分解技术，可以利用基本的金融工具（包括基本的原生工具如股票和债券，也包括基本的衍生工具如远期协议、期货、期权、互换等）作为零部件来组装成具有特定流动性和收益/风险特性的金融产品，也可以通过“剥离”，把原来捆绑在一起的金融/财务风险进行分解，更可以在分解后加以重新组合，从而为收益/风险在市场的流动转移和重新配置提供强有力的手段。如果现有的金融工具所带有的风险是市场参与者无力承担的，采用金融工程的分解技术可以变得能够承担；如果现有工具的风险是市场参与者不愿接受的，采用金融工程的技术可以设计出符合他们的收益/风险偏好的新产品来。组合分解技术本质上就是用一组金融工具来“复制”另一个（或另一组）金融工具的技术，也就是无套利均衡分析方法的具体化。信息技术和工程方法

论对金融工程的支持，一定是通过现代金融学自身的方法论起作用的。离开了金融学自身的方法论，其他方法论在金融领域的作用也就失去了依据。

但是，有一点必须要讲清楚，我们说无套利均衡分析是现代金融学的基本方法论，并不能囊括所有的金融学分析方法；就像说供需均衡分析是经济学的基本方法论，并不能涵盖所有的经济学分析方法一样。尤其是近期发展的信息经济学在公司财务理论与实践中的影响，其分析方法不能简单地归之于无套利均衡分析。但只要联系到由市场来评价企业价值的活动，无套利关系仍然是非常基本的。

建立和发展具有中国特色的金融工程新学科，一定要注意正确的方法论的引导。本书是一本讲解金融工程原理的著作，因此是围绕无套利均衡分析方法全面地展开讨论。希望本书能够帮助读者正确地认识现代金融的实质，掌握金融工程的分析方法和应用技术及工具，为进一步的训练打下良好的基础。

从最近的发展动向看，在北美众多优秀的商学院里，金融工程已经成为金融/财务领域教学和研究的热点。金融工程的形成和发展，正在打破学界和业界的藩篱，使金融学的研究，走出学院的象牙之塔，密切地结合于市场实践。因为金融工程的兴起，华尔街的大银行和金融机构，越来越重视向学界求教。而金融学的教授们，也越来越深地介入商务活动。知识直接转化为财富，金融工程这一新兴学科，带着这样鲜明的知识经济的印记，展现出无可限量的发展前途。

在充满生机和活力的新兴的中国金融产业，需要大批接受规范训练的合格的金融工程师。推动建立具有中国特色的金融工程学科，对于中国金融体系的现代化，有着重要的历史性意义。我们愿意与读者携手努力，共同为这一新兴学科大厦添砖加瓦。

目　录

第一章　无套利均衡分析方法

现代金融学研究的基本方法是所谓的无套利均衡分析(No-Arbitrage)方法。虽然在经济学的研究中早就有所谓"一价定律"的表述，其中含有类似无套利均衡的思想(二者严格地说是有区别的)，但金融市场具有有别于其他商品和服务市场的特性(我们在本书中将逐渐向读者展示这些特性)，无套利均衡分析方法因此具有特别显著的重要性。

在现代金融学中，这一方法最早体现在莫迪格里亚尼(Franco Modigliani)和米勒(Robert Miller)研究企业资本结构和企业价值之间的关系的重要成果(即所谓的 MM 理论)中。可以说，这一研究方法标志着现代金融学在方法论上从传统经济学的研究中独立出来，而且成为取得后续一系列金融研究成果的基本分析手段。因此，这一方法也是金融工程面向产品设计、开发和实施的基本分析技术。我们从介绍 MM 理论的内容入手，来介绍这一方法的思路。

1. 企业价值的度量

企业的价值就是企业总的资产的价值。对于资产的价值，有两种不同然而非常基本的度量方法：一种是会计上度量的账面价值，一种是金融/财务上度量的市场价值。会计是根据资产所发生的历史成本减去损耗(折旧)后所剩的净价值核计的。金融/财务则是将该项资产未来创造的收入现金流用资产的预期收益率(这个预期收益率称为这项资产的资本成本)折现后的现值作为资产的价值，而这实际上也就是市场对这项资产价值的评价，即资产的市场价值。因此，会计的账面价值的度量是面向过去的，金融/财务的市场价值的度量则是面向未来的。整个企业在会计上的账面价值是由所有资产的账面价值加总得出的，在金融/财务上的市场价值则是将所有的资产合到一起后(合到一起会产生某种组合效应)，能够创造出的未来的收入现金流用企业总的资本成本(即加权平均资本成本——参见后文)折现后的现值。

对于任何企业(个人或其他组织)来说，下述关系式恒成立：

资产＝负债＋权益

在会计上，这个关系是靠复式计账("有借必有贷，借贷必相等")来保持的。在金融/财务上，这个恒等关系意味着企业的价值(即其总资产价值)是由其负债和权益在金融市场上的总市值来度量的。因此，金融市场的存在，使企业的市场价值得以度量和评定。

因为我们研究的是金融/财务问题，所以从现在开始，若非特别指明，我们凡提到价值，都是指市场价值，即由金融市场上的均衡价格所反映的价值。

经典的公司财务理论认为，企业财务管理的目标在于使所有者的财富最大化。这里要

注意的是，资产价值的最大化不能简单地等同于权益价值(所有者掌握的企业净价值)的最大化。对于股份公司来说，只有每股权益价值的最大化才真正反映了股东(公司所有者)的财富最大化。所以，股票价格的变动确实反映了股东所拥有的财富的变动情况。

2. MM 理论

在 50 年代后期提出的 MM 理论曾经极大地震惊了金融学术界，莫迪格里亚尼和米勒为此先后荣获诺贝尔经济学奖。尽管如此，他们的理论成果中所含有的无套利均衡思想在后来所产生的巨大影响，仍然是当时所没有预见到的。

企业的资本结构的最简单的涵义是企业负债和权益的比例结构。MM 理论揭示了，在一定的条件(即 MM 条件)下，企业的资本结构与企业的价值无关。这一结论与人们的直觉相去甚远。而且，由此可以引伸出企业的金融活动本质上并不创造价值的结果。这当然是非常令人吃惊的。实际上，人们也正是由此出发，通过继续深入的研究，才更为明晰地了解企业的价值究竟是如何创造的，企业的金融/财务活动又是通过什么途径来创造企业价值的。

MM 理论的基本假设包括两个方面：

1) 无摩擦环境假设，是指

- 企业不缴纳所得税；
- 企业发行证券不需要交易成本；
- 企业的生产经营信息对内和对外来说是一致的，即信息披露是公正的；
- 与企业有关者可以无成本地解决彼此之间的利益冲突问题。

2) 企业发行的负债无风险。因此，购买企业的负债(即购买企业发行的债券或给企业贷款)的收益率是无风险收益率。

我们用一个简单的例子来说明 MM 理论是如何推出其结论的，并由此学习无套利均衡分析的技术。

假定有两家公司，公司 A 和公司 B，它们的资产性质完全相同，但资本结构(负债/权益)不一样。两家公司每年创造的利税前收益(*EBIT*-earnings before interest and taxes)都是 1 000 万元人民币。

公司 A 的资本全部由股本权益构成，共 100 万股。根据公司未来收入现金流的风险性质，金融市场对于该公司股票的预期收益率(称为市场的资本化率)是 $r_A=10\%$，这也就是公司 A 的资本成本。这样，公司 A 的企业价值就可以以资本成本对收益现金流折现来算出：

$$PV=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{EBIT}{(1+r_A)^t}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1\,000}{(1+10\%)^t}=\frac{1\,000}{10\%}=10\,000\text{ 万元}$$

公司 A 的股票的每股价格应当是 10 000 万元/100 万股=100 元/股。

公司 B 的资本中有 4 000 万元负债，可以认为是公司发行的债券，年利率为 8%。由负债无风险假设知，这也就是市场的无风险利率。企业负债的市场价值就是 4 000 万元，每年要支付利息 4 000×8%=320 万元。并且假设公司的债务是无限期的(因为可以通过发行新债来顶替旧债)。请注意，现在我们还不知道公司 B 的权益价值究竟是多少，因为现

在暂时还不知道公司 B 的权益的市场资本化率(即预期收益率)应该是多大。在无税条件下,企业的收益也必须先付利息,剩余者才能分给股东。因此,股东每年可以分到的收益应当是 $EBIT-320$ 万元。下面,我们假定公司 B 的股份数是 60 万股。[①]

在上述条件下,我们可以断言,公司 B 的股票价格是 100 元/股 。

如果公司 B 的股票价格不是 100 元/股,比如说是 90 元/股(小于 100 元/股),则采取以下策略就可以无风险套利。

在进行无套利分析时,一般要求市场容许"卖空"。所谓卖空是指这样一种交易规则:交易者即使不持有某种资产,也可以先卖出(做"空头")。如果以后再补买进,盈亏就会通过买进卖出的差价实现。对某种资产的持有称为"多头头寸(或长头寸)",短缺则称为"空头头寸(或短头寸)"。"做多头(或称处于多头地位)"和"做空头(或称处于空头地位)"就分别指持有多头头寸和持有空头头寸(实际上是短缺)。

一位投资者可以做下述交易来套利:卖空 1%的公司 A 的股票(1%×100 万股=1 万股),同时买进 1%的公司 B 的债券(价值为 1%×4 000 万元)和股票(1%×60 万股=6 000 股)。交易产生的现金流如下(见表 1.1):

表 1.1

头寸情况	即时现金流	未来每年的现金流
1%公司 A 股票的空头	+10 000 股×100 元/股=100 万元	$-EBIT$ 的 1%
1%公司 B 债券的多头	-1%×4 000 万元=-40 万元	1%×320 万元=3.2 万元
1%公司 B 股票的多头	-6 000 股×90 元/股=-54 万元	1%×($EBIT-320$ 万元)
净现金流	6 万元	0

这样,这位投资者可以既不花费成本(至少在理论上),又不承担风险地套取 6 万元现金的净利润。这说明公司 B 的股票价值在市场上被低估,未达到均衡价位。因套利行为所产生的供需不均衡的市场力量将推动其价格上升,直至均衡价位为止,即达到每股 100 元的均衡价位。

显而易见,如果公司 B 的股票价格高于 100 元/股(比如说是 110 元/股),投资者可以反向构筑头寸(即做公司 A 股票的多头和公司 B 证券的空头),照样获得无风险套利机会。套利产生的市场力量也会推动其价格回落到均衡价位。

无风险套利机会的出现,说明市场处于不均衡状态。而套利力量将会推动市场重建均衡。市场一恢复均衡,套利机会就消失。在市场均衡时无套利机会,这就是无套利均衡分析的依据。市场的效率越高,重建均衡的速度就越快。

因为公司 B 的股票价格也是每股 100 元,所以公司 B 的权益市值应为 100 元/股×60 万股=6 000 万元。公司 B 的企业价值就应为 4 000 万元(负债市值)+6 000 万元(权益市值)=10 000 万元,与公司 A 的企业价值相等。由此得出 MM 理论的结论:

① 这一股份数的假定是随意的,采用其他数目的股份数也可以得到同样的结论。

在 MM 条件下，企业价值与其资本结构无关。

这就是所谓的 MM 第一命题。

采用无套利均衡分析技术，实际上是用另一组证券来“复制(replicate)”某项或某一组证券。在上例中，我们是用公司 B 的股票和债券的组合来复制公司 A 的股票。技术的要点是使复制证券的现金流特性与被复制证券的现金流特性完全相同。一定要注意如下两点：

1）在未来任何情况下，二者的现金流特性都应该相同。在上例中，*EBIT* 的数值可以是变化的(每年 1 000 万元仅仅是平均数)。但无论怎么变化，公司 B 的“复制证券”在未来产生的现金流都会与公司 A 的股票产生的现金流相同。也就是说，复制证券的多头(或空头)和被复制证券的空头(或多头)互相之间应该实现完全地“对冲”(hedge——在有的场合可译为套期保值)。不能只在数学期望(即概率平均)的意义上实现无套利。有些不太入门的研究者往往会踏入这一误区。

2）构筑套利的复制证券的工作至少在理论上是可以在市场中实现的，因此需要一定的市场条件(如容许卖空)。脱离市场的实际进行无套利均衡分析会导致错误的结论。

虽然在 MM 条件下企业的价值与其资本结构无关，而且，在我们上面的分析中，因为选取公司 B 的股份数为 60 万股，从而两公司的股票价格也相等，这说明这两个公司每份股票的现值(即市值)是相等的，但是，这两种股票的收益/风险特性是不一样的。我们假设 *EBIT* 会出现好、中、坏三种情况。相应于这三种情况两公司的收益/风险表现如下：

表 1.2

情况	*EBIT*	公司 A(共 100 万股)	公司 B(共 60 万股)	
		每股收益 *EPS*	净收益	每股收益 *EPS*
好	1 500 万元	15 元	1 180 万元	19.67 元
中	1 000 万元	10 元	680 万元	11.33 元
坏	500 万元	5 元	180 万元	3.00 元
平均	1 000 万元	10 元	680 万元	11.33 元
标准差		4 元		6.81 元

由表 1.2 可见，公司 B 的股票的风险比公司 A 的股票的风险大(标准差大——价格波动大)，预期收益也大(含有更高的风险补偿)，但这两种股票的市场价值即现值是相同的。公司 A 股票的市场资本化率(预期收益率)是 10 元/100 元＝10%，公司 B 的股票的市场资本化率(预期收益率)是 11.33 元/100 元＝11.33%。度量这两种股票的风险的收益标准差分别为 4 元和 6.81 元，公司 B 的股票的风险比公司 A 的股票的风险大。在公司财务理论中，负债/权益被称为财务杠杆。对于公司 B 来说，由于存在财务杠杆，放大了权益的收益，同时也加大了权益收益的波动。

3. 加权平均资本成本

在 MM 条件下，企业的加权平均资本成本 *WACC*(weighted average cost of capital)

按下式计算：

$$WACC = r_e \frac{E}{D+E} + r_f \frac{D}{D+E}$$

其中，D 和 E 分别是企业负债和权益的市场价值，r_f 是无风险收益率，r_e 则是权益资本的预期收益率。因为企业的市场价值是用企业的加权平均资本成本为折现率对企业的未来收益现金流折现以后得到的现值。由 MM 理论自然可以推出，在 MM 条件下，企业的平均资本成本与企业的资本结构无关。在上例中，公司 B 的加权平均资本成本就与公司 A 的资本成本相等，即 $WACC=10\%$。而由上式可以倒算出公司 B 的权益资本成本

$$r_e = WACC + (WACC - r_f)D/E$$

正好算出 $r_e=11.33\%$。

以上公式表示的是 MM 第二命题：

> 有负债的公司的权益资本成本等于同一风险等级的无负债公司的权益资本成本（注意，上式中的加权平均资本成本 WACC 就等于无负债的公司 A 的权益资本成本）加上风险补偿，风险补偿的比例因子是负债权益比。

这还导致一条非常重要的金融/财务学原理：

> 资本的成本取决于资本的使用而不是取决于来源。

这个原理使我们认识到，在通常采用折现现金流计算资产的市场价值（即现值）时，采用折现现金流公式

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

如果产生这个现金流的资产是在金融市场上交易的有价证券或有价证券组合，则其均衡价格 P_0 必定与其市场价值（现值）相等，即有 $P_0=PV$。从而交易这项资产的活动所创造的净现值一定为 $NPV=0$。于是又引出一条基本的金融学原理：

> 在金融市场上的交易都是零净现值行为。

对于企业的非金融性资产而言，由于资产组合到一起会产生组合效应，所以对于投资项目的评估要求净现值 $NPV>0$。而企业的价值，不是其各项资产的市场价值的加总，而是用其负债和权益的市场价值来度量。企业的价值减去其各项资产的市场价值的加总后的差，就是企业的资产组合起来所创造的净现值。

于是，对于在金融市场交易的金融工具即有价证券来说，如果其收益现金流是 C_t，$t=1,\cdots,n$，则计算现值时所采用的折现率 r 取决于现金流 C_t，$t=1,\cdots,n$ 的性质，而不管其来源于金融市场的何处。如果有两个现金流 $C_t^{(1)}$，$t=1,\cdots,n$ 和 $C_t^{(2)}$，$t=1,\cdots,n$ 的现金流特性完全相同而它们的折现率不同，则它们的市场价值（现值——表现为价格）就会不

相等，这时候对价格高者做空头并同时对价格低者做多头(低买高卖)，就能套取无风险利润。推动市场走向均衡的供需力量一定会使它们的收益率变得相等。因此，在金融市场上，获取相同资产的资本成本一定相等。而从金融/财务的角度看，产生完全相同的现金流的两项资产可以被认为是完全相同的(即它们是互相复制的)。可以互相复制的两项资产如果在市场上交易，一定应该有相同的均衡价格，否则要发生套利。这和经济学中的一价定律的涵义是一致的。

由此也就给我们一个基本的启发：如果对于市场上现有的一项或一组金融工具，能够用现有的另一组金融工具来“复制”(产生相同的现金流)，如果复制者和被复制者(可以认为是互相复制)二者的市场价格不等(必须把所有发生的交易成本计算在内)，就出现套利的机会。实际上这是采用金融工程技术发掘市场套利机会的基本做法。

4. MM 理论的涵义

在 MM 条件下，改变企业的资本结构并不为企业创造价值。所以，通过调整企业的资本结构的金融(筹资)活动来为企业创造价值，就都是与 MM 条件的不成立联系在一起的。在现实的经济生活中，MM 条件当然在许多情况下是不成立的。实际的市场环境不是无磨擦的，调整资本结构的金融活动会通过这些“磨擦”的因素(包括税收、交易成本、信息披露、调节利害冲突等)影响企业的价值。另外，企业当然不可能无条件、无限制地发行无风险的负债。事实上，随着财务杠杆比的增大，企业债务的违约风险就会加大，从而 MM 的结论也就不能成立。

因为，通过财务结构的设计和重构为企业争取税收方面的好处是金融工程的一个重要课题，所以我们在这里分析一下税收对企业价值的影响。

假定在上例中对公司 A 和公司 B 都要征收 $T=33\%$ 的所得税。对于投资者(包括股东和债权人)每年能够得到的收益现金流(税前付息，税后分红)将是

$$\text{公司 A：}\quad (1-T)EBIT=(1-0.33)\times 1\,000\text{ 万元}=670\text{ 万元}$$

$$\begin{aligned}\text{公司 B：}\quad (1-T)(EBIT-\text{利息})+\text{利息}&=(1-T)EBIT+T\times\text{利息}\\&=670\text{ 万元}+0.33\times 320\text{ 万元}\end{aligned}$$

请注意，公司 B 因为有财务杠杆存在，所以每年可以多为投资者创造 0.33×320 万元=105.6 万元的收益。这就是所谓的“税盾”，因为是税前支付利息，所以每年支付的 320 万元利息中实际有 33%(105.6 万元)是从政府的税收中吐出来的。为了分析得更为清楚一些，我们来看表 1.3 中两个公司的市场价值及其在各有关方分配情况的比较。

表 1.3　　　　单位：万元

	公司 A	公司 B
债权人	0	4 000
股东	6 700	4 020
政府	3 300	1 980
公司的税前价值	10 000	10 000

我们这样来读表1.3。先从最后一行看，因为是公司的税前价值，就相当于MM条件成立，所以两个公司的税前价值相等，都是10 000万元。而实际公司的价值，是由资产负债表右边的负债和权益的市场价值来度量的。对于公司A来说，公司和政府按所得税税率分配税前价值，因此公司A的市场价值是6 700万元。公司B有价值4 000万元的无风险负债，但其中的33%(1 320万元)是从政府的税收中吐出来的。因此公司B的股东权益和政府税收的市场价值分别是4 020万元和1 980万元。这样，公司B的企业价值就是4 020+4 000=8 020万元，比公司A的价值高出1 320万元，这正好就是税盾的价值。请注意我们这里的叙述方式，我们并没有用到两家公司权益的市场资本化率。可以计算出这两家公司权益的市场资本化率没有改变，仍然分别是10%和11.33%。[①] 但这是推理的结果而不是前提。这个结果说明，在MM其他条件不变时，政府征税并不改变企业权益收益现金流的风险特性。

现在来看股票的价格。如果公司A仍然是100万股，则股价为6 700万元÷100万股=67元/股。那么公司B的股价是多少呢？如果公司B也仍然是60万股，那么股价也是4 020万元÷60万股=67元/股。这就不对了！因为税盾的缘故，公司B的价值比公司A高出1 320万元，公司B的权益的价值当然会比公司A高。这个问题应当这样来理解：假如公司A发行4 000万元的无风险负债，将这4 000万元来回购部分股票，回购后的资本结构就变得和公司B一样。因为有了财务杠杆，政府将退出总的现值为1 320万元的税款。公司的企业价值上升到8 020万元，每股股价上升到8 020万元÷100万股=80.20元/股。4 000万元将可回购的股票数是4 000万元÷80.20元/股=498 753股，流通在外的还有501 247股。如果把这501 247股拆细成60万股，股价就会从80.20元/股下跌到67元/股。

所以，加大财务杠杆会增加所有者的财富。但是，决不能无限制地加大财务杠杆。首先，从道理上说，负债不能超过企业的税前价值；其次，前面已经提到，财务杠杆的加大必然会增大负债的违约风险，MM理论中关于企业负债无风险的条件就会不成立。

在有税情况下(假设MM其他条件不变)，公司的(税后)加权平均资本成本为

$$
\begin{aligned}
WACC &= r_e \frac{E}{D+E} + r_f(1-T)\frac{D}{D+E} \\
&= \frac{(EBIT - r_f D)(1-T)}{E}\frac{E}{D+E} + r_f(1-T)\frac{D}{D+E} \\
&= \frac{EBIT(1-T)}{D+E}
\end{aligned}
$$

因为在有税情况下，企业价值随财务杠杆(资本结构)的不同而不同(因为$D+E$会随

---

① 可以这样计算这两个公司权益的市场资本化率。对于公司A，有

$$PV_A = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1-T)EBIT}{(1+r_A)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{670}{(1+r_A)^t} = 6\,700\text{万元}$$

可解出$r_A=10\%$。对于公司B，有

$$PV_B = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1-T)(EBIT-I)}{(1+r_B)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{0.67\times(1\,000-320)}{(1+r_B)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{455.2}{(1+r_B)^t} = 4\,020\text{万元}$$

可解出$r_B=11.33\%$。

着资本结构的变化而变化),所以加权平均资本成本是与企业的资本结构有关的。随着财务杠杆的加大,企业的加权平均资本成本会降低。如果再引入负债的违约风险的话,因为负债的资本成本变大,企业负债的市场价值会降低。加大财务杠杆究竟使加权平均资本成本变大还是变小,要进行具体地分析。

结合实际的经济生活,MM 理论告诉我们,通过负债和权益重组调整资本结构确实能增加企业的价值,但这种价值的创造来源于税收方面的好处、降低交易成本、减少信息的不对称性、有利于调整有关方面的利害关系,等等;但从根本上说,并不能影响企业资产所创造的收益。由此出发,对于不涉及企业资产重组的财务包装所起的作用,应当有比较清楚的认识。

5. 状态价格定价技术

为了加深读者对无套利均衡分析方法的印象,我们再介绍一下状态价格定价技术。

假如一份(有风险)债券 A,现在的市场价格是 P_A,1 年后市场价格会出现两种可能的情况:价格上升至 uP_A,称为上升状态,出现这种情况的概率是 q;或者价格下跌至 dP_A,称为下跌状态,出现的概率为 $1-q$。也就是说,1 年后会出现两种不同的状态价格。这由图 1.1 表示。

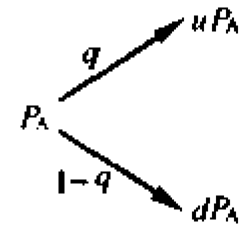


图 1.1

以 r_f 记无风险利率,我们假设 $d<1+r_f<u$。记 $\bar{r}_f=1+r_f$,如果 r_A 是债券 A 的预期收益率(即收益率的数学期望值),记 $\bar{r}_A=1+r_A$,则有

$$\bar{r}_A=\frac{quP_A+(1-q)dP_A}{P_A}=qu+(1-q)d$$

可以算出收益率的方差和标准差是

$$\sigma^2(\bar{r}_A)=q(1-q)(u-d)^2$$

$$\sigma(\bar{r}_A)=[q(1-q)]^{\frac{1}{2}}(u-d)$$

1 个单位(如 1 元)无风险证券,1 年后不管出现哪种情况,其市场价值(价格)则都应当是 $\bar{r}_f=1+r_f$(元)。

现在来定义一类与状态相对应的假想的证券,称之为基本证券。基本证券 1 在 1 年后如果市场出现上升状态,其市场价值为 1 元,如果市场处于下跌状态,则价值为零。基本证券 2 则反之,1 年后市场处于下跌状态时价值为 1 元,处于上升状态时为零。现在基本证券 1 的市场价格记为 π_u,基本证券 2 的市场价格记为 π_d。

现在我们可以用基本证券来复制上述的有风险债券 A。购买 uP_A 份基本证券 1 和 dP_A 份基本证券 2 构成的证券组合在 1 年后不管发生何种状态,都产生和债券 A 完全同

样的现金流，所以是债券 A 的复制品。由无套利原理知，复制与被复制证券现在的市场价格应该相等：

$$P_A = \pi_u u P_A + \pi_d d P_A$$

即

$$\pi_u u + \pi_d d = 1$$

如果我们同时购买 1 份基本证券 1 和 1 份基本证券 2 构成证券组合，则 1 年后无论出现何种状态，这个证券组合的市场价值都将是 1 元。这是一项无风险投资，其收益率应该是无风险收益率 r_f，于是有

$$\pi_u + \pi_d = \frac{1}{1 + r_f} = \frac{1}{\bar{r}_f}$$

把上述两个方程联立到一起，可解出

$$\pi_u = \frac{\bar{r}_f - d}{\bar{r}_f(u - d)}$$

$$\pi_d = \frac{u - \bar{r}_f}{\bar{r}_f(u - d)}$$

请注意，基本证券现在的市场价格虽然是由债券 A 的状态价格决定的(上面的 u 和 d 实际上是 u_A 和 d_A)，但基本证券除了可以用来复制债券 A 之外，还可以用来复制其他的证券，从而可以用来为别的证券定价。

下面我们用简单的数字例子来加以说明。

假如债券 A 现在的市场价格是 P_A=100 元，r_f=2%，d=0.98，而 u=1.07，见图1.2。

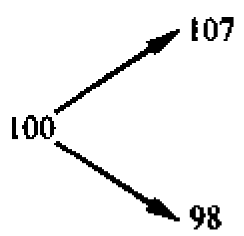


图 1.2

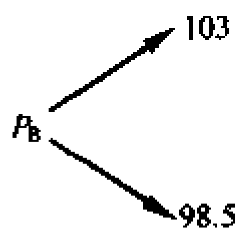


图 1.3

则可算出

$$\pi_u = \frac{1.02 - 0.98}{[1.02 \times (1.07 - 0.98)]} = 0.435730$$

$$\pi_d = \frac{1.07 - 1.02}{[1.02 \times (1.07 - 0.98)]} = 0.544662$$

这两个基本证券可以用来作为债券的定价工具。我们先来对债券 A 定价。债券 A 的价格应当是

$$P_A = \pi_u u P_A + \pi_d d P_A = 0.435730 \times 107 + 0.544662 \times 98 = 100$$

这个结果当然是正确的。

现在假定另外有一个债券 B，它在 1 年后的状态价格如图 1.3。

债券 B 的现在的市场价格应该是

$$P_B = \pi_u u P_B + \pi_d d P_B = 0.435730 \times 103 + 0.544662 \times 98.5 = 98.52941$$

这里，实际上也是用基本证券1和2来复制债券B。做法是购买$uP_B(103)$份基本证券1和$dP_B(98.5)$份基本证券2构成的证券组合在1年后不管发生何种状态，都产生和债券B完全同样的现金流，所以是债券B的复制品。由无套利原理知，复制与被复制证券现在的市场价格应该相等。

此处还是容易产生疑惑。基本证券1的市场价格π_u和基本证券2的市场价格π_d是由债券A的状态价格确定的，为什么还可以用来复制债券B呢？因为基本证券1和2构成了1年后可能出现的2个基本状态的"基"，不管是何种证券，它们1年后的状态价格都可以用这组"基"来表示。这两个"基"彼此之间保持有某种"独立性"（不能用其中一个来表示另一个）。只要保持有这种"独立性"，不管它们目前的市场价格是多少，都可以被用来复制别的证券。建议读者用债券B的状态价格（注意：债券B现在的市场价格是98.52941元，不是100元）再确定一组新的π_u和π_d，检验一下是否可用来复制债券A。然后，检查一下新的π_u和π_d和原来的π_u和π_d是否一样？要真正搞明白其中的原因，请参阅本章的数学附录。如果读者不愿意读数学推导的话，建议至少读一下数学附录最后的结论。

但是，基本证券1和2是假想的证券，不是市场上实际存在的证券。无套利均衡分析的套作必须是能够在市场上实际实现的（至少在理论上）。下面我们用债券A和无风险证券来复制债券B，检验以上所述的用基本证券对债券B的定价是否正确。

我们用Δ份债券A和现在市场价值为L的无风险证券来构筑复制债券B的证券组合。Δ（L也一样）如果为正，表示多头（购买），为负则表示空头（卖空）。复制证券现在的市场价值是

$$I = 100\Delta + L$$

1年后，无论出现何种市场状态，复制证券的市场价值都应该同债券B一样。如果出现上升状态，则有

$$I_u = \Delta \times 107 + L \times 1.02 = 103$$

如果出现下跌状态，则有

$$I_d = \Delta \times 98 + L \times 1.02 = 98.5$$

把这两个方程联立到一起，可解出$\Delta=\frac{1}{2}$和$L=\frac{49.5}{1.02}$，并由此算出债券B现在的市场价值$I=98.52941$。这说明前面用基本证券1和2对债券B的定价是正确的，不然的话，显然可以无风险套利。

决定债券B的未来状态价格的u和d和债券A的u和d是不同的，因此债券B的收益率和风险也都和债券A不同。请注意，在上述的无套利均衡分析中，我们从来没有用到未来各个状态发生的概率q和$1-q$。我们将在以后介绍风险中性假设时再来讨论它们（参见第五章）。现在我们先假设$q=0.5$，可以算出

$$r_A = 2.5\% \qquad r_B = 2.2537\%$$

$$\sigma_A = 0.045 \qquad \sigma_B = 0.0225$$

显然，债券B比债券A的风险小，预期收益率也低，它们的收益和风险是互相匹配的。由于债权A的风险比较大，用债券A和无风险证券的组合来复制债券B时，实际上是用一部分无风险证券来"冲淡"债券A的风险，所以，在复制证券里无风险证券的成份应

该是多头。当然，我们也可以反过来用债券B和无风险证券来复制债券A，这时候，在复制证券里无风险证券的成份应该是空头，来"加浓"债券B的风险。

6. 市场的完全性

在我们以上的讨论中，假设1年后只会出现2种可能的状况，因此只需要2个("独立的")基本证券就可以复制其他的证券。如果会出现3种或3种以上的可能状况呢？显然，只有2个基本证券就不够了。对应于可能出现的状况数，需要有同样数目的("独立的")基本证券才能复制实际的证券。相应地，在实际市场中，只有债券A再加上无风险证券也就不够了，需要有相应数目的"独立的"证券。只有具备足够多的"独立的"证券，才能复制其他的证券或证券组合。而证券或证券组合只有能够被复制，才能通过构筑相反的头寸对冲掉风险，实现完全的套期保值。这就引出了市场的完全性的概念。

市场的完全性可以这样来描述，对于市场可能出现的各种情况，是否具备足够数目的"独立的"的金融工具来进行完全的套期保值，从而转移风险。如果具备足够多的此类金融工具，则市场是完全的，否则是不完全的。

金融工程通过创造新型金融工具来"填补"市场的完全性，从而提高金融市场转移和重新配置收益/风险的能力。金融经济学可以证明，这将提高总的社会效用，增强金融系统抗御总体金融风险的能力。这是创立和发展金融工程的一项基本的意义，具有重要的经济和社会的价值。

至于多阶段的动态完全性的概念，我们以后再介绍。

7. 小结

本章通过介绍MM理论讨论了无套利均衡分析方法。这是现代金融学的基本分析方法。这个方法贯穿于所有有关金融资产的定价理论，广泛地应用于金融工具以及投融资策略和风险管理技术的设计中。

无套利均衡分析的要点在于"复制"。在MM条件的例子中，我们是用公司B的无风险负债和部分权益的组合来复制公司A的全部权益。因此，公司B发行的股票和无风险企业债券可以看作是公司A的股票的"复制品"。

套利从理论上讲应当是无风险的，所以，无风险证券在分析中扮演很重要的角色。另外，在市场容许卖空的条件下，可以同时构筑互相复制的证券的相反头寸实现完全的对冲。因此从理论上讲，套利可以不需要资金的投入。也就是说，套利策略可以是"自融资"的。无风险和自融资，这两点对于理解无套利均衡分析来说是非常重要的。虽然随着理论的发展，后来的研究表明自融资这一点对于复制技术(无套利均衡分析)来说不是必须的。但有了自融资这一条件，分析起来就会容易得多，便于初学者的理解。

在我们的理论分析中，没有考虑交易成本的问题。由于在实际的市场交易中，存在买进卖出差价、手续费等交易费用，这些市场的磨擦因素滞阻了市场的套利行为。即使两项金融资产是完全互相复制的(即它们未来的收入现金流是完全相同的)而存在市场价格的差异，如果这种价格差异小于套利需要缴纳的买进卖出差价和手续费等交易费用，套利实际上就不是可行的。市场的此类磨擦因素越大，市场对套利的反应就越不敏感。

在本章的分析中，一开始构筑起复制证券的头寸(如公司B的负债和权益的匹配比例)，以后产生的现金流就能始终完全地实现对冲，即在市场出现任何状况时都能对冲，这是静态的无套利均衡分析。但对于有的情况(如对与或有要求权有关的衍生证券(如期权)的复制)，问题不是那么简单。需要在过程中对复制证券组合内部的头寸进行调整，才能与被复制证券的现金流对冲，这就是动态无套利均衡分析。除了对衍生证券的定价外，动态无套利均衡分析方法在动态投资和套期保值策略的设计中都非常重要。我们将在后面的章节再讨论。

练习题

1. 一家公司的每年利税前收益(*EBIT*)是1 000万元、有无风险负债4 000万元，利率是8%，所得税税率是33%，流通在外的股票共100万股，权益资本成本为11.33%。现在公司决定增发股票来减少1 000万元负债，问应增发多少股股票？

2. 某公司生产一种产品，其一年后的价格在经济繁荣的情况下为20元，在经济萧条的情况下为10元。若该公司生产375万件该产品，则不需要任何成本；若该公司再投入15 000万元，则可多生产1 500万件该产品。已知$r_f=5\%$，某交易商愿以15元的远期价格提供收购所有这种产品的一年期远期合同。该公司的所得税率为20%。试求该公司的税后价值。若该公司目前为全股权公司，流通中的普通股数为100万，该公司现在想发行4 000万元的无风险负债来回购价值4 000万元的股票，应回购多少股票？

第一章数学附录

状态价格的涵义

利用矩阵代数的知识，我们就可以证明，由债券 B 导出的新的 π_u 和 π_d 和原来由债券 A 导出的 π_u 和 π_d 是一样的。为了清楚起见，我们记相应于债券 B 的市场变化参数为 u^* 和 d^*，基本证券的价格为 π_u^* 和 π_d^*。

由债券 A 导出 π_u 和 π_d 时，有

$$\begin{cases}\pi_u uP_A + \pi_d dP_A = P_A \\ \pi_u + \pi_d = \dfrac{1}{r_f}\end{cases}$$

写成矩阵形式，就有

$$[\pi_u \quad \pi_d]\begin{bmatrix}uP_A & 1\\ dP_A & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_A & \dfrac{1}{r_f}\end{bmatrix}$$

亦即

$$[\pi_u \quad \pi_d] = \begin{bmatrix}P_A & \dfrac{1}{r_f}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}uP_A & 1\\ dP_A & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

用 π_u 和 π_d 为债券 B 定价时，有

$$\begin{bmatrix}P_B & \dfrac{1}{r_f}\end{bmatrix} = [\pi_u \quad \pi_d]\begin{bmatrix}u^*P_B & 1\\ d^*P_B & 1\end{bmatrix}$$

由债券 B 导出 π_u^* 和 π_d^* 时，有

$$[\pi_u^* \quad \pi_d^*]\begin{bmatrix}u^*P_B & 1\\ d^*P_B & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_B & \dfrac{1}{r_f}\end{bmatrix}$$

于是有

$$[\pi_u^* \quad \pi_d^*] = \begin{bmatrix}P_B & \dfrac{1}{r_f}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^*P_B & 1\\ d^*P_B & 1\end{bmatrix}^{-1} = [\pi_u \quad \pi_d]\begin{bmatrix}u^*P_B & 1\\ d^*P_B & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^*P_B & 1\\ d^*P_B & 1\end{bmatrix}^{-1} = [\pi_u \quad \pi_d]$$

由此得到证明。

所以，对于一个 1 年后出现两种状态的市场，它的两个基本证券是唯一确定的。反过来，也可以说，两个基本证券唯一地确定了这个市场。刻画在这个市场里的证券价格变化的参数 u 和 d 必满足以下方程组：

$$\begin{cases}\pi_u u + \pi_d d = 1 \\ \pi_u + \pi_d = \dfrac{1}{r_f}\end{cases}$$

反之，凡满足以上方程组的 u 和 d 所描绘的一定是在这个市场里的证券价格的变化。两组不同的$[\pi_u \quad \pi_d]$则刻画了两个不同的市场。

第二章　利率的期限结构

在度量资产的市场价值(现值)时,我们采用折现现金流公式

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

但这里实际上蕴涵着一个假设:对于时期 $t=1,2,\cdots,n$ 来说,对这项资产的预期收益率即购置它的资本成本始终是一样的,都是 r。这与实际情况不相符合。因为市场的环境是在不断变化的(通货膨胀率、人们对消费的时间偏好和整个市场对待风险的态度等等,都会随经济形势的变化而变化),从而对同一项资产所要求的预期收益率也会随时间而变化。所以,资产估值的折现现金流公式应当是

$$PV = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r_n)^n}$$

这里我们假定现金流发生的时间间隔都是 1 年。

资产的市场均衡价格应当是

$$P_0 = PV = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r_n)^n}$$

如果这项资产的(总的)预期收益率是 r,就应这样理解:

$$NPV = -P_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t} = 0$$

即是这项资产的内部收益率。于是有

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t} = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r_n)^n}$$

所以,r 可以看作 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的某种"平均"。

1. 利率的确定

利率可以简单地看作是"租用"资金的价格。在金融市场上,利率水平的高低受到四个基本因素的影响:

1) *资本货物的生产能力*　资本货物是经济中用于生产其他货物的货物,如矿山、道路、水渠、牧场、发电站、工厂、机器设备、库存品,等等。资本货物的生产能力是以其每年生产出的价值占资本货物本身价值的百分比来度量的,即以资本的收益率来度量。资本的收益是股票、债券及其他所有金融工具收益的根本来源。资本的预期收益的大小受制于技术进步的状况和其他的一些资源因素(如自然资源、劳动)和市场对资本所生产的货物和服务的需求情况。但这些都会随时间和地点的不同而变化。对资本的预期收益越高,市场的利率水平就越高,否则反之。

2）*资本货物生产能力的不确定性* 资本的收益总是因为环境和资本货物本身性质的变化而带有不确定性。因为金融市场的理性参与者都具有厌恶风险的倾向，所以这种不确定性越大，市场的理性参与者在接受风险时所要求的风险补偿就越大，市场的利率水平就越高，否则反之。

3）*消费的时间偏好* 任何人进行储蓄/投资都是牺牲目前的消费来换取将来的消费，因此人们也就有消费的时间偏好。经济学认为人们看重于现在的消费甚于将来的消费（至少将来可能死亡而享受不到消费），因此反映资本收益的利率应当始终为正。人们对现在消费的偏好越强，对推迟消费所要求的补偿就越大，市场的利率水平就越高，否则反之。

4）*风险厌恶程度* 理性的市场参与者总是厌恶风险的。金融市场提供了这样一种机制，市场的参与者如果想投资于没有风险的资产，他们就必须放弃部分收益，而接受风险的市场参与者将因此获得风险补偿。整个市场对风险的厌恶越厉害，接受风险者所要求的风险补偿就越大，市场的无风险利率也就越低。

因为在金融市场中资金的转移是通过交易各种*金融商品*（如股票、债券等）来实现的，作为租用资金的价格的利率是由债权型金融商品的*到期收益率*（*YTM*-yield to maturity）来度量的。各种不同的债权型金融商品带有不同的风险特性，对它们所要求的风险补偿各不相同，即有不同的利率。于是需要有一类利率作为基准，这就是*无风险利率*。为什么说是一类而不是一个无风险利率？因为上述四个因素都会随着时间而变化，所以无风险利率会因期限的不同而不同。这就是无风险利率的*期限结构*。

由于通货膨胀的缘故，商品和服务的价格会发生变化。要对价格进行正确的比较，必须考虑通货膨胀的影响。利率是租用资金的价格，当然也要受到通货膨胀的影响，因为通货膨胀影响到货币资金的实际购买力。在市场上表现的利率是包含有通货膨胀的影响在内的，所以是*名义利率*。在扣除通货膨胀影响以后的利率是*真实利率*。假如你现在投资100元，一年后可以收回108元。但现在价格为100元的一篮子消费品一年后的价格上升至105元，108元能买回多少消费品呢？应该是108元÷105元/篮子＝1.02857篮子。所以真实的投资收益率是2.857%。

名义利率和真实利率的关系应当是

$$1+\text{真实利率}=\frac{1+\text{名义利率}}{1+\text{通货膨胀率}}$$

略去高阶小量后，可以得到

$$\textit{名义利率}=\textit{真实利率}+\textit{通货膨胀率}$$

这就是费雪效应，是美国经济学家欧文·费雪（Irving Fisher）最早在1930年提出的。请注意，有风险资产的真实利率（到期收益率）是包含风险补偿在内的。所以可以进一步把在市场表现的（名义）利率分解成三个部分：

$$\textit{名义利率}=\textit{资金的纯时间价值}+\textit{通货膨胀率}+\textit{风险补偿}$$

前二者的和（资金的纯时间价值＋通货膨胀率）就构成无风险利率，也就是为了投资于有风险资产而放弃投资于无风险资产的机会成本。这里我们让通货膨胀率包含在无风险利率里，是为了更贴近实际（如以国库券的收益率表示无风险利率，是包含有通货膨胀率在内的）。严格地说，无风险利率应该是资金的纯时间价值。

一般金融商品如果期间有利息发生，如果到期再变现，就有将利息滚入本金计算复利的问题。计算复利就有计息周期的问题。可以1年计算1次复利，也可以半年计算1次，更可以按月计息、按周计息、按日计息，甚至分分秒秒计息。分分秒秒计息算得的复利就是连续复利。不过有一点要记住，不管计息周期是多长，复利指的都是年率。读者请仔细看下面的计息算法，不要把计息周期和以年作为计算复利的时间单位这两件事弄混淆了。

以 r 记金融商品按年计息的复利率，如果在1年中计息 m 次，$r_{1/m}$ 是 m 次计息的复利率，则有关系式

$$r = \left(1 + \frac{r_{1/m}}{m}\right)^m - 1$$

当 $m \to \infty$ 时，就得到连续复利率 r^*，有

$$r = \lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{r^*}{m}\right)^m - 1 = e^{r^*} - 1$$

即有

$$r^* = \ln(1 + r)$$

这就是连续复利率 r^* 和以年计息的复利率 r 二者之间的换算关系。连续复利对于金融学理论研究来说很重要。而以年计息的复利率 r 在实际的市场交易中是非常有用的，称之为*有效年收益率*。以后，在不发生混淆时，我们就用 r 记连续复利率，不再加上星号（*）。在会发生混淆时，则用 r^* 加以区别。

2. 金融风险和无风险证券

存在以下基本类型的金融风险：

1) *违约风险*　即倒账风险，指债务人不能按期还本付息的风险。其他类型风险所产生的损失都有可能引发违约风险，而违约风险具有滚雪球式的连锁反应的危险性。如果一家企业因买方违约而收不回一笔销售应收款，因此发生资金周转困难而不能采购急需的零配件的话，就会打乱整个生产经营秩序。于是，这家企业将不能支付它的原材料、能源等应付款，违约风险就会像瘟疫一样地传播开来。在金融市场上则更是如此，一笔资金被套牢而发生违约，会顺着债务链迅速地具有放大效应地扩散开来，有可能导致危及整个金融系统的总体金融风险。

2) *流动性风险*　狭义的流动性是指资产即时、低成本地转变成现金的能力，广义的流动性则指个人或机构即时、低成本地获取现金（包括出售资产或借贷）的能力。对于金融资产来说，流动性是极其重要的特性。金融资产的流动性的好坏是与交易此类资产的二级市场的发达程度有关的。二级市场越发达，流动性就越好。在其他条件不变时，投资者倾向于流动性好的资产甚于流动性差的资产。金融工程产品设计的一大任务是转变金融资产的流动性。

3) *购买力风险*　即通货膨胀的影响，是由费雪效应来表现的。

4) *利率风险*　由于未预见到的市场利率水平的变化而使资产的收益发生变化，这种风险被称为利率风险。由可以预见到的利率变化所造成的资产收益的风险，则已经表现在（无风险）利率的期限结构里。

5) *汇率风险*　汇率是货币之间的比价。由未预见到的汇率变化所造成的资产收益发生变化，这种风险被称为汇率风险。和利率风险一样，汇率风险是指未预见到的变化。市

场预见到的汇率变化表现在远期汇率、外汇掉期等外汇金融商品的市场价格里。

6）其他的市场风险　由政治的、法律的、财政的、行业的以及其他国内外诸多因素影响整个金融市场而产生的风险都被归入这一类。特别需要指出的是，某一类商品价格的未预见到的变化会引起金融市场的波动，从而造成很大的金融风险，甚至对整个经济造成严重影响。石油危机产生的原油价格波动就是一个典型的例子。

利率风险、汇率风险和商品价格风险的转移、配置和管理是金融工程技术最可发挥作用之处，而违约风险则是防范金融风险最为关注的问题。

无套利均衡分析需要构筑起无风险的对冲头寸。因此，在采用复制技术时，至少从理论上讲，无风险证券起到特殊的（也往往是必要的）作用。从而在实际的金融市场中，需要有一类证券能起无风险证券的作用。在实践中，采用短期国库券作为无风险证券。

短期国库券是政府发行的短期债务，因而被认为是没有违约风险的。在西欧和北美，交易国库券的二级市场非常发达，所以也被认为是没有流动性风险的。西方国家中央银行采用短期国库券的公开市场交易作为调控货币供给的政策工具之一，从而也可认为不受其他市场风险的影响。但是在国库券的利率（收益率）中，依然含有通货膨胀的影响和利率、汇率的未预期波动的风险。采用短期国库券作为完全无风险证券，当然只是近似。

3. 国库券的收益曲线

市场的无风险利率的期限结构是以国库券的收益曲线（treasury yield curve）来表示的（见图 2.1，选自 1999 年 6 月 25 日《华尔街日报》），收益曲线表示出国库券的收益率和到期期限之间的关系。

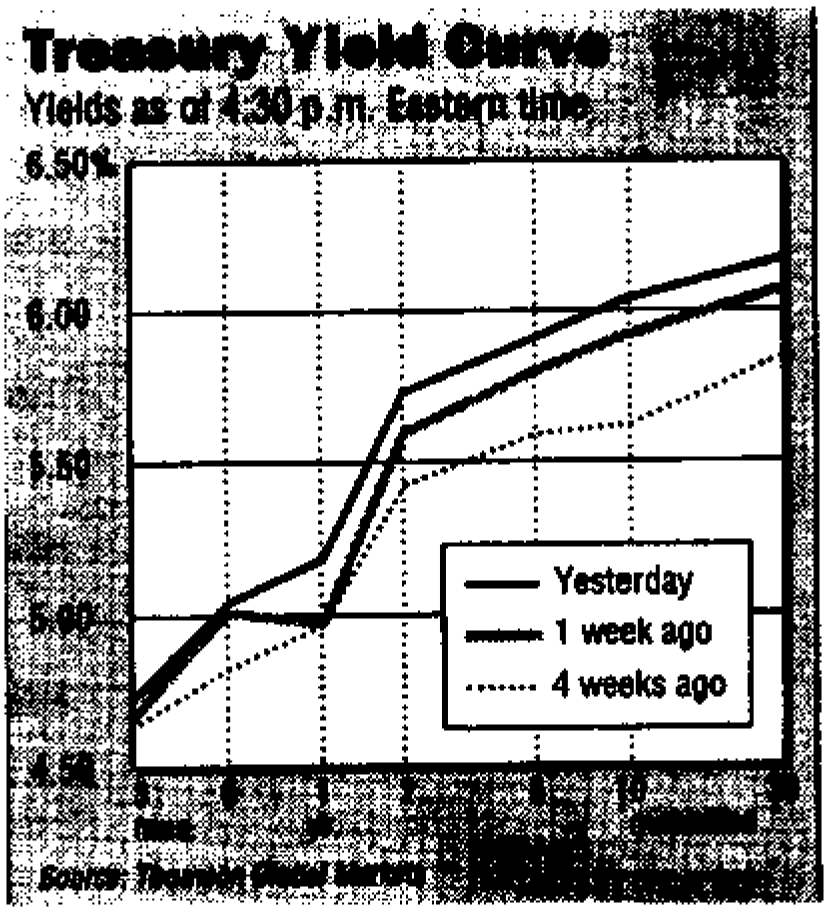


图 2.1

国库券的收益曲线大体上有上翘、平坦和下垂三种形态，有时也会出现一些复杂的形状，比如先上翘后下垂。上翘表明期限长的国库券的收益率高于期限短的国库券的收益

率，下垂则反之。而平坦的国库券收益曲线表明当时不同期限的国库券的收益率是相同的。上翘的形态被认为是正常的，其他形态被看作是不正常的。有一些理论被用来解释收益曲线的形态，其中比较为人们接受的是优先置产理论(preferred habitat theory)，我们在后文再介绍。

短期(期限为1年和1年以内的)国库券通常是折现债券，市场价格低于面值，到期前不配付利息，到期时按面值赎回。如一份3月期国库券的面值是1 000元，现在的市场价格是985元，则到期收益率应为

$$985\text{ 元} = \frac{1\,000\text{ 元}}{1+\frac{3}{12}r}$$

由此算出$r=6.10\%$。中长期国库券通常是带息票债券。息票即利息票，原来是附在债券上的一些小票，按期撕下来作为领取利息的凭证。现在，所有在到期日前按期配付固定利息的债券都可称为带息票债券。

以Par记带息票债券的面值，i为息票利率，为叙述简单起见，假定利息按年支付，则每年支付的利息是$Par\times i$，债券的期限为n年，期末偿还本金，目前的市场价格为P_0。带息票债券的收益率r由下式算出

$$NPV = -P_0 + \sum_{t=1}^{n}\frac{Par\times i}{(1+r)^t} + \frac{Par}{(1+r)^n} = 0$$

如果$i=r$，则可推算出$P_0=Par$，债券是所谓的平价债券；若$i>r$，则$P_0>Par$，债券是溢价债券；若$i<r$，则$P_0<Par$，债券是折价债券。

带息票债券与折现债券相比较，因为在到期前有利息现金流入，所以有一个再投资问题，也就有再投资风险的问题。国库券虽然被认为是无风险证券，利息现金流入可以再按无风险利率投资，但未来的无风险利率仅仅是市场的预期，而再投资的利率风险是未能预期到的，即使是国库券，也不能完全免除。因此，虽然中长期国库券是带息票债券，它们在收益曲线上表示的收益率，实际上相当于换算成折现债券后计算出的收益率，即所谓零息票利率(zero-coupon rate)，亦即本章开头所示的$r_t, t=1,\cdots,n$。请注意，零息票利率都是即期利率(spot rates)。零息票利率集$\{r_t, t=1,\cdots,n\}$对于金融产品的设计来说是非常有用的。

下面我们用一个简单的例子说明如何从带息票债券(中长期国库券)的市场价格信息来换算零息票利率。

例 假如1年期短期国库券(折现型)的面值是1 000元，现在市场的均衡价格是910.50，则可算得

$$r_1 = \frac{1\,000-910.50}{910.50} = 9.83\%$$

2年期的国库券第1年年底付息100元，第2年年底还本付息1 100元，现在的市场均衡价格为982.10，可以用下式来推算r_2：

$$982.10 = \frac{100}{1+9.83\%} + \frac{1\,100}{(1+r_2)^2}$$

由此算得$r_2=11.08\%$。如果有3年期的国库券的市场价格信息，则可依此类推算出r_3。有

一些到期年限的国库券在市场上不存在，则可用插值法进行计算(参见下一节)。

表 2.1 和表 2.2 分别是《华尔街日报》上刊载的美国国债的报价，可以利用这样的报价数据来换算零息票利率集。

表 2.1 是中、长期国库券的报价。左起第 1 列是息票利率。第 2 列是到期月/年，年份用公元纪年的后两个数字表示，如 Jan 00 表示的是 2000 年 1 月。如果在年份后面有一个

表 2.1

TREASURY BONDS, NOTES & BILLS

Monday, June 28, 1999

Representative Over-the-Counter quotations based on transactions of $1 million or more.

Treasury bond, note and bill quotes are as of mid-afternoon. Colons in bid-and-asked quotes represent 32nds; 101:01 means 101 1/32. Net changes in 32nds. n-Treasury note. Treasury bill quotes in hundredths, quoted on terms of a rate of discount. Days to maturity calculated from settlement date. All yields are to maturity and based on the asked quote. Latest 13-week and 26-week bills are boldfaced. For bonds callable prior to maturity, yields are computed to the earliest call date for issues quoted above par and to the maturity date for issues below par. *-When issued.

Source: Federal Reserve Bank of New York.

U.S. Treasury strips as of 3 p.m. Eastern time, also based on transactions of $1 million or more. Colons in bid-and-asked quotes represent 32nds; 99:01 means 99 1/32. Net changes in 32nds. Yields calculated on the asked quotation. ci-stripped coupon interest. bp-Treasury bond, stripped principal. np-Treasury note, stripped principal. For bonds callable prior to maturity, yields are computed to the earliest call date for issues quoted above par and to the maturity date for issues below par.

Source: Bear, Stearns & Co. via Street Software Technology Inc.

GOVT. BONDS & NOTES

Rate	Maturity Mo/Yr	Bid	Asked	Chg.	Ask Yld.
6 3/8	Jan 00n	100:19	100:21	....	5.13
5 3/8	Jan 00n	100:04	100:06	....	5.04
7 3/4	Jan 00n	101:15	101:17	....	5.06
5 3/8	Feb 00n	100:11	100:13	....	5.20
8 1/2	Feb 00n	101:31	102:01	-1	5.16
5 1/4	Feb 00n	100:05	100:07	....	5.15
7 1/8	Feb 00n	101:06	101:08	-1	5.19
5 1/2	Mar 00n	100:04	100:06	....	5.23
6 7/8	Mar 00n	101:04	101:06	....	5.23
5 1/2	Apr 00n	100:03	100:05	....	5.29
5 5/8	Apr 00n	100:06	100:08	....	5.31
6 3/4	Apr 00n	101:03	101:05	....	5.31
6 3/8	May 00n	100:26	100:28	....	5.33
8 7/8	May 00n	103:00	103:02	....	5.25
5 1/2	May 00n	100:03	100:05	+ 1	5.32
6 1/4	May 00n	100:24	100:26	....	5.33
5 3/8	Jun 00n	99:31	100:01	+ 1	5.34
5 7/8	Jun 00n	100:14	100:16	....	5.36
5 3/8	Jul 00n	99:28	99:30	....	5.43
6 1/8	Jul 00n	100:21	100:23	....	5.43
6	Aug 00n	100:17	100:19	+ 1	5.45
8 3/4	Aug 00n	103:16	103:18	....	5.45
5 1/8	Aug 00n	99:17	99:19	....	5.48
6 1/4	Aug 00n	100:25	100:27	....	5.49
4 1/2	Sep 00n	98:23	98:25	+ 1	5.51
6 1/8	Sep 00n	100:21	100:23	+ 1	5.52
4	Oct 00n	97:31	98:01	....	5.54
5 3/4	Oct 00n	100:06	100:08	....	5.55
5 3/4	Nov 00n	100:06	100:08	+ 1	5.55
8 1/2	Nov 00n	103:26	103:28	....	5.53
4 5/8	Nov 00n	98:22	98:24	+ 1	5.55
5 5/8	Nov 00n	100:00	100:02	-1	5.57
4 5/8	Dec 00n	98:18	98:20	+ 1	5.59
5 1/2	Dec 00n	99:26	99:28	+ 1	5.59
4 1/2	Jan 01n	98:09	98:11	+ 1	5.60
5 1/4	Jan 01n	99:13	99:15	+ 1	5.60
5 3/8	Feb 01n	99:18	99:20	+ 1	5.61
7 3/4	Feb 01n	103:07	103:09	+ 1	5.61
11 3/4	Feb 01	109:11	109:13	....	5.63
5	Feb 01n	98:31	99:01	+ 1	5.61
5 5/8	Feb 01n	99:31	100:01	+ 1	5.60
4 7/8	Mar 01n	98:21	98:23	+ 1	5.65
6 3/8	Mar 01n	101:04	101:06	+ 1	5.65

Rate	Maturity Mo/Yr	Bid	Asked	Chg.	Ask Yld.
10 3/8	Nov 07-12	126:08	126:14	+ 14	6.27
12	Aug 08-13	139:03	139:09	+ 15	6.28
13 1/4	May 09-14	150:12	150:18	+ 18	6.30
12 1/2	Aug 09-14	145:22	145:28	+ 17	6.30
11 3/4	Nov 09-14	140:31	141:05	+ 17	6.29
11 1/4	Feb 15	147:21	147:27	+ 22	6.37
10 5/8	Aug 15	141:28	142:02	+ 23	6.40
9 7/8	Nov 15	134:20	134:26	+ 22	6.41
9 1/4	Feb 16	128:14	128:20	+ 20	6.42
7 1/4	May 16	108:15	108:17	+ 19	6.41
7 1/2	Nov 16	111:02	111:06	+ 19	6.42
8 3/4	May 17	124:10	124:16	+ 21	6.42
8 7/8	Aug 17	125:26	126:00	+ 21	6.43
9 1/8	May 18	129:02	129:08	+ 22	6.43
9	Nov 18	128:02	128:08	+ 22	6.43
8 7/8	Feb 19	126:27	127:01	+ 21	6.43
8 1/8	Aug 19	118:28	119:00	+ 21	6.43
8 1/2	Feb 20	123:09	123:15	+ 21	6.43
8 3/4	May 20	126:10	126:16	+ 22	6.43
8 3/4	Aug 20	126:15	126:21	+ 22	6.43
7 7/8	Feb 21	116:22	116:26	+ 21	6.43
8 1/8	May 21	119:23	119:27	+ 22	6.42
8 1/8	Aug 21	119:26	119:30	+ 22	6.42
8	Nov 21	118:14	118:20	+ 22	6.42
7 1/4	Aug 22	110:00	110:02	+ 20	6.41
7 5/8	Nov 22	114:18	114:22	+ 21	6.40
7 1/8	Feb 23	108:26	108:28	+ 20	6.39
6 1/4	Aug 23	98:18	98:20	+ 19	6.36
7 1/2	Nov 24	113:31	114:03	+ 22	6.37
7 5/8	Feb 25	115:21	115:25	+ 22	6.37
6 7/8	Aug 25	106:11	106:13	+ 22	6.37
6	Feb 26	95:22	95:24	+ 20	6.33
6 3/4	Aug 26	105:00	105:02	+ 22	6.36
6 1/2	Nov 26	101:27	101:29	+ 21	6.35
6 5/8	Feb 27	103:18	103:20	+ 22	6.34
6 3/8	Aug 27	100:15	100:17	+ 21	6.33
6 1/8	Nov 27	97:14	97:16	+ 21	6.31
3 5/8	Apr 28i	94:11	94:12	....	3.95
5 1/2	Aug 28	89:24	89:26	+ 20	6.26
5 1/4	Nov 28	87:02	87:03	+ 22	6.21
5 1/4	Feb 29	88:11	88:12	+ 19	6.10
3 7/8	Apr 29i	98:22	98:23	....	3.95

字母 n，则表示是中期国库券(treasury notes)。如果到期年份有两个数字，如右边第 1 项报价 Nov. 07-12，表示的是可赎回债券(callable)。07-12 表示 2012 年到期，从 2007 年开始可以赎买。关于可赎回债券的知识将在后面第八章讲解。第 3 列和第 4 列分别是当天收盘时的买进价(bid)和卖出价(asked)。注意，对于中长期债券来说，报价单位是 1/32，如 101：01 表示的实际上是 101 1/32(第 1 列息票利率报价单位也是 1/32，但直接用分数表示)。第 5 列表示的是当天的收盘价(卖出价)与前一天的收盘价之间的净变化。最后一列(第 6 列)则是按卖出价计算的到期收益率。可赎回债券的收益率的计算比较复杂，建议有兴趣的读者在学习第八章后再回过来阅读表 2.1 头上的英文说明。

表 2.2

TREASURY BILLS						TREASURY BILLS					
Maturity	Days to Mat.	Bid	Asked	Chg.	Ask Yld.	Maturity	Days to Mat.	Bid	Asked	Chg.	Ask Yld.
Jul 01 '99	2	3.31	3.23	−0.15	3.28	Oct 21 '99	114	4.68	4.66	+0.01	4.80
Jul 08 '99	9	4.05	3.97	−0.03	4.03	Oct 28 '99	121	4.67	4.65	+0.01	4.79
Jul 15 '99	16	3.70	3.62	−0.50	3.68	Nov 04 '99	128	4.73	4.71	+0.01	4.86
Jul 22 '99	23	4.30	4.22	−0.06	4.29	Nov 12 '99	136	4.78	4.76	−0.01	4.91
Jul 29 '99	30	4.26	4.22	−0.06	4.29	Nov 18 '99	142	4.79	4.77	....	4.93
Aug 05 '99	37	4.35	4.31	−0.02	4.39	Nov 26 '99	150	4.80	4.78	....	4.94
Aug 12 '99	44	4.42	4.38	+0.03	4.46	Dec 02 '99	156	4.82	4.80	−0.01	4.97
Aug 19 '99	51	4.47	4.43	+0.02	4.52	Dec 09 '99	163	4.84	4.82	+0.01	5.00
Aug 26 '99	58	4.37	4.33	−0.01	4.42	Dec 16 '99	170	4.84	4.82	+0.01	5.00
Sep 02 '99	65	4.55	4.53	+0.01	4.63	Dec 23 '99	177	4.86	4.85	+0.01	5.04
Sep 09 '99	72	4.60	4.58	+0.03	4.69	Dec 30 '99	184	4.93	4.92	+0.02	5.12
Sep 16 '99	79	4.66	4.64	+0.01	4.75	Jan 06 '00	191	4.72	4.70	+0.04	4.88
Sep 23 '99	86	4.66	4.65	....	4.77	Feb 03 '00	219	4.62	4.60	+0.02	4.78
Sep 30 '99	93	4.67	4.65	+0.01	4.77	Mar 02 '00	247	4.68	4.66	−0.01	4.85
Sep 30 '99	93	4.75	4.74	+0.08	4.87	Mar 30 '00	275	4.73	4.71	....	4.91
Oct 07 '99	100	4.67	4.65	....	4.78	Apr 27 '00	300	4.73	4.71	−0.03	4.92
Oct 14 '99	107	4.68	4.66	+0.01	4.79	May 25 '00	331	4.78	4.76	−0.02	4.99
						Jun 22 '00	359	4.89	4.88	−0.01	5.14

表 2.2 是短期国库券的报价。短期国库券是折现型债券，用百分数报价，报出的是所谓“银行折现率”，银行折现率的计算公式是

$$d = \frac{Par - P_0}{Par} \times \frac{360}{n}$$

其中 Par 是面值，P_0 是市价，n 是距到期日的天数。注意，银行折现率 1 年按 360 天计算。

4. 折现因子

由零息票利率集可以换算出无风险利率的折现因子。如 FV_t 表示 t 时间后发生的现金流的未来值，PV_t 表示 FV_t 用无风险利率折现的现值，则有

$$PV_t = v_t FV_t$$

其中 v_t 就是折现因子。

所有的折现因子都可以由零息票利率集算出。因为零息票利率是以年利率的形式给出的，所以有

若 $t \leqslant 1$ 年，则 $$v_t = \frac{1}{1 + r_t t};$$

若 $t > 1$ 年，则 $$v_t = \frac{1}{(1 + r_t)^t}$$

这里 t 以带十进制小数的实数（以 1 年为单位）表示。

因为不同期限的国库券的品种是有限的，因此，由国库券在市场中的实际收益率只能测算出收益曲线上有限的几个点，即只有有限几个 r_t 可以从市场的实际价格获得。对于其他的时间期限 t，折现因子可以利用下述的指数插值法获得：

$$v_t = v_1^{\left[\frac{t}{t_1}\left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\right)\right]} v_2^{\left[\frac{t}{t_2}\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right]}$$

其中

v_1 是期限为 t_1 的折现因子；

v_2 是期限为 t_2 的折现因子；

v_t 是期限为 t 的折现因子，t 介于 t_1 和 t_2 之间。

例如现在是 4 月 21 日，3 个月后是 7 月 21 日（91 天后），6 个月后是 10 月 21 日（183 天后）。3 月期的零息票利率是 9.50%，6 月期的零息票利率是 9.75%。计息的日期计算方法是“实际日期/360 天”，所以相应的折现因子的值分别是 0.976549 和 0.952778。现在我们来计算 8 月 23 日（124 天后）的折现因子。直接由上式可算出

$$v_t = 0.976549^{\left[\frac{124}{91}\left(\frac{183-124}{183-91}\right)\right]} 0.952778^{\left[\frac{124}{183}\left(\frac{124-91}{183-91}\right)\right]} = 0.968028$$

如果需要插值计算的时间期限比期限最短（期限最长）的国库券的期限还要短（长），则采用以下插值公式

$$v_t = v_\tau^{\frac{t}{\tau}}$$

其中 τ 指已知的国库券的最短（长）的期限。

5. 远期利率

远期利率是资金的远期价格，与其他商品的远期价格有类似的特性，所以我们先讨论一般的远期价格。对于一种商品的交易来说，如果买卖双方现在订约，在将来某个指定的时间按预定的价格交割预定数量（并指明规格和质量要求）的商品，这样的交易称为远期交易，预定的价格称为远期价格。

远期价格就是未来的交割价格。在订立远期合约时，买卖双方都不用支付，合约的面值则是合约预订的数量乘以远期价格。显然，在合约中同意买进的一方称为远期合约的多头，同意卖出的一方则称为空头。

到到期日（即交割日）时，如果当时市场的（即期）价格高于合约的远期价格，则多头获利而空头亏损；如果当时市场的（即期）价格低于合约的远期价格，则反之。它们的盈亏状况图如图 2.2。

现在我们来讨论远期价格的定价问题。

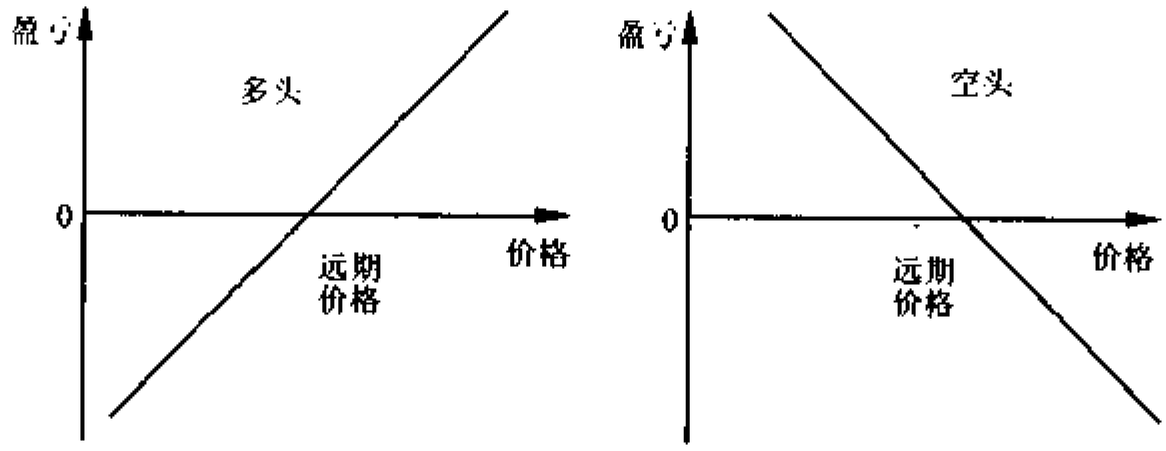


图 2.2

假定有一股票，准备持有 1 年，期间不分红，到期出售可获得资本收益（即买进卖出的差价），该股票的预期收益率（年率）是 15%，目前的市场价格是 $S_0=100$ 元。如果现在来订立买卖这种股票的 1 年期远期合约，远期价格为 F，F 的大小应该是多少？

如果简单地认为远期价格是 100 元×（1+15%）=115 元，那就错了！必须严格地采用无套利均衡分析方法来估值和定价。我们这样来“复制”这份股票的头寸：

假想购买 1 份到期面值就等于 F 的无风险折现债券，同时建立这份股票的远期多头。到期时兑现债券得到数额为 F 的现金用来履行远期合约买入股票。如果再出售股票的话可以获得完全一样的收入现金流。因为（无风险债券＋股票远期多头）完全复制了持有股票的未来现金流，所以复制证券和被复制证券二者现在应当具有相同的市场价值，否则将出现无风险套利机会。因此无风险债券现在的市场价格也应该是 $S_0=100$ 元。如果无风险债券的利率是 r_f，则应有

$$S_0 = \frac{F}{1 + r_f}$$

即有

$$F = S_0(1 + r_f)$$

如果 $r=5\%$，则远期价格应为 100 元×（1+5%）=105 元。

这里很容易产生疑惑，市场预期 1 年后股票的价格应当是 115 元，而远期价格却只有 105 元。这是怎么回事呢？

1 年后在市场上股票的实际价格可能会高于或低于 115 元，115 元仅仅是数学期望值，股票的收益率是有风险的。一位投资者如果购买复制证券（无风险债券＋远期多头），到时候可以以 105 元的远期价格买进股票，但此时股票的市场价格通常不会是 105 元，而是 S_1（其预期是 115 元），所以投资者将得到 115 元－105 元＝10 元的预期风险补偿。原来投资于无风险债券有 5 元的无风险收益，总的预期收益将是 5 元＋10 元＝15 元。所以，投资于复制证券的预期收益率也是 15%。

为了看得更为清楚起见，我们按照无套利均衡分析方法再做一数量化的分析：

假如远期价格不是 105 元，例如是 106 元＞105 元，则同时建立股票的多头（出售股票）和复制证券的空头（这意味着卖空无风险债券同时出售远期合约），就获得套利机会。现金流情况如下：

表 2.3

套利头寸	即时现金流	一年后现金流
卖空无风险债券	+100 元	−105 元
出售远期合约	0	106 元 $-S_1$
购买 1 份股票	−100 元	S_1
净现金流	0	1 元

这样就能无风险地套取利润。

由此我们得到重要的结论：

> **对于有风险资产而言，远期价格不是未来即期价格的市场预期。**

但是，对于无风险资产来说，远期价格确实是未来即期价格的市场预期。这一点可以从以上的无套利均衡分析清楚地看出。远期利率是针对无风险证券（如国库券）的，所以确实是未来市场的无风险利率的预期。远期利率是指远期无风险利率，这一点一定要记住！

为了搞清楚远期利率的期限，我们定义如下记号：

${}_if_j$ 表示从第 i 段单位时间（例如单位时间可取为年、季、月等）期初开始到第 j 段时间期初结束这段时期的远期利率，远期利率当然仍然都表示为年率。我们看图 2.3 所示的时间轴（开始第 1 段时间称为第 0 年）。

图 2.3

例如，${}_1f_2$ 表示第 1 段单位时间（从第 1 段单位时间期初开始到第 2 段单位时间期初结束这段时间期间）的远期利率，${}_1f_3$ 表示从第 1 段单位时间期初开始到第 3 段单位时间期初结束这段时间期间的远期利率，而${}_2f_3$ 则表示第 2 段单位时间（从第 2 段单位时间期初开始到第 3 段单位时间期初结束这段时间期间）的远期利率。显然必须有 $i>0$（0 指现在时刻），不然变成了即期利率而不是远期利率了。

和即期利率一样，如果在第 j 段单位时间中，要计算时间间隔 t 短于 1 年的远期利率的实际收益率，就应该是 $(1+{}_{j-1}f_j\times t)-1={}_{j-1}f_j\times t$，如果时间间隔 t 是从第 i 段单位时间期初开始到第 j 段单位时间期初结束而又长于 1 年的话，则该段期间的远期利率的实际收益率是 $(1+{}_if_j)^t-1$。

前面指出过，零息票利率集是不同期限的即期无风险利率的集合。零息票利率和远期利率之间存在互相蕴涵的关系，下面我们来讨论这种关系。

假如一位投资者准备进行为期 2 年的无风险投资，他可以有多种不同的投资方法。我们先来看这样两种不同的投资策略。其一是直接购买 2 年期的国库券，其二是先购买 1 年期的国库券，同时按照市场的远期价格购买从第二年年初起的 1 年期国库券。为了分析简

单起见，假定所有的国库券都不带息票。

采用第一种投资策略，现在每1元钱的投资，2年后的市场价值为

$$(1+r_2)^2$$

采用第二种投资策略，现在每1元钱的投资，2年后的市场价值应为

$$(1+r_1)(1+{}_1f_2)$$

如果市场上1年后的1年期折现型国库券的远期价格是$\overline{S}_1$，国库券的面值是Par，则远期利率为

$$ {}_1f_2=\frac{Par-\overline{S}_1}{\overline{S}_1}$$

现在就是已知的，r_1 也是已知的。所以这两种投资策略都是无风险的，由无套利均衡条件知，两者的结果应当相等。即有

$$(1+r_2)^2=(1+r_1)(1+{}_1f_2)$$

这个关系式可以推广到任意年，有

$$(1+r_n)^n=(1+r_1)(1+{}_1f_2)(1+{}_2f_3)\cdots(1+{}_{n-1}f_n)$$

从而

$$1+r_n=\sqrt[n]{(1+r_1)(1+{}_1f_2)(1+{}_2f_3)\cdots(1+{}_{n-1}f_n)}$$

所以有一条规律

> **1加零息票利率是1加相应期限的远期利率的几何平均值。**

如果不是每年发生一次利息现金流（按年计息），而是每年发生 m 次利息现金流（如按月计息，$m=12$），那么，上述公式转变为

$$1+\frac{r_n}{m}=\sqrt[mn]{\left(1+\frac{r_{1/m}}{m}\right)\left(1+\frac{{}_{1/m}f_{2/m}}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{{}_{n-1/m}f_n}{m}\right)}$$

为了简化我们的符号起见，把 $r_{1/m},{}_{1/m}f_{2/m},\cdots,{}_{n-1/m}f_n$ 简记为 $f_1,f_2,\cdots,f_{mn}$，上式简化为

$$1+\frac{r_n}{m}=\sqrt[mn]{\prod_{j=1}^{mn}\left(1+\frac{f_j}{m}\right)}$$

请注意，$f_1,f_2,\cdots,f_{mn}$都是期限为1段单位时间的远期利率。

采用完全类似的无套利均衡分析方法，可以容易地推出

$$(1+{}_if_j)^{(i-j)}=(1+{}_if_{i+1})(1+{}_{i+1}f_{i+2})\cdots(1+{}_{j-1}f_j)$$

因此，只要知道所有单位时间段的远期利率，就可以算出任意时间段的远期利率。

如果每年发生 m 次现金流，期限为 n 年的折现现金流就变成

$$PV=\sum_{j=1}^{mn}v_jC_j$$

C_j 是未来第 j 期发生的现金流，v_j，$j=1,\cdots,mn$ 是各期的折现因子。所有的 v_j 都可以按下式从期限为1个单位时间段的远期利率 $f_1,f_2,\cdots,f_{mn}$递归地推出：

$$v_0 = 1$$

$$v_{j+1} = \frac{v_j}{\left(1 + \frac{f_{j+1}}{m}\right)}, \quad j = 0, \cdots, mn - 1$$

反过来，如果知道了所有的 $v_j, j=1,\cdots,mn$，当然可以倒算出期限为 1 个单位时间段的远期利率 $f_1, f_2, \cdots, f_{mn}$

$$f_j = \left(\frac{v_{j-1}}{v_j} - 1\right)m, \quad j = 1, \cdots, mn$$

由此我们得出结论，可以根据零息票利率集（可以按照市场实际的均衡价格推算出来）算出折现因子集（如果市场上没有相应期限的国库券，则采用插值技术），折现因子和单位时间段的远期利率集是可以互相换算的。从折现因子当然也可以倒算出零息票利率集（即可算出国库券的收益曲线）。计算公式如下

若 $t \leqslant 1$ 年，则 $\quad r_t = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{v_t} - 1\right)$；

若 $t > 1$ 年，则 $\quad r_t = \sqrt[t]{\frac{1}{v_t}} - 1$

三者之间的关系以折现因子为纽带，由图 2.4 表示。

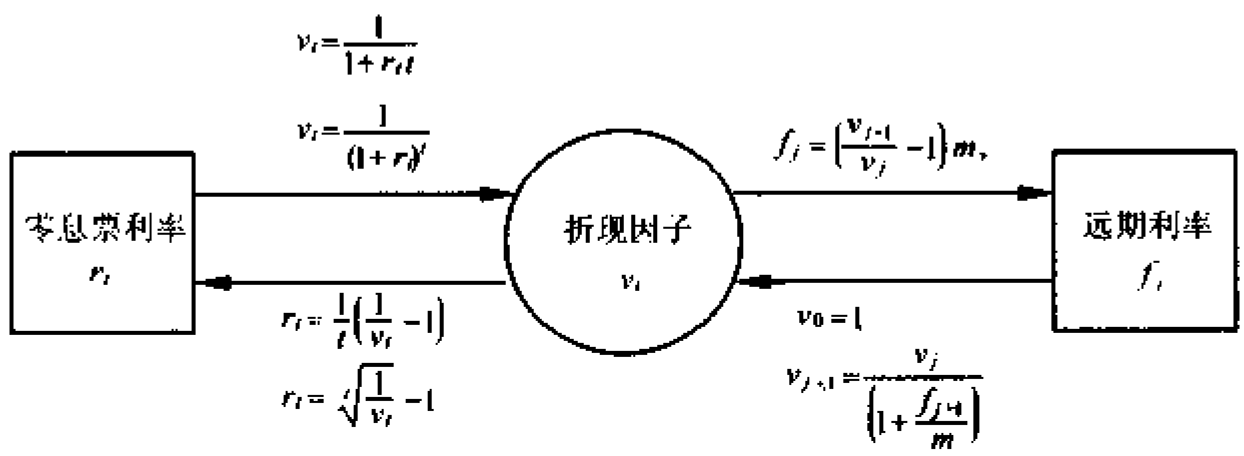


图 2.4

6. 互换的定价

互息掉换(swap)，简称互换或掉换，有各种不同的形态：不同期限之间的掉换（可以称为掉期）、不同利率之间的掉换（如固定利率与浮动利率之间的掉换，称为利率互换，或者可以称为掉利）、不同币种之间的掉换（称为货币互换，或者可以称为掉币），等等。大量的衍生品都是短期工具，而利率互换和货币互换则往往是期限长于 1 年的长期工具。因此，利率互换和货币互换的定价一定与金融市场对未来的预期紧密地联系在一起，而定价的方法当然也是无套利均衡分析。而且，在互换的定价中，非常突出地体现了金融工程的组合分解技术。我们在此作一介绍。

先讨论固定利率和浮动利率的利率互换(interest rate swap)的金融工程定价技术。

利率互换是一种转变长期债务或债权的利率风险特性的衍生品。如果你借入（或贷出）一笔长期的浮动利率贷款，而又预感到市场利率将会上升（或下跌），那么，你可以购买

(出售)一份利率互换合约,转变成可以支付(或收取)固定利率的利息。对于利率互换协议,买方将收取浮动利率利息,支付固定利率利息,卖方则反之。所以,我们可以用图 2.5 所示的现金流来描述买方和卖方的未来收益/支出。

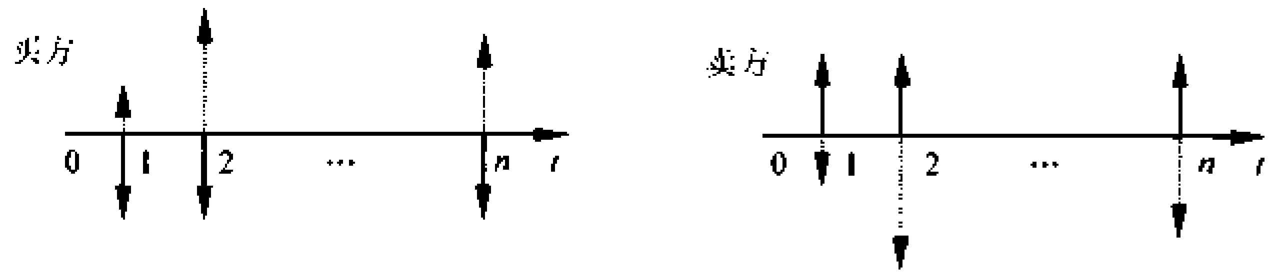


图 2.5

按照习惯,在现金流图中,箭头朝上表示现金的流入,箭头朝下表示现金的流出。我们用等长度的实线箭头表示固定利率利息的支付,而用不同长度的虚线箭头表示浮动利率利息的支付。

浮动利率的确定是采用与某种利率指数挂钩的办法。从理论上讲,采用短期国债利率作为利率指数最有道理,实际上最常用的是伦敦银行同业拆放利率,即 *LIBOR*(London InterBank Offer Rate),可以认为是一种代用品。浮动利率用 *LIBOR* 加减若干基本点(一个基本点是 1/100 个百分点,即万分之一)给出(这实际就是风险调整)。利率互换的定价,就是要定出与浮动利率互换的固定利率的大小,即所谓"浮动利率的固定利率价格"。所以利率互换协议的买方是用固定利率"购买"浮动利率。

表 2.4 是英国《金融时报》(Financial Times)刊载的 1999 年 7 月 8 日的欧元、英镑、瑞士法朗、美元和日元的利率互换报价。

表 2.4

INTEREST RATE SWAPS

	Euro-E		£ Stg		SwFr		US $		Yen	
Jul 08	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
1 year	3.03	3.06	5.44	5.47	1.83	1.86	5.77	5.80	0.26	0.29
2 year	3.49	3.53	5.91	5.95	2.28	2.36	6.08	6.11	0.49	0.52
3 year	3.86	3.90	6.21	6.25	2.61	2.69	6.26	6.29	0.74	0.77
4 year	4.15	4.19	6.29	6.34	2.86	2.94	6.37	6.40	1.00	1.03
5 year	4.37	4.41	6.30	6.35	3.06	3.14	6.44	6.47	1.25	1.28
6 year	4.56	4.60	6.27	6.32	3.24	3.32	6.51	6.54	1.49	1.52
7 year	4.73	4.77	6.21	6.26	3.41	3.49	6.57	6.60	1.70	1.73
8 year	4.89	4.93	6.15	6.20	3.56	3.64	6.63	6.66	1.88	1.91
9 year	5.01	5.05	6.10	6.15	3.69	3.77	6.67	6.70	2.04	2.07
10 year	5.10	5.14	6.03	6.08	3.81	3.89	6.72	6.75	2.18	2.21
12 year	5.26	5.30	5.96	6.02	4.00	4.10	6.78	6.81	2.43	2.46
15 year	5.43	5.47	5.89	5.96	4.23	4.33	6.82	6.85	2.72	2.75
20 year	5.57	5.61	5.82	5.89	4.48	4.58	6.83	6.86	2.92	2.96
25 year	5.65	5.69	5.74	5.83	4.60	4.70	6.82	6.85	2.97	3.02
30 year	5.68	5.72	5.67	5.76	4.68	4.78	6.82	6.85	3.01	3.06

Bid and ask rates as of close of London business. US $ is quoted annual money actual/360 basis against 3 months Libor. £ and Yen quoted on a semi-annual actual/365 basis against 6 months Libor. Euro/Swiss Franc quoted on annual bond 30/360 basis against 6 month Euribor/Libor with the exception of the 1 year rate which is quoted against 3 month Euribor/Libor. Source: Intercapital Europe Limited.

利率互换最长可达 30 年。买进价低于卖出价，因为买方要支付固定利率换取浮动利率，卖方支付浮动利率换取固定利率，所以这一报价习惯是合适的。

为了叙述简单起见，下面我们讨论定价问题时不区分买进价和卖出价。

为了对利率互换定价，我们先来看带息票债券（如前面所述的中长期国库券）的定价。带息票债券是固定利率债券，定期凭息票领取固定数额的利息，到期偿还以面值 Par 计算的本金。现金流图如图 2.6 所示：

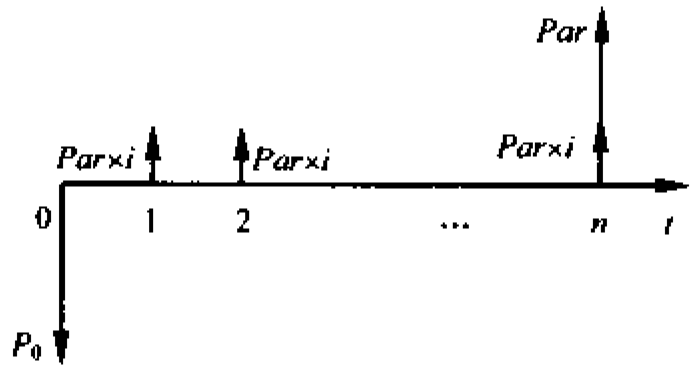


图 2.6

其中 i 就是息票利率，所以 $Par\times i$ 是每期支付的利息。如果对于这种债券，市场根据它的风险状况所要求的折现率（资金成本）为 r，则有净现值关系：

$$NPV=-P_0+\sum_{t=1}^{n}\frac{Par\times i}{(1+r)^t}+\frac{Par}{(1+r)^n}=0$$

前面已经说过，如果息票利率 i 和资金成本 r 相等，即 $i=r$，就是平价债券，有 $P_0=Par$。

现在我们用浮动利率筹措一笔数额等于一项平价债券的面值 Par 的资金，筹措的资金就用来投资于这项平价债券。假定筹资和投资的付息期是严格匹配的。这两件事的现金流图见图 2.7 的左侧。

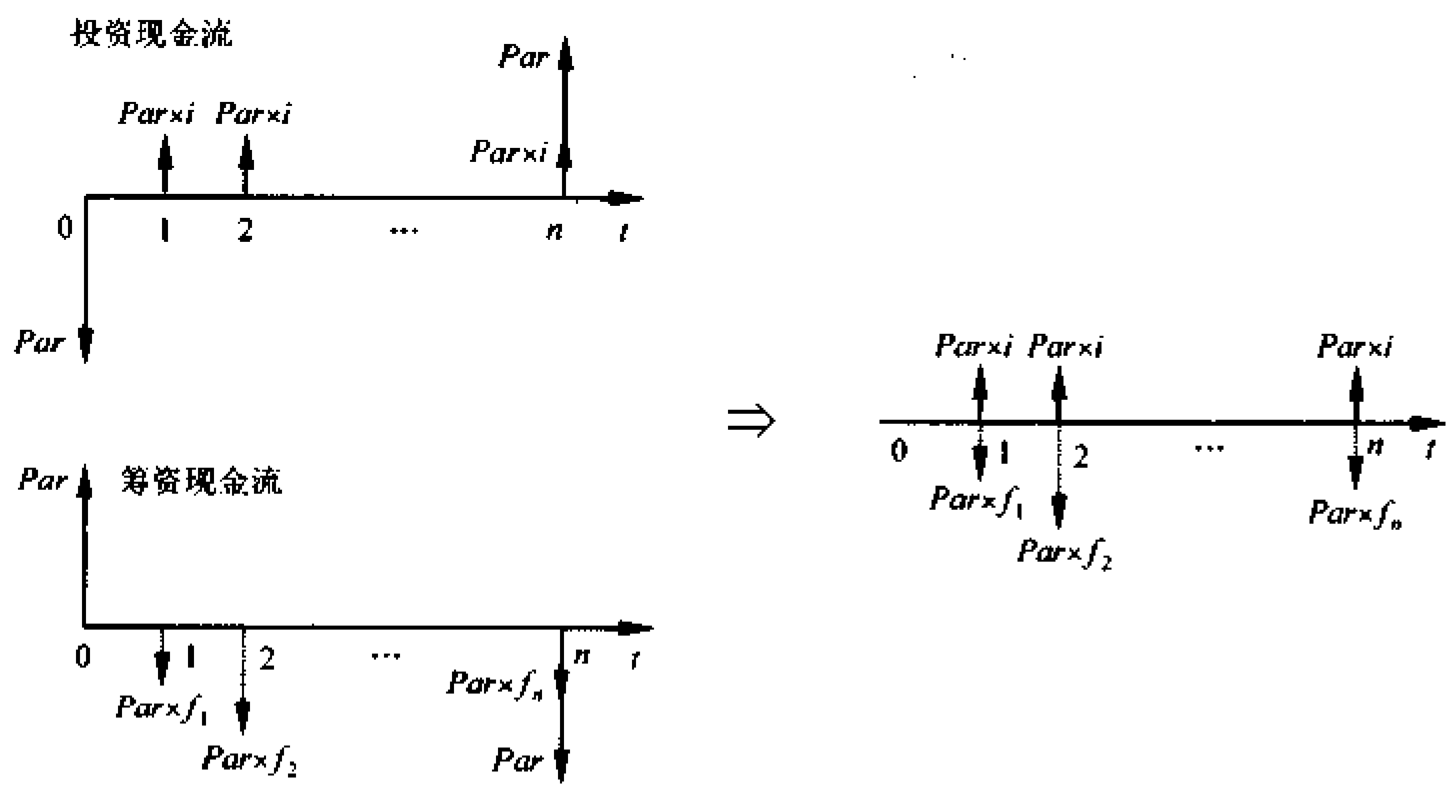


图 2.7

如果我们将这两个现金流图合并到一起，抵消掉所有数额为面值 Par 的现金流入流

出，就得到图 2.7 右侧的现金流图。我们发现，这正好是利率互换协议卖方的现金流（参见图 2.5）。所以，一个利率互换的空头（即卖方头寸）就等价于用浮动利率筹资的头寸和投资于一项平价债券的头寸的组合，而互换的定价（定出固定利率）就变成定出平价债券的息票利率。这是金融工程组合分解技术的典型使用。

请注意，为了对利率互换定价，这里平价债券的风险必须与对应的浮动利率的风险相匹配。对于最普通的利率互换（即所谓 plain vanilla interest swap）来说，浮动利率应该是无风险利率。因此，未来浮动利率的预期值就是远期利率。于是就可以这样来确定平价债券的预期收益率：采用作为浮动利率未来值预期的远期利率作为平价债券的折现率（即平价债券的预期收益率），使平价债券的净现值为零来定出其收益率。但是要注意，这里的折现率将是随时间变化的。

不失一般性，为了说明简单起见，我们假定现金流发生的时间间隔就是 1 年。以 f_1，f_2，…，f_n 记相应于浮动利率的远期利率。由前面第 3 节所述，可换算出“零息票利率集” r_t：$t=1,2,\cdots,n$：

$$1 + r_t = \sqrt[t]{\prod_{j=1}^{t}(1 + f_j)}$$

用这一零息票利率集作为折现率，对平价债券折现，有：

$$NPV = - Par + \sum_{t=1}^{n} \frac{Par \times i}{(1 + r_t)^t} + \frac{Par}{(1 + r_n)^n}$$

由无套利原理知，应有 $NPV=0$，由此解出

$$i = \frac{1 - \frac{1}{(1 + r_n)^n}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1 + r_t)^t}}$$

这就是利率互换的定价结果。这种定价方法称为“*零息票定价技术*”，名称的来源是因为采用了 r_t 后，每一份息票都可以看作一份零息票债券（即折现债券）。

这里需要强调两点：第一，本章开头所指出的对于不同期限的现金流应当采用不同的折现率 r_t：$t=1,2,\cdots,n$，这些 r_t 实际上就是零息票利率；第二，上述采用了 r_t 后，每一份息票都可以看作一份零息票债券（即折现债券）。依据这样的理论分析，在实际的金融市场中产生了政府债券（主要指国库券）的“剥离”产品，即把息票和本金剥离开来单独交易。这是一项重大的金融工程创造。因为这种新型的剥离产品能够更好地符合投资者的收益/风险偏好，所以创造出了实际的社会经济价值。

为了进一步加深对组合分解技术的印象，我们再来看图 2.7 左下方的筹资现金流。这个现金流图可分解成由图 2.8 所示的两个图的组合。

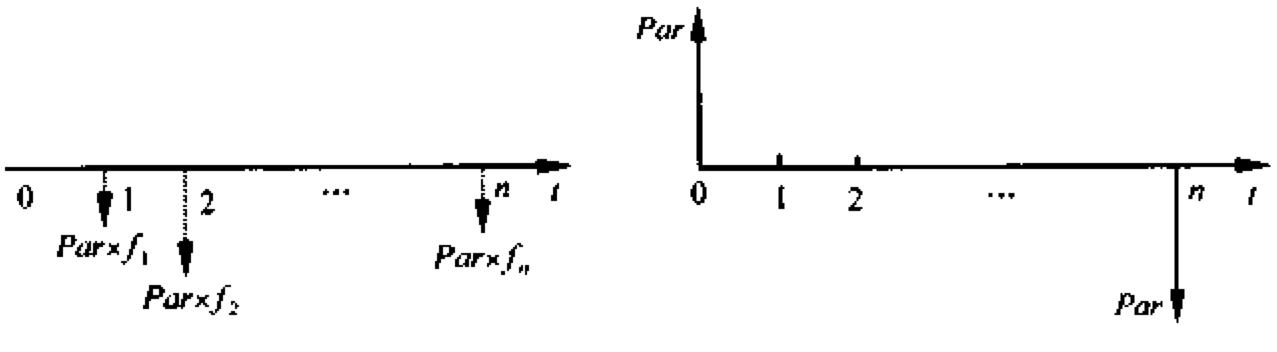


图 2.8

根据无套利规则，这两个现金流组合到一起时的净现值为零。所以，支付浮动利息的现金流(图 2.8 左)和图 2.8 右的镜像现金流(见图 2.9)是等价的。

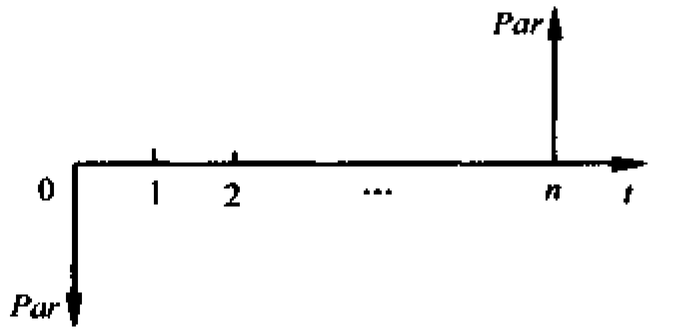


图 2.9

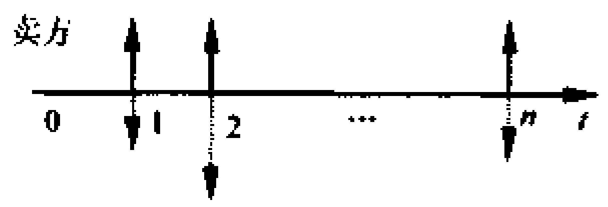


图 2.10

所以在设计时，可以用这个简单的现金流图来代替原来比较复杂的现金流图。

现在我们来看货币互换，上面这个简化的替代方法就特别有用。先来看前述利率互换的卖方的现金流图 2.10。

然后我们用上面的替代办法，即用相等的期初本金流出和期末现金流入来取代期间的浮动利息的流出，得到图 2.11。

在固定利率与浮动利率互换中，采用前述零息票定价技术，图 2.11 现金流的净现值为零。

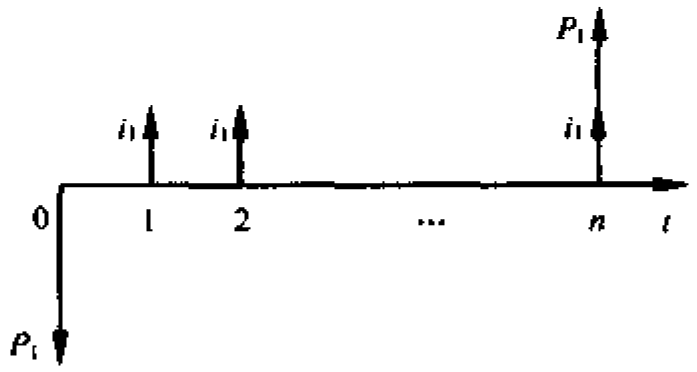


图 2.11

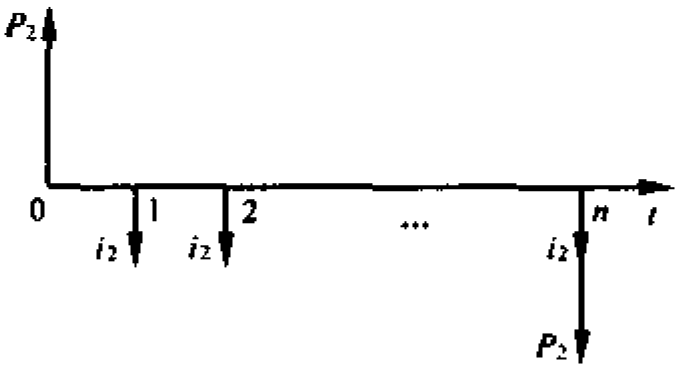


图 2.12

如果对第二种货币做一个反向的结构，就得到图 2.12。

把图 2.11 和图 2.12 并到一起，使 P_1 和 P_2 按开始互换时的即期汇率二者相等，因此可以互相抵消，得到图 2.13。

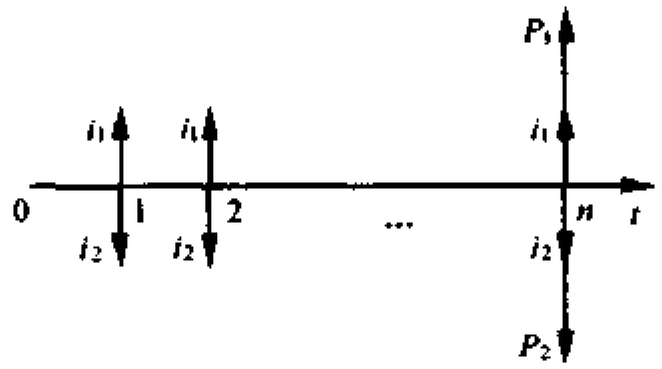


图 2.13

这就是固定利率对固定利率的货币互换。归结起来，做法是：

1) 按期初的即期汇率定出 P_1 和 P_2，对 P_1 和 P_2 分别按各自货币做浮动利率与固定

利率的利率互换(浮动利率的指数分别采用两种货币的 *LIBOR*)来定出 i_1 和 i_2,以后就定期地按照 i_1 和 i_2 互换利息。

2) 期初的本金可以不交换,因为根据当时的汇率二者可以相互抵消。但期末一定要交换本金,因为到期末时汇率变了,二者不再能互相抵消。图 2.13 的净现值为零、所以用这种做法得到的是均衡定价。如果期末不交换本金,定价就会失衡。

因为浮动利率支付利息的现金流可以用期初和期末相等的本金现金流出和流入来代替,所以浮动利率对浮动利率的货币互换可以根据期初的即期汇率算出两种货币相等的本金额,再按照各自的利率指数(如各自的 *LIBOR*)计算每期互换的利息,最后到期末再交换期初算出的本金额即可。所以实际上是以 *LIBOR* 换 *LIBOR*。同样的道理,读者不难自己体会出一种货币是固定利率而另一种货币是浮动利率的交叉互换应该如何定价。

以上利率互换和货币互换的定价技术都是基于零息票定价技术,即都是按无风险利率来定价的。如果引入互换一方的违约风险的话,情况就会变得非常复杂。达菲(D. Duffie)和黄明近年做过有关的工作,有兴趣的读者可查阅文献①。

7. 收益曲线的形状

基本上有以下几种理论解释收益曲线的形状。

1) *无偏预期理论*　由前面的公式

$$1+\frac{r_n}{m}=\sqrt[mn]{\prod_{j=1}^{mn}\left(1+\frac{f_j}{m}\right)}$$

知,零息票利率是相应期限远期利率的(几何)平均,而远期利率是市场对未来(无风险)短期利率的预期。如果市场预期短期利率将要上升,则期限长的零息票利率高于期限短的零息票利率,收益曲线呈上翘形态;如果市场预期短期利率将要下降,则反之。这一理论还很好地解释了不同期限的利率具有相同走势的统计结果,见图 2.14。

2) *流动性偏好理论*　投资者在投资决策时都偏好于流动性比较强的证券,所以长期利率必须含有流动性补偿,从而高于短期利率。因此收益曲线通常应当呈现上翘形态。

3) *市场分割理论*　这种理论认为人们在投资时具有强烈的期限偏好,人们习惯于购买与自己的储蓄时间有相同期限的证券。因此,各种不同期限的证券之间不能互相替代。对于不频繁参与金融市场交易的人们来说,这一解释相当符合实际,但不能解释为什么不同期限的利率具有相同走势的现象。

4) *优先置产理论*　这一理论力图将上述理论统一起来。主要观点是,长期利率是市场对未来短期利率的预期的(几何)平均加上期限补偿。不同期限的证券之间是可以互相替代的,但人们又有一定的期限偏好和流动性偏好。人们习惯于按自己的期限偏好购买证券,只有当其他期限的证券具有较高的预期收益率时,才会转而购买其他期限的证券。期限较长的证券必须含有期限补偿。这一理论能够较好地解释经验事实。短期利率的上升会导致对未来短期利率较高的预期,从而使长期利率也有升高的趋势,反之亦然。所以,不

① 请见参阅资料第二章 3。

同期限的(无风险)利率有相同的走势。期限补偿通常为正,所以,市场预期短期利率上升或者即使保持不变,都会使收益曲线上翘。如果市场预期未来的短期利率下降甚至下降得很厉害,即使期限补偿为正,收益曲线也会出现平坦甚至下垂的现象。

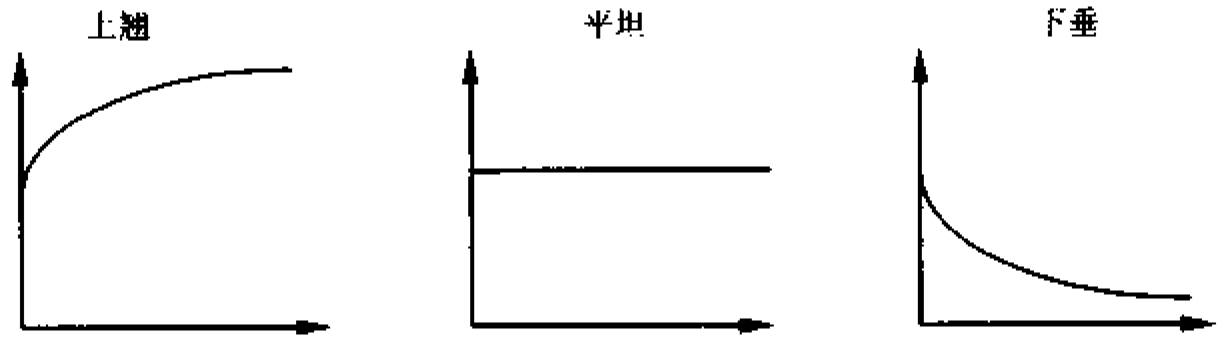


图 2.14

8. 小结

利率指债权型金融商品的到期收益率。在金融市场表现的名义利率由三个成份组成,这就是资金的纯时间价值、通货膨胀率和风险补偿。无风险利率是确定有风险利率的基准。无风险利率会因期限的不同而不同,从而形成(无风险)利率的期限结构。利率的期限结构用国库券的收益曲线来描述。在国库券的收益曲线上反映的是不同期限的当时市场的(无风险)即期利率,而且表现为零息票利率集。零息票利率集是非常有用的金融工程定价工具,这在互换定价中充分地体现出来。

对于有风险资产来说,远期价格不同于市场对未来即期价格的预期。远期价格的确定必须采用无套利均衡分析方法。对于无风险资产来说,远期价格是市场对未来即期价格的预期。因此,远期利率是市场对未来无风险利率的预期。

零息票利率、折现因子和远期利率三者之间的关系以折现因子为纽带通过无套利均衡关系互相确定。

在采用零息票定价技术对互惠掉换(包括利率互换、货币互换和交叉互换)进行定价时,零息票利率是非常有用的工具。互换的定价充分地利用了金融工程中的组合分解技术。

国库券收益曲线的形状由若干种理论来解释,其中优先置产理论是一种综合的理论,比较符合经验事实。

练习题

1. 1998 年 9 月 24 日美国国债市场报价如下(我们做了适当的简化):

短期国债(T-bills)

到期日	距到期日(月)	报价
1998 年 10 月 24 日	1	99.653
12 月 24 日	3	98.866
1999 年 3 月 24 日	6	97.766
9 月 24 日	12	95.666

中长期国债(T-notes and T-bonds)

到期日	距到期日(年)	息票利率(%)	报价
2000年9月	2	6 1/8	103 0/32
2001年9月	3	6 3/8	105 2/32
2002年9月	4	5 7/8	104 24/32
2003年9月	5	5 3/4	105 7/32
2004年9月	6	7 1/4	113 18/32
2005年9月	7	6 1/2	111 11/32
2006年9月	8	6 1/2	112 11/32
2018年11月	20	9	145 22/32
2023年8月	25	6 1/4	112 19/32
2028年8月	30	5 1/2	105 12/32

请绘制当天的国债收益率(零息票利率)曲线(需列出数据)。

提示：对未提供的数据采取线性插值。

2. 已知下列数据(假设每年付息一次)：

到期日(年)	息票利率(%)	报价
1	7.5	103.9
2	6.5	105.2
3	7.0	108.9
4	5.5	105.7
5	6.0	108.4

试定出5年期每年互换一次的利率互换的价格(计算中保留三位有效数字)。

第三章　两基金分离定理与资本资产定价模型

金融决策的核心问题是收益与风险(包括流动性问题)的权衡。个体的决策通过竞争统一到市场的无套利均衡之中。如果两项决策会带来相同的预期收益而要承受不同的风险,那么,风险大的那项决策将是无效的;反之,如果结果要承受相同的风险而有不同的预期收益,那么,预期收益小的那项决策也将是无效的。人们在高风险高收益和低风险低收益之间,按照自己对收益/风险的偏好进行权衡和优化。但市场的均衡却会导致与个体的收益/风险偏好(或者说个体的效用函数)无关的结果,这是市场对市场参与者个体行为整合的结果。本章中我们通过介绍投资组合理论和资本资产定价模型来说明这一点。

1. 投资组合的选择

1952年马柯维茨(Harry Markowitz)提出的投资组合理论通常被认为是现代金融学的发端。这一理论的问世,使金融学开始摆脱纯粹描述性的研究和单凭经验操作的状态,数量化方法进入了金融领域。马柯维茨的工作所开始的数量化分析技术和MM理论中的无套利均衡思想相结合,酝酿了后续一系列金融学理论的重大突破。

投资组合的选择(portfolio selection)狭义的含义是如何构筑各种有价证券的头寸(包括多头和空头)来最好地符合投资者的收益和风险的权衡。广义的含义则包括对所有资产和负债的构成做出决策,甚至包括对人力资本(如教育和培训)的投资在内。我们的讨论则限于狭义的含义。

尽管存在一些对理性的投资者(指具有不同程度的风险厌恶倾向的投资者)来说应当遵循的一般性规律,但在金融市场中,并不存在一种对所有的投资者来说都是最佳的投资组合或投资组合的选择策略。因为有以下的原因:

1) *投资者的具体情况*　不同的投资者(包括个人投资者和机构投资者)有不同的利益结构,对于市场的变动也有不同的敏感性。一位受雇于证券公司按赢利分成的证券分析师和一位中学教师不同,前者的收入对股票市场的波动非常敏感,后者则不然。前者如果再把自己的钱去投资于股票则比后者要承受大得多的风险。

2) *投资周期的影响*　不同的投资者调整自己的投资组合的周期长短不一。有的投资者频繁地变化自己的投资组合(如积极炒股的股民),有的则会很长时间才调整一次(如在银行开设长期定期存款账户的储蓄者)。对于这些不同的投资者来说,他们对同一个投资组合肯定会有不同的看法。而且,投资者们各自的投资周期还会随着时间的流逝而变化。

3) *对风险的厌恶程度*　不同的个人投资者因为其年龄、地位、财产状况等,不同的机构投资者则因为各自的经营方针和实力,对风险会采取不同的态度。不过,一个人(机构也一样)愿意接受风险和他(它)是否有能力承担风险是两回事,这一点在进行投资分析时应

加以注意。

4）投资组合的种类　虽然从理论上讲，由银行和非银行金融机构所提供的金融商品可以构筑起无穷多种投资组合，但实际上真正可供投资者选择的只是有限的几种。投资组合理论给出了选择投资组合的指导性思路。

2. 预期收益和风险的权衡

下面我们讨论在构筑投资组合时如何进行预期收益与风险的权衡的数量化分析方法。收益与风险权衡的优化目标是按照投资者愿意接受的风险程度使预期收益达到最大。

为了行文的方便起见，除了无风险证券外，我们把所有有风险的股票、债券及其他衍生证券统称为有风险资产。

投资组合理论的基本思想是通过分散化的投资来对冲掉一部分风险。有一条古老的西方谚语"不要把鸡蛋放在一个篮子里"，就已经体现出这一思想。我们先来分析把 2 项资产（有风险和/或无风险）放到一起时，其组合的收益和风险的情况。

假定资产 1 在组合里（按市场价值计）的比重是 w，则资产 2 的比重就是 $1-w$。它们的预期收益率和收益率的方差分别计为 $E(r_1)$，$E(r_2)$；σ_1^2 和 σ_2^2，组合的预期收益率和收益率的方差则计为 $E(r)$和 σ^2。由简单的概率论知识知

$$E(r) = wE(r_1) + (1-w)E(r_2)$$

$$\sigma^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2$$

其中 ρ 是相关系数，一定有 $-1 \leqslant \rho \leqslant +1$ 的关系。

如果其中有一项资产，比如资产 2，是无风险资产，则有 $E(r_2)=r_f$，$\sigma_2=0$（无风险资产的收益率是确定的，因此其标准差为零）。上面的式子简化为

$$E(r) = r_f + w[E(r_1) - r_f]$$

$$\sigma = w\sigma_1$$

我们先来讨论这种情况。

情况 1：1 项有风险资产和 1 项无风险资产的组合

由预期收益率的表示式可以看到，组合的预期收益率也是以无风险收益率为基础再加上风险补偿。风险补偿的大小取决于有风险资产本身的收益率中含有的风险补偿 $E(r_1)-r_f$和有风险资产在组合里的比重 w。从上面两个方程可以解出

$$w = \frac{E(r) - r_f}{E(r_1) - r_f}$$

$$E(r) = r_f + \frac{[E(r_1) - r_f]}{\sigma_1}\sigma$$

如果现在市场的无风险利率是 6%，资产 1 的预期收益率是 14%，标准差是 20%。现在我们希望组合的预期收益率是 11%，组合的构成和风险将是如何？

$$w = \frac{E(r) - r_f}{E(r_1) - r_f} = \frac{11\% - 6\%}{14\% - 6\%} = 62.5\%$$

$$\sigma = w\sigma_1 = 62.5\% \times 20 = 12.5$$

在一指定的风险水平，如果一投资组合可能获得最大的预期收益，则这一投资组合被

称为有效组合。上面这个组合是否有效组合呢？回答是否定的。因为我们还可以在这个投资组合里再加进有风险资产，进行风险的分散化。

3. 风险的分散化

风险的分散化原理被认为是现代金融学中唯一“白吃的午餐”。将多项有风险资产组合到一起，可以对冲掉部分风险而不降低平均的预期收益率，这是马柯维茨的主要贡献。

情况 2：2 项有风险资产的组合

组合的预期收益率及其方差的表达式已在上一节给出。因为$-1\leqslant\rho\leqslant+1$，所以有

$$[w\sigma_1-(1-w)\sigma_2]^2\leqslant\sigma^2\leqslant[w\sigma_1+(1-w)\sigma_2]^2$$

因为对于一般的金融工具来说，有后文中要提到的系统风险（市场风险）的存在，所以我们不讨论$\rho=-1$的情况。而如果$\rho=+1$，意味着这两项资产的风险完全正相关。因为容许卖空，当然可以适当地选择比例w，使得$\sigma^2=0$，但此时有一权重取负值（空头），由无套利原理知，其预期收益率应该等于无风险利率。此时，这两种证券的多头和空头头寸正好互相对冲，我们也可以暂时不考虑这种情况。

由上面右方的不等式可以看出，组合的标准差不会大于标准差的组合。事实上，只要$\rho<1$，就有$\sigma<|w\sigma_1+(1-w)\sigma_2|$，这说明组合确实能起到降低风险的作用，这就是投资分散化的原理。

现在我们给出一个数字例子。有风险资产 1 和 2 的预期收益率和标准差见表 3.1。

表 3.1

	资产 1		资产 2
预期收益率	0.14		0.08
标准差	0.20		0.15
相关系数		0.6	

我们考虑以下几种组合的情况，见表 3.2：

表 3.2

组合标记	投资于资产 1 的比例	投资于资产 2 的比例	组合的预期收益率	组合的标准差
R	0	100%	8%	0.15
C	10%	90%	8.6%	0.1479
最小方差组合	17%	83%	9.02%	0.1474
D	50%	50%	11%	0.1569
S	100%	0	14%	0.20

稍有微积分知识的读者就明白，最小方差组合中投资于资产 1 的比例可以这样求出

$$w_{\min}=\frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

图 3.1 描绘了不同组合的预期收益率和标准差之间的关系。而且，用初等数学就可以证明，这条描绘标准差——预期收益率关系的曲线是一条双曲线。

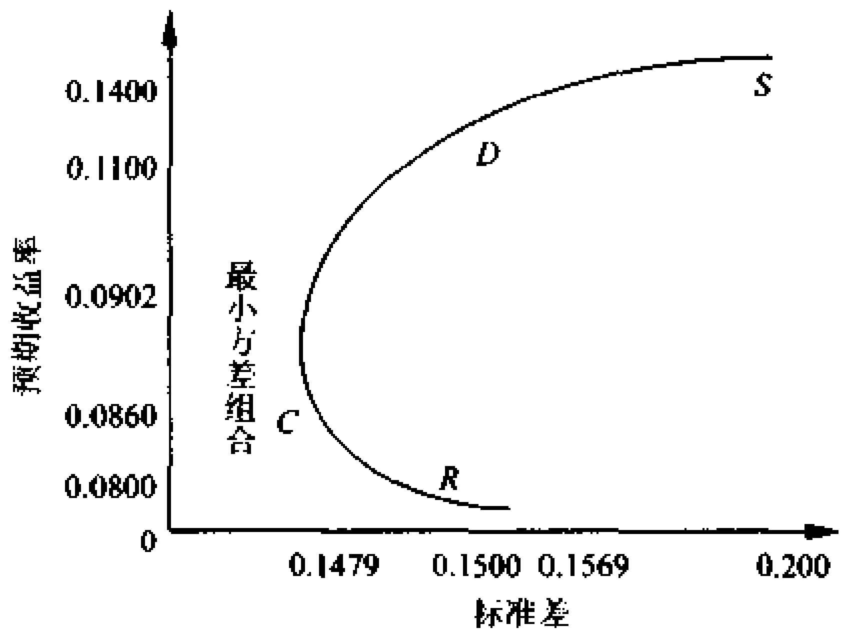


图 3.1

情况 3：多项有风险资产的组合

假定现在有 n 项有风险资产，它们的预期收益率记为 $E(r_i)$：$i=1,\cdots,n$，彼此之间的协方差记为 σ_{ij}：$i,j=1,\cdots,n$（当 $i=j$ 时，σ_{ii} 就表示方差）。$w_1,\cdots,w_n$ 表示相应的资产在组合中的比重。于是投资组合的预期收益率和方差就应当是

$$E(r)=\sum_{i=1}^{n}w_iE(r_i)$$

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_j\sigma_{ij}$$

下面我们只讨论 $\sigma^2>0$ 的情况。以后将可看到，这样限定是有道理的，并得到经验事实的支持。优化投资组合就是在要求组合有一定的预期收益率的前提条件下，使组合的方差越小越好，即求解以下的二次规划

$$\min_{w}\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_j\sigma_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}w_iE(r_i)=E(r)$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$$

因为可能有的读者对数学规划不熟悉，我们稍作解释。第一个式子表示选择组合的比例系数使组合的方差这一目标函数最小化，同时必须满足下面两个式子的约束条件。

对于每一给定的 $E(r)$，可以解出相应的标准差 σ，每一对 $(E(r),\sigma)$ 构成标准差——预期收益率图（图 3.2）的一个坐标点，这些点就连成图 3.2 中的曲线。同样可以从数学上证明，这条曲线是双曲线，这就是最小方差曲线。

最小方差曲线内部（即右边）的每一个点都表示这 n 种资产的一个组合。其中任两个点所代表的两个组合再组合起来得到的新的点（代表一个新的组合）一定落在原来两个点的连线的左侧，这是因为新的组合能进一步起到分散风险的作用，这也就是曲线向左凸的原因。

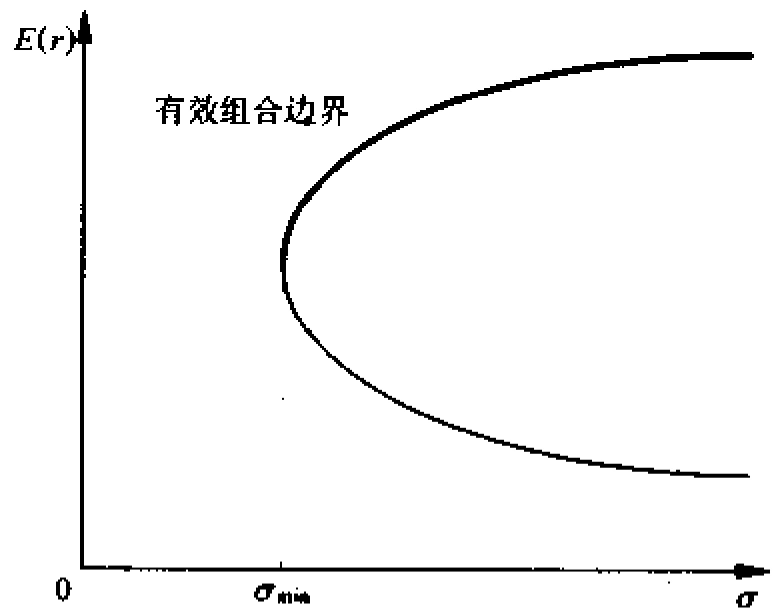


图 3.2

实际上，最小方差曲线只有左上方的那一段是有意义的，与其对称的左下方的那一段是没有意义的。因为在承受同样风险（同样的标准差）的情况下，上面的点所代表的投资组合的预期收益率比下面的点所代表的组合的预期收益率高。因此，我们称最小方差曲线左上方的那一段为有效组合边界。显然，只有在有效组合边界上的点所代表的投资组合才是符合正确的投资策略的优化组合。不过请注意，这里的组合还只包括有风险资产。和情况1不同的是，我们现在还没有引进无风险证券。

尽管我们在这里论证时用了一点优化的手段（求解二次规划），但实际上有效组合边界的存在和确定是和个别投资者的效用（收益/风险偏好）没有关系的。这也就印证了在本章开头所说的话，但事情还不止如此。

为了看得更清楚起见，我们来看任一位投资者的收益/风险效用函数。在标准差——预期收益率图上，我们画出等效用曲线（见图 3.3）。因为承受高的风险要求高的风险补偿，所以等效用曲线是递增的。在已经承受较高风险的情况下，要进一步增加风险，就会要求更高的风险补偿；相反，在预期收益已经比较低时，要进一步降低收益，也会要求降低更多的风险。这就是经济学里边际效用递减的原理。所以等效用曲线是向右下方凸的（数学

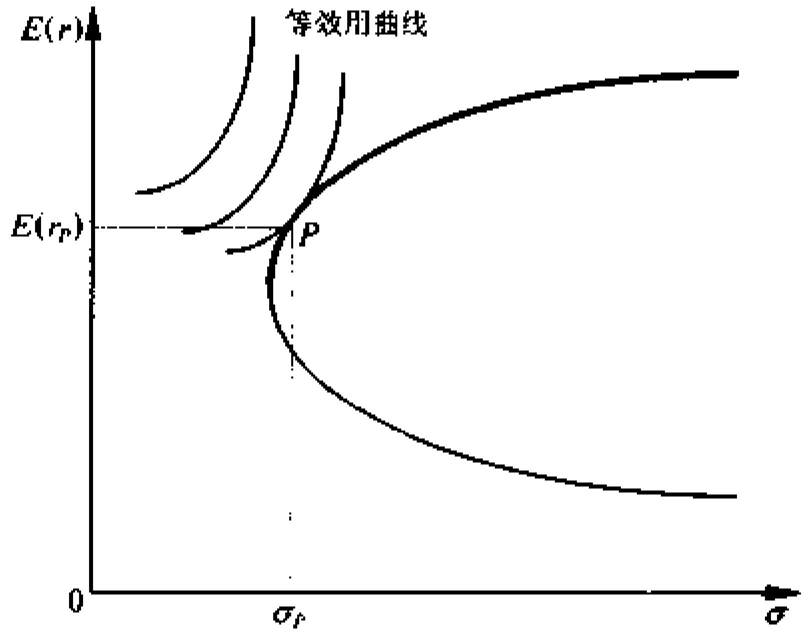


图 3.3

上称为凸函数)。越向左上方移动,等效用曲线所表示的效用函数值就越大。显而易见,如果这位投资者要从这里的 n 种有风险资产来选择投资组合的话,一定应该是他的等效用曲线和有效组合边界相切的那一点 P 所代表的组合是最佳选择,见图 3.3。

为了分析的简单起见,我们假定这 n 种有风险资产在投资组合里的比重是一样的,即有 $w_i=\frac{1}{n}, i=1,\cdots,n$。于是组合的方差可写成

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n}\sigma_{ij} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ii} + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sigma_{ij}$$

因为 $\sigma_{ii}=\sigma_i^2$,所以上式右端的第一项是 n 项有风险资产的方差的和。又因为每一项有风险资产的方差是有限的数,分母是 n^2,所以当 n 变得很大时,这一项会趋于零。但第二项不会趋于零,而是趋于协方差的平均值。记 $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n^2-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sigma_{ij}$ 即协方差的平均值,就有

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sigma_{ij} = \frac{n^2-1}{n^2}\bar{\sigma}_{ij}$$

当 n 变得很大时,就趋于协方差的平均值 $\bar{\sigma}_{ij}$。

由此可以得出重要的结论:当投资组合含有许多种有风险资产时,个别资产的方差将不起作用。各项资产之间的协方差有正有负,它们会起互相对冲抵消的作用,但不会完全对冲抵消。因而组合的方差就近似等于平均的协方差(即未被抵消的部分)。为什么不会完全对冲抵消而使平均的协方差等于零呢?因为各项资产的收益变动存在某种"同向性"。这种同向性的风险是所有的不同资产都同时承受的,被称为系统风险或市场风险,而可以对冲抵消的风险就被称为非系统风险或企业风险。于是有:

> **通过扩大投资组合(即增加所包含的资产的种类)进行风险分散化,可以消除非系统风险(企业风险),但不能消除系统风险。**

表 3.3 和图 3.4 记录了从纽约股票交易所随机地挑选股票构成等权重的股票组合,随着股票种类数的增多,组合的年收益率的波动性(用收益率的标准差来度量)的变化情况。从图表中可以看出,在股票的种类数超过 30 种以后,风险再降低的程度就不明显了。事实上,平均波动性不会低于 19.2%,这就是无法通过分散化消除的系统风险(市场风险)。

表 3.3

组合中的股票数	组合年收益率波动性的平均数(%)	组合波动性与单个股票波动性的比例
1	49.24	1.00
2	37.36	0.76
4	29.69	0.60
6	26.64	0.54
8	24.98	0.51

续表

组合中的股票数	组合年收益率波动性的平均数(%)	组合波动性与单个股票波动性的比例
10	23.93	0.49
20	21.68	0.44
30	20.87	0.42
40	20.46	0.42
50	20.20	0.41
100	19.69	0.40
200	19.42	0.39
300	19.34	0.39
400	19.29	0.39
500	19.27	0.39
1 000	19.21	0.39

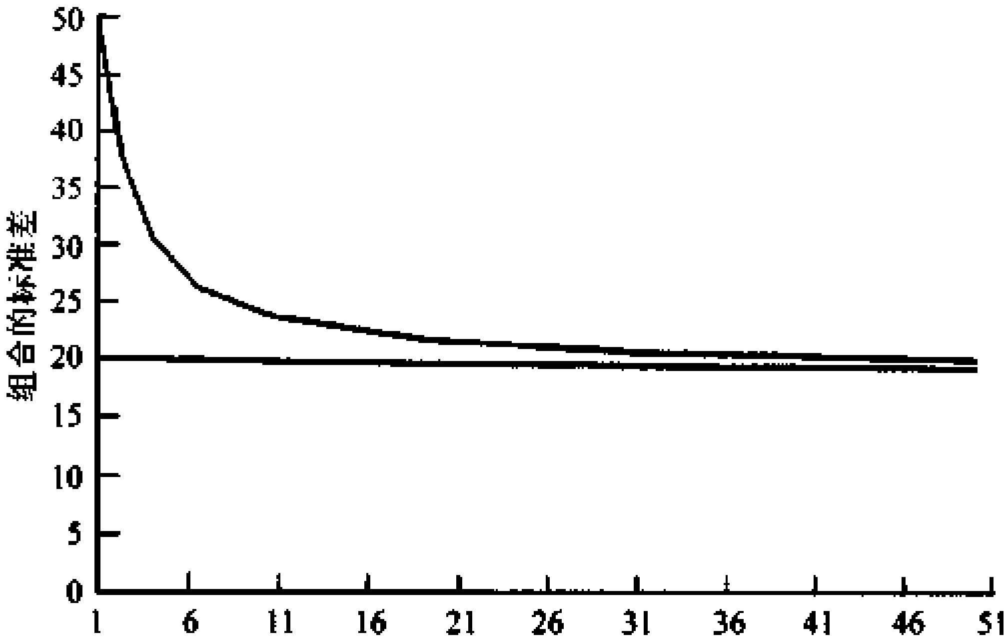


图 3.4

非系统风险是企业特有的风险，诸如企业陷入法律纠纷、罢工、新产品开发失败，等等。系统风险则指整个市场所承受到的风险，如经济的景气情况、市场总体利率水平的变化等因为整个市场环境发生变化而产生的风险。

因为投资者可以通过分散化投资降低以至于消除非系统风险，所以，持有风险分散化投资组合的投资者比起不进行风险分散化的投资者，可以要求相对比较低的投资回报率（预期收益率）。这样，在市场交易中就处于比较有利的竞争地位。市场的均衡定价将根据竞争优势者的行为来确定。因此，市场定价的结果，将只对系统风险提供风险补偿，只有系统风险才是市场所承认的风险。所以，

只有市场所承认的风险（即系统风险）才能获得风险补偿。

对于有风险资产而言，通过市场交易定出的均衡价格，其收益率只包含系统风险的风

险补偿而不对非系统风险提供风险补偿，这一点一定要牢记。

因此，如果我们讨论市场上所有有风险资产的可能组合的话，包含全部有风险资产的可能组合的双曲线的有效边界上的点所代表的投资组合，一定是通过充分的风险分散化而消除了非系统风险的投资组合。

4. 两基金分离定理

现在我们来介绍重要的两基金分离定理。

> **两基金分离定理**：*在所有有风险资产组合的有效组合边界上，任意两个分离的点都代表两个分离的有效投资组合，而有效组合边界上任意其他的点所代表的有效投资组合，都可以由这两个分离的点所代表的有效投资组合的线性组合生成。*

这个定理的数学证明其实并不困难，但对于不熟悉数学推理的读者来说可能会觉得繁琐，所以我们把证明放到本章的附录里，这里先作一点说明。

由前面情况 2 的介绍知，过任意两个分离的各自代表有风险资产的点可以生成一条双曲线。有效组合边界上的两个分离的点可以看作两项有风险资产，它们也就可以生成一条双曲线。有效组合边界本身是一条双曲线。任意两条不同的双曲线不可能在同一侧有两个分离的切点。而如果这两条双曲线在这两个点是相交的话，则由两个点生成的双曲线一定会有一部分落在有效组合边界所围区域的外面。由有效组合边界的定义知这是不可能的，所以这两条双曲线一定重合，亦即两基金分离定理成立。

两基金分离定理在金融上的涵义则是令人吃惊的。有一类专门从事分散化投资的金融中介机构叫做共同基金。共同基金一方面发行小面额的受益凭证作为自己的负债，另一方面则把筹集到的大笔资金进行分散化投资，形成自己的投资组合。如果有两家不同的共同基金，它们都投资于有风险资产，而且都经营良好，经营良好意味着它们的收益/风险关系都能达到有效组合边界。那么，两基金分离定理告诉我们，任何别的投资于有风险资产的共同基金，如果经营良好(即能够达到有效组合边界)的话，其投资组合一定与原来那两个共同基金的某一线性组合等同。只要找到这样两家不同的经营良好的共同基金，把自己的资金按一定的比例投资于这两家基金，就可以与投资于其他经营水平高的共同基金获得完全一样的效果。这一结论对投资策略的制定无疑有重要的意义。

5. 资本市场线

现在我们在投资组合中引入无风险资产。

在所有可能有风险资产组合所构成的双曲线所围区域的有效组合边界左下端，就是最小方差组合。因为有系统风险存在，最小方差组合不是无风险的，其预期收益率也一定高于无风险利率 r_f。于是，在标准差——预期收益率图中，有效组合边界和表示预期收益率大小的纵坐标轴是不相接触的，而代表无风险证券的收益/风险的坐标点是落在这根轴上的。因而，在加入无风险证券后，代表新的组合的点一定落在连接 r_f 点和包含所有可能的有风险资产组合的双曲线所围区域及其边界的某一点的半直线上。

这样的半直线当然有无数多条。但我们很容易从图中发现，当半直线围绕 r_f 点逆时针旋转时，不管投资者的收益/风险偏好如何(即不管效用函数的曲线形状如何)，越在上面的半直线上的点，其效用值越大。于是，效用值最大的半直线一定是与有效组合边界相切的那一条，即连接 r_f 点和 M 点的半直线，见图 3.5。

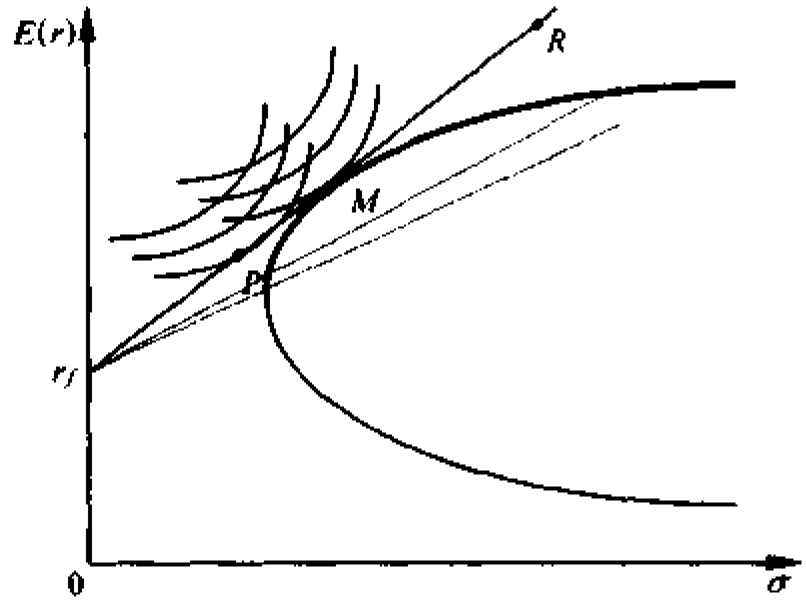


图 3.5

这条半直线实际构成了无风险证券和有风险资产组合的有效组合边界。这条半直线被称为资本市场线(CAL—capital market line)。

现在我们再看一下前面情况 1 里所介绍的。那里的一项有风险资产不会落在所有有风险资产的有效组合边界上，更不会就是切点 M 所代表的投资组合，所以那里所讲的组合就不会是有效组合。在包含无风险证券时，代表有效组合的点必须落在资本市场线上。

在这个包括无风险证券和有风险资产组合的有效组合边界(即资本市场线)上，两基金分离定理实际上依然成立。不过在这里，其中一项基金是无风险证券，而另一项则是切点 M 所代表的有风险资产的组合。资本市场线上任意一点(如 P 点)所代表的投资组合，都可以由一定比例的无风险证券和由 M 点所代表的有风险资产组合生成。

因此得出一个在金融上有很大意义的结果。对于从事投资服务的金融机构来说，不管投资者的收益/风险偏好如何，只需要找到切点 M 所代表的有风险投资组合，再加上无风险证券，就能为所有的投资者提供最佳的投资方案。投资者的收益/风险偏好，就只需反映在组合中无风险证券所占的比重。

这一最佳投资方案的设计与投资者的收益/风险偏好无关的结果，看来更能说明两基金分离定理中“分离”一词的涵义。如前所述，代表最小方差组合的点位于 r_f 点的右上方，从而保证了切点(M 点)的存在性(如果最小方差组合的预期收益率与无风险收益率相等的话，双曲线上的切点会不存在，资本市场线会变成双曲线的渐近线)。资本市场线在 M 点右上方的部分所包含的投资组合(如 R 点)，是卖空了无风险证券(即以无风险利率贷款)后，将所得的资金投资于 M 点所代表的有风险资产组合。

如果 M 点所代表的有风险资产组合的预期收益率和标准差分别是 $E(r_M)$ 和 σ_M，投资于这一有风险资产组合的资金比例是 w_M，投资于无风险证券的资金比例是 $1-w_M$，则加上无风险证券后的组合的预期收益率 $E(r_p)$ 和标准差 σ_p 就应是

$$E(r_p)=r_f+\frac{[E(r_m)-r_f]}{\sigma_M}\sigma_p$$

$$\sigma_p=w_M\sigma_M$$

剩下的任务是要搞明白 M 点所代表的有风险资产组合是什么样的组合。

6. 市场组合

市场组合是这样的投资组合，它包含所有市场上存在的资产种类，各种资产所占的比例和每种资产的总市值占市场所有资产的总市值的比例相同。

举例来说，一个很小的市场只有 3 种资产：股票 A、股票 B 和无风险证券。股票 A 的总市值是 660 亿元，股票 B 的总市值是 220 亿元，无风险证券的总市值是 120 亿元。市场所有资产的总市值是 1 000 亿元。于是，一个市场组合包括所有这 3 种证券，股票 A 的价值在其中占 66%，股票 B 的价值占 22%，无风险证券占 12%。因此，市场组合是一个缩小了的市场盘子。

有风险资产的市场组合就是指从市场组合中拿掉无风险证券后的组合。这样，在上面的例子里，有风险资产的市场组合里，股票 A 和股票 B 的比例是 3∶1(660/220)，即股票 A 占 75%，股票 B 占 25%。

现在我们断言：

> 资本市场线与有风险资产的有效组合边界的切点 M 所代表的资产组合就是有风险资产的市场组合。

首先，任何市场上存在的资产必须被包含在 M 所代表的资产组合里。不然的话，因为理性的投资者都会选择资本市场线上的点作为自己的投资组合，不被 M 所包含的资产就会变得无人问津，其价格就会下跌，从而收益率会上升，直到进入 M 所代表的资产组合。其次，当市场均衡时，对任何一种资产都不会有过度的需求和过度的供给。因为所有的理性的投资者所选择的有风险资产的比例都应同 M 所代表的资产组合里的投资比例相同，所以，在市场处于均衡时，各种有风险资产的市场价值在全部有风险资产的市场总价值里的比重应当和在 M 所代表的资产组合里的比重相同。由此说明 M 所代表的资产组合就是有风险资产的市场组合。

这样就引出了被动的，但很有效的指数化的投资策略。这种策略分两步做：第一步是按照市场的组成比例来构筑有风险资产的组合，这样也一定实现了风险的分散化；第二步是将资金按照投资者的收益/风险偏好分投到无风险证券和所构筑的有风险市场组合中去。这种策略调节起来也非常方便。如果觉得风险偏大，则可适当增大投资于无风险证券的比例，否则反之。在各个金融市场中，已经有好些反映市场总体价格水平变化的指数，如著名的标准普尔 500(Standard & Poor's 500)指数、日经 225 指数、《金融时报》100(FTSE100)指数、恒生指数，以及中国内地的上证指数、深证指数等。表 3.4 是《金融时报》刊载的全球各国主要金融市场指数。它们的构成成份都反映了对应的市场所交易的各

种资产的构成比例。以此类指数为基础而开发的指数产品，往往可以用来作为有风险市场组合的替代品。所以这种投资策略被称为指数化的投资策略。这种被动式的指数化的投资策略在西方被养老基金、共同基金等金融机构广泛地采用，并被用作评估其他主动式的投资策略绩效的依据。

表 3.4

WORLD MARKETS AT A GLANCE

Country	Index	Jul 8	Jul 7	Jul 6	1999 High		1999 Low		✣ Yield	✣ P/E
Argentina	General	20063.53	20234.52	20455.57	23182.96	6/5	14484.90	14/1	3.7	17.6
Australia	All Ordinaries	3088.3	3087.3	3081.9	3145.20	27/4	2804.00	14/1	2.77	24.7
	All Mining	677.2	662.3	671.9	706.80	7/5	552.10	12/4		
Austria	ATX Index	1253.51	1258.20	1261.26	1326.28	4/5	1011.26	22/1	1.91	14.2
Ended lower, although banks gained ground following broker upgrades for German banks.										
Belgium	BEL20	3099.85	3124.48	3147.69	3691.92	6/1	3076.59	2/6	1.65	18.9
Moved lower for the third day running.										
Brazil	Bovespa	11651.0	11745.0	11674.0	12488.00	13/5	5057.00	14/1	6.88	na
✣*Moved lower in early trading.*										
Canada	TSE 100♦	434.76	435.94	440.25	441.80	5/7	376.39	3/3	1.58	24.3
	Metals Minls♦	3907.95	3814.62	3851.02	3877.98	3/5	2853.44	18/2		
	TSE300Comp♦	7159.90	7172.10	7235.04†	7254.50	5/7	6180.39	3/3		
	Portfolio§§	3882.05	3897.04	3931.75	3940.57	5/7	3281.55	3/3		
✣*Lost ground in early trading as interest rate concerns countered improving resources stocks.*										
Chile	IGPA Gen♥	4973.98	4967.77	4945.54†	4967.77	7/7	3297.83	14/1	2.95	17.4
China	Shanghai B	49.67	49.01	50.36	61.18	29/6	21.38	9/3	1.06	39.4
	Shenzhen B	104.98	97.19	100.72	125.42	29/6	41.54	10/3		
Colombia	IBB	(u)	976.60	979.03	1237.28	14/5	850.70	4/2	2.35	7.5
Czech Republic	PX 50	481.3	481.1	(c)	521.50	25/5	333.40	1/3	na	na
Finished with modest losses after the weak opening on Wall Street.										
Denmark	CopenhagenSE	666.33	664.58	668.88	668.88	6/7	565.51	16/3	1.69	18
Moved higher in thin summer volumes on modest gains for bluechips.										
Egypt	Cairo SE Gen	484.9	483.28	482.22	484.90	8/7	396.42	11/1	na	na
Moved higher in healthy volumes.										
Finland	Hex General	8115.38	8178.14	8199.32	8199.32	6/7	5670.46	10/2	1.09	31.4
Nokia fell 1.1 per cent to push the broad market lower.										
France	SBF 250	2966.75	2977.53	2992.04	2999.61	5/7	2507.84	13/1	2.21	20.4
	CAC 40	4631.13	4662.20	4892.51	4897.84	5/7	3956.72	13/1		
Ended lower with bid candidate Elf Aquitaine slipping 2.4 per cent on profit-taking.										
Germany	FAZ Aktien	1777.84	1769.10	1769.91	1777.84	8/7	1480.00	4/3	1.28	20.6
	XETRA Dax	5607.10	5588.50	5612.90	5626.62	5/7	4680.92	3/3		
Reversed early losses to end modestly higher. Banks a firm feature after upgrades.										
Greece	Athens Gen	4245.34	4285.84	4314.70	4360.13	5/7	2798.21	13/1	1.29	30.6
	FTSE/ASE 20	2487.01	2524.44	2560.01	2588.66	5/7	1758.47	13/1		
Dragged lower by profit-taking in banks.										
Hong Kong	Hang Seng	14226.30	14257.44	14372.61	14608.74	5/7	9076.33	10/2	2.3	23.9
	HSCC Red Chip	1290.38	1310.35	1348.69	1367.28	5/7	650.52	8/2		
Hungary	Bux	7277.23	7109.59	7107.58	7277.23	8/7	5253.03	4/3	na	na
Ended 2.4 per cent up following the release of better than expected trade figures.										

因此我们可以清楚地看到，这种最优投资策略的制定，确实是与个别投资者的效用函数无关的。这种投资策略的产生，是市场整合的结果。虽然它经常有悖于人们的常识和感觉，却是金融学的本质特性。学习和研究金融工程的读者必须牢记这一点。

由市场组合(可以看作一个基金)和无风险证券(可以看作另一个基金)构成了新的两基金分离定理:所有的合乎理性的投资组合都是市场组合和无风险证券的一个线性组合，而所有这样的线性组合构成了资本市场线，参见图3.5。这一新的两基金分离定理成为资本资产定价模型的基础。

7. 资本资产定价模型(CAPM)

前述资本市场线理论就是资本资产定价模型(CAPM-capital asset pricing model)的核心内容。资本资产定价模型的提出，标志着分析金融学走向成熟。这一模型在1965年前后由威廉·夏普(William Sharpe)、约翰·林特纳(John Lintner)和简·莫辛(Jan Mossin)分别独立地提出。自马柯维茨的开创性工作到提出资本资产定价模型，其间相隔长达12年，足见现代金融学发展道路的艰难与曲折。

资本资产定价模型有许多前提性的假设条件，主要包括对市场的完善性和环境的无摩擦性(本章前面的分析实际上已经蕴涵着这些假设)。现在我们对主要的假设条件作一简单的介绍：

1) 存在许多投资者，与整个市场相比，每位投资者的财富份额都很小，所以投资者都是价格的接受者，不具备"做市"的力量，市场处于完善的竞争状态。

2) 所有的投资者都只计划持有投资资产一个相同的周期。所有的投资者都是"近视"的，只关心投资计划期内的情况，不考虑计划期以后的事情。

3) 投资者只能交易公开交易的金融工具如股票、债券等，即不把人力资本(教育)、私人企业(指负债和权益不进行公开交易的企业)、政府融资项目等考虑在内。并假设投资者可以不受限制地以固定的无风险利率借贷(容许卖空无风险证券)。

4) 无税和无交易成本，即市场环境是无摩擦的。

5) 所有的投资者的行为都是理性的，都遵循马柯维茨的投资组合选择模型优化自己的投资行为。

6) 所有的投资者都以相同的观点和分析方法来对待各种投资工具，他们对所交易的金融工具未来的收益现金流的概率分布、预期值和方差等都有相同的估计，这就是一致预期假设。

资本资产定价模型只有在这些条件成立的前提下才成立。

资本资产定价模型进一步要讨论的是单项有风险资产在资本市场上的定价问题。描述任何有风险资产组合的风险的标准差 σ_p 可表示为

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\right]^{\frac{1}{2}}$$

其中 w_i:$i=1,\cdots,n$ 是各项资产在组合中的权重。如果市场上一共就有 n 项有风险资产，而组合 p 就是有风险资产的市场组合 M 的话，有

$$\sigma_{iM} = \sum_{j=1}^{n} w_{jM}\sigma_{ij}$$

从而

$$\sigma_M = \left[\sum_{i=1}^{n} w_{iM}\sigma_{iM}\right]^{\frac{1}{2}}$$

其中，w_{iM}是第 i 种资产在有风险资产的市场组合中的比重。

由此我们发现，有风险资产的市场组合的总风险只与各项资产与市场组合的风险相关性(各项资产的收益率与市场组合的收益率之间的协方差)有关，而与各项资产本身的风险(各项资产的收益率的方差)无关。这样，在投资者的心目中，如果 σ_{iM}越大，则第 i 项资产对市场组合的风险的影响就越大，在市场均衡时，该项资产应该得到的风险补偿也就应该越大。于是得出以下的证券市场线(SML—security market line)：

$$E(r_i) = r_f + \frac{[E(r_M) - r_f]}{\sigma_M^2}\sigma_{iM}$$

和

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_M) - r_f)$$

其中 $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$被称为第 i 项资产的 β 系数。这一证券市场线模型的推导，我们也在附录中介绍。图 3.6 画出了 β 系数和预期收益率之间的关系，这就是证券市场线。

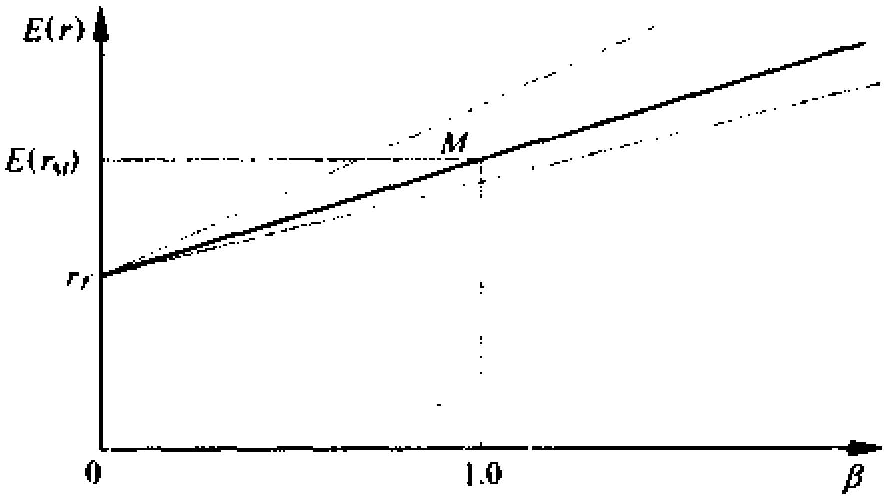


图 3.6

β 系数的一个重要性质是具有线性可加性。若在一包含 n 项资产的投资组合里，各项资产的比重是 w_i，则组合的 β 系数为

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i$$

组合的收益率就是

$$E(r_p) = r_f + \beta_p(E(r_M) - r_f)$$

证券市场线说明，一项有价证券的风险补偿应当是它的 β 系数乘以有风险资产的市场组合的风险补偿。如果一项资产的 β 系数大于 1，该项资产的风险补偿就大于市场组合的风险补偿，意味着这项资产在市场上的价格波动会大于市场的平均价格波动。如果一项资产的 β 系数小于 1，情况则反之，它的价格波动也会小于市场的平均价格波动。从道理上讲，也可以有 β 系数为负的情况。这意味着该项证券的收益与整个市场存在负相关的

关系。从我们已经介绍过的利率的期限结构理论知,无风险利率会随着时间而变化,因此 r_f 点会在轴上上下移动。当 r_f 点的位置变动时,如果证券市场线的斜率不变,则证券市场线发生上下平移。此时说明整个市场对待风险的态度没有发生变化。如果证券市场线的斜率变大,即绕着 r_f 点逆时针方向旋转,说明整个市场对风险的厌恶加大,对同样的风险要求有更大的风险补偿,市场趋于保守。如果证券市场线的斜率变小,即绕着 r_f 点顺时针方向旋转,情况则反之,整个市场对风险的厌恶减小,对同样的风险要求比较小的风险补偿,市场更富于进取精神。

附带提一句,证券市场线的斜率为零的情况在实际中是不会发生的,但这种情况在理论上很有用处。这时说明投资者对风险采取完全无所谓的态度,不对有风险资产要求任何风险补偿。这就是风险中性的情况。风险中性假设与无套利均衡之间存在非常深刻的联系,我们将逐步展开这方面的讨论。

资本资产定价模型有很多用途,最主要有两个方面。第一,在投资基金的实际运作时,经理人员往往只经营他们所熟悉的若干种有价证券,而不是去经营一个市场组合。所以,证券市场线可以用来评估他们的经营业绩。第二,证券市场线常常用来作为确定资本成本的依据,尤其是对一些非竞争性项目(如军事项目或其他秘密项目)来说,是非常有用的。

8. 小结

两基金分离定理和资本资产定价模型是现代投资理论中非常重要的内容。这一理论结果告诉我们,最佳投资组合的设计与个别投资者的收益/风险偏好无关。这一点对于金融工程的产品设计是有指导意义的。另一方面,这一理论又指出指数化的投资策略尽管是一种被动的,但实际上是一种有效的策略,还可以作为其他积极的投资策略业绩衡量的基准。因此,这一理论成果有非常实际的应用价值。它还揭示了指数产品作为基本投资工具的重要意义。

指数化投资策略能够提供的是市场的平均回报。而任何积极的投资策略企图获得高于市场平均回报的收益,因此,如果一种积极投资策略是成功的,就意味着"击败"了市场。要击败市场只在以下的情况是可能的:市场本身存在缺陷。这涉及现代金融理论中一个非常深刻的概念,即市场的效率。如果市场始终是充分有效率的,击败市场就是不可能的。反过来说,积极投资策略的成功都是建立在市场失效的基础上的。我们在下一章(第四章)还会提到这一点,但要到后面第九章才会更加深入地讨论这一概念。

资本资产定价模型也是现代金融学研究中具有里程碑意义的成果,具有极大的理论和实践的重要性。正因为如此,后人对资本资产定价模型开展了许多实证方面的研究工作,希望用经验事实来证明证券市场线的正确性。比较近期的实证检验及其分析结论产生了一些争议。如法马(Eugene F. Fama)等在 90 年代初发表的重要论文,检验的结果认为股票的平均收益率与 β 值无关,因而资本资产定价模型的意义就值得怀疑。但随即又有人提出了不同的意见,通过别的试验给出了不同的解释。

资本资产定价模型遭致质疑的还有一个重要原因,在于这一定价模型是一阶段的。从这个角度出发,以默顿(Robert Merton)为首,后来在研究连续时间金融学(指交易可以不断地发生)时发展出多阶段的资本资产定价模型(ICAPM——intertemporal capital asset pricing model)。因为要考虑多阶段的效用最大化问题，除了资产的投资收益，还要考虑其他的收入(如工薪收入)、消费支出等。通过建立多阶段的动态规划优化模型寻求均衡解，可以获得类似证券市场线的结果。这是资本资产定价模型的重要推广。因为连续时间模型的数学表达式比较复杂，我们不在这里展开讨论，有兴趣的读者可以参阅有关资料。

另外，如果从证券的换手率的角度研究，如果两基金分离定理成立，会导出所有的证券在市场上的换手率都相同这样明显与实际不符的结论。换手率被认为是证券流动性的一种度量(换手率越高，说明变现成本越低)，从而成为新近研究资本市场微观结构的一个热点课题。海外学者从换手率的角度对美国资本市场的研究，以及我们自己最近对新兴的中国资本市场的研究，实证结果都表明在实际的市场上并不是两基金分离，而是近似地成立三基金分离。也就是说，从统计意义上看，市场上所有的交易都可以看作是在两个有风险证券的投资组合(其中有一个近似地是市场组合)，再加上无风险证券之间的交易。

尽管如此，资本资产定价模型对于现代金融理论和商务实践的发展来说其意义是无法否认的。迄今为止，它仍然是投资理论的重要组成部分，并对金融资产的定价乃至实证会计的研究起着重要的支持作用。

练习题

设证券市场包括无风险证券和 N 种股票，市场无摩擦，某年 1～5 月份股票 A 和股票市场组合 M 的收益率(单位%/年)如下：

月份	1	2	3	4	5
r_{Ai}	31.5	27.5	25.5	19.5	31.5
r_M	22	20	18	16	24

设股票收益率满足 $r_{Ai}=E(r_{Ai})+\varepsilon_{Ai}$，求：

1) 市场均衡时的无风险利率 r_f；

2) 计算 r_A 的系统风险 σ_S^2 和个别风险 σ_I^2。

第三章数学附录

1. 两基金分离定理的证明

我们的证明需要用到矩阵代数的知识。先来定义一些符号：$U=\{\sigma_{ij}\}$；$i,j=1,\cdots,n$ 是协方差阵（当 $i=j$ 时，σ_{ii} 就表示方差）。因为 $\sigma^2>0$，所以矩阵 U 严格正定。$\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}^T$ 表示各项有风险资产在组合中的权重向量。$\vec{r}=\{E(r_1),\cdots,E(r_n)\}^T$ 代表组合中各项资产的预期收益率的向量。$\vec{1}=\{1,\cdots,1\}^T$ 是单位向量，$\vec{0}=\{0,\cdots,0\}^T$ 是零向量。对于任一给定的 $E(r)$，求解以下二次规划

$$\min_{\vec{w}} \frac{1}{2}\vec{w}^T U\vec{w}$$

$$\text{s.t.}\ \vec{w}^T\vec{r} = E(r)$$

$$\vec{w}^T\vec{1} = 1$$

其中目标函数前面加上$\frac{1}{2}$纯粹是为了运算的方便。

定义拉格朗日函数如下：

$$\min_{(\vec{w},\lambda,\mu)} L = \frac{1}{2}\vec{w}^T U\vec{w} + \lambda(E(r) - \vec{w}^T\vec{r}) + \mu(\vec{1} - \vec{w}^T\vec{1})$$

求解这一优化问题，假定 $\vec{w}$ 是对应于 $E(r)$ 的优化解，即 $\vec{w}$ 构成的组合是最小方差曲线上的一个点。则必定满足下面的方程组

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{w}} = U\vec{w} - \lambda\vec{r} - \mu\vec{1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E(r) - \vec{w}^T\vec{r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \vec{1} - \vec{w}^T\vec{1} = 0$$

因为是二次规划，所以一阶优化条件既是必要条件，又是充分条件。

从第一个方程解出

$$\vec{w} = \lambda(U^{-1}\vec{r}) + \mu(U^{-1}\vec{1})$$

两边分别乘以 $\vec{r}^T$ 和 $\vec{1}^T$，得到以下方程组

$$E(r) = \lambda(\vec{r}^T U^{-1}\vec{r}) + \mu(\vec{r}^T U^{-1}\vec{1})$$

$$\vec{1} = \lambda(\vec{1}^T U^{-1}\vec{r}) + \mu(\vec{1}^T U^{-1}\vec{1})$$

由这个方程组可以解出

$$\lambda = \frac{CE(r) - A}{D}$$

$$\mu = \frac{B - AE(r)}{D}$$

此处

$$A = \vec{1}^T U^{-1}\vec{r} = \vec{r}^T U^{-1}\vec{1}$$
$$B = \vec{r}^T U^{-1}\vec{r}$$
$$C = \vec{1}^T U^{-1}\vec{1}$$
$$D = BC - A^2$$

因为 U 的逆阵 U^{-1} 仍然是正定阵，所以有 $B>0$ 和 $C>0$。另外，因为

$$(A\vec{r} - B\,\vec{1})^T U^{-1}(A\vec{r} - B\,\vec{1}) = B(BC - A^2) = BD > 0$$

所以也有 $D>0$。令

$$\vec{m} = \frac{1}{D}[B(U^{-1}\vec{1}) - A(U^{-1}\vec{r})]$$

$$\vec{n} = \frac{1}{D}[C(U^{-1}\vec{r}) - A(U^{-1}\vec{1})]$$

对应于预期收益率 $E(r)$，最小方差曲线上的点所代表的组合 $\vec{w}$ 就可唯一地表示为

$$\vec{w} = \vec{m} + E(r)\vec{n}$$

有效组合边界是最小方差曲线的上半枝，有效组合边界上任意两个分离的点，分别对应预期收益率为 $E(r_1)$ 和 $E(r_2)$ 的两个组合 $\vec{w}_1$ 和 $\vec{w}_2$，因为两个点是分离的，所以必定有 $E(r_1)\neq E(r_2)$。对于有效组合边界上任意另外的点所代表的组合 $\vec{w}_p$，对应的预期收益率为 $E(r_p)$，则必定存在一个实数 α，使有

$$E(r_p) = \alpha E(r_1) + (1 - \alpha)E(r_2)$$

按比例 $\{\alpha,(1-\alpha)\}$ 把 $\vec{w}_1$ 和 $\vec{w}_2$ 组合起来，就有

$$\begin{aligned}\alpha\vec{w}_1 + (1 - \alpha)\vec{w}_2 &= \alpha(\vec{m} + E(r_1)\vec{n}) + (1 - \alpha)(\vec{m} + E(r_2)\vec{n}) \\ &= \vec{m} + (\alpha E(r_1) + (1 - \alpha)E(r_2))\vec{n} \\ &= \vec{m} + E(r_p)\vec{n} = \vec{w}_p\end{aligned}$$

所以，有效组合边界上所有的点所代表的组合，都可以由任意两个分离的点所代表的两个组合生成，两基金分离定理成立。

有效组合边界上任意一点所代表的组合的预期收益率 $E(r_p)$ 和方差 σ_p^2 之间的关系，可以根据上述 $\vec{w}_p=\vec{m}+E(r_p)\vec{n}$ 的关系导出为

$$\sigma_p^2 = \vec{w}_p^T U \vec{w}_p = \frac{C}{D}(E(r_p) - A/C)^2 + 1/C$$

即有

$$\frac{\sigma_p^2}{1/C} - \frac{(E(r_p) - A/C)^2}{D/C^2} = 1$$

所以，有效组合边界是双曲线。

2. 证券市场线的推导

假如按比例$\{\alpha,(1-\alpha)\}$将资金投入证券 i 和有风险市场组合 M，这样形成的投资组合 p 的预期收益率和标准差是

$$E(r_p) = \alpha E(r_i) + (1-\alpha)E(r_M)$$

$$\sigma_p = [\alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_M^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iM}]^{1/2}$$

将它们分别对参数 α 求导数，得到

$$\frac{\mathrm{d}E(r_p)}{\mathrm{d}\alpha} = E(r_i) - E(r_M)$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_p}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 - \sigma_M^2 + \alpha\sigma_M^2 + \sigma_{iM} - 2\alpha\sigma_{iM}}{[\alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_M^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iM}]^{1/2}}$$

由此可以求出在标准差——预期收益率图上连接代表证券 i 的点（该点在最小方差曲线围成的区域以内而不在有效组合边界上）和代表有风险市场组合的点 M 的曲线（也应是一段双曲线）上的点 p 的切线的斜率。斜率应当为

$$\frac{\mathrm{d}E(r_p)}{\mathrm{d}\sigma_p} = \frac{\mathrm{d}E(r_p)/\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\sigma_p/\mathrm{d}\alpha}$$

$$= \frac{[E(r_i) - E(r_M)][\alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_M^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iM}]^{1/2}}{\alpha\sigma_i^2 - \sigma_M^2 + \alpha\sigma_M^2 + \sigma_{iM} - 2\alpha\sigma_{iM}}$$

如果 $\alpha=0$，即所有的资金都投入到有风险市场组合 M 中，此时组合 p 就成为有风险市场组合 M。上式变成

$$\left.\frac{\mathrm{d}E(r_p)}{\mathrm{d}\sigma_p}\right|_{p=M} = \frac{[E(r_i) - E(r_M)]\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}$$

因为 M 在有效组合边界上，连接代表证券 i 的点和代表有风险市场组合的点 M 的曲线不能穿越有效组合边界，所以在 M 点的切线必须和资本市场线重合，即斜率与资本市场线的斜率相等。于是有

$$\frac{[E(r_i) - E(r_M)]\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$$

上面这个式子变一下形就得到证券市场线

$$E(r_i) = r_f + \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}(E(r_M) - r_f)$$

$$= r_f + \beta_i(E(r_M) - r_f)$$

由此完成推导。

第四章 指数模型和套利定价理论

资本资产定价模型对于投资策略的选择具有重要的指导意义，而且，其表现形式非常简洁优美。除了在上一章小结里已经讨论过的，在实际应用中还存在以下问题。

第一，要实际地计算有风险市场组合，如果不是说做不到，也是非常繁重复杂的。试想，要测算出有风险市场组合里许多种股票的预期收益率、方差和彼此之间的协方差，统计计算的工作量会有多大？更何况还要随时根据市值的变化来调整比重。即使有计算机高速运算能力的支持，对于一般的投资者来说，仍然是很不方便的。第二，证券市场线实际只考虑了有风险市场组合的预期收益率对证券或证券组合预期收益率的影响，即把市场风险（系统风险）全部集中地表现在一个因素里，这样的分析自然过于笼统。事实上，影响总体市场环境变化的宏观因素是多方面的，可以集中地表现为一些宏观经济变量（经济指数）的变化，如国民收入、通货膨胀率、利率水平、能源价格，等等。这样，分析单个或多个因素对证券或证券组合市场价值（包括预期收益率和相关的风险）的影响，当然是很有实际意义的。

我们通过介绍指数模型来回答这两个问题，并进一步阐述前一章所提到的指数化投资策略。

为了进一步加深对无套利均衡分析方法的理解，我们要在本章讨论套利定价理论（APT——arbitrage pricing theory）。套利定价理论本身是一项非常重要的现代金融学理论成果。资本资产定价模型的成立需要许多有关市场环境的理想化条件，套利定价理论集中强调无套利原则，因此在某些方面可以弱化与实际不符的要求。但套利定价理论与资本资产定价模型相比各有优劣，我们将进行仔细的比较分析。

1. 单指数模型

表 4.1 的统计数据反映了公司 i 的股票收益率和国内生产总值(GDP)的增长率（简记为因素 G）和通货膨胀率（简记为 I）6 年的统计情况。

表 4.1

年度	GDP 的增长率 (G)	通货膨胀率 (I)	公司 i 的股票的实际收益率与无风险利率的差($r_i - r_f$)
1	5.7%	1.1%	14.3%
2	6.4	4.4	19.2
3	7.9	4.4	23.4
4	7.0	4.6	15.6
5	5.1	6.1	9.2
6	2.9	3.1	13.0

我们先只考虑一个宏观经济指数(即 G 这一个因素)对公司 i 的股票收益率的影响。

在第二章里,我们已经详细地讨论过市场对无风险利率的预期变化(利率的期限结构)的问题。为了把问题分析清楚,我们把无风险利率的变化放到一边,只考虑宏观经济变量对风险补偿的影响,即研究 G 与公司 i 的股票收益率的风险补偿 $r_i - r_f$ 的关系,并把 r_f 当作常量(外生变量)处理。

用最简单的一元线性回归(最小二乘法)可以回归出二者的关系如图 4.1,同时得出方程

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i G + e_i$$

其中 r_i,G 和 e_i 都是随机变量,α_i 和 β_i 是由回归确定的系数。因为我们只考虑 G 一个宏观变量的作用,即认为只有 G 是产生市场风险(系统风险)的因素,所以 e_i 只反映企业风险(非系统风险)。市场的交易只对系统风险提供风险补偿,所以一定有 $E(e_i)=0$。即有

$$E(r_i) - r_f = \alpha_i + \beta_i E(G)$$

这里 $E(\cdot)$当然表示数学期望值(即预期值)。

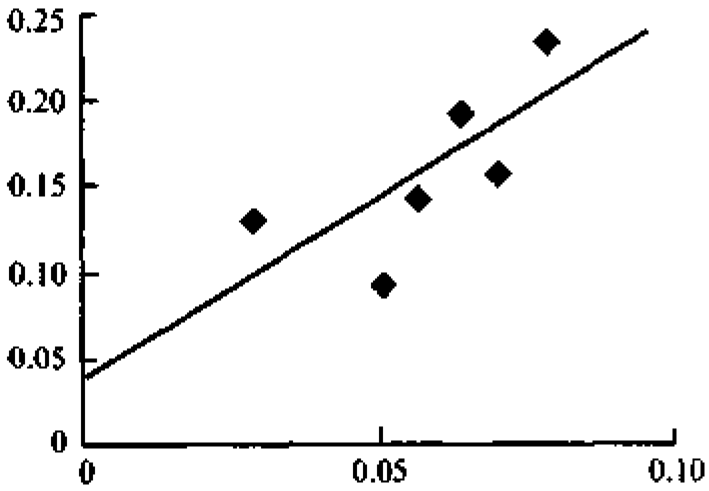


图 4.1

α_i 表示如果 GDP 的预期增长率为 0 时股票预期的风险补偿,β_i 则是公司 i 的股票的预期风险补偿对 GDP 的预期增长率的敏感度。由图 4.1 知,$\alpha_i=4\%$。β_i 实际上就是图 4.1 中回归直线的斜率,所以 $\beta_i=2$。如果预期 GDP 的增长率为 5%,则公司 i 的股票的预期风险补偿将是 $4\%+2\times5\%=14\%$。如果预期 GDP 的增长率提高 1 个百分点,则股票的预期风险补偿将提高 2 个百分点,如果无风险利率不变的话,则股票的预期收益率也将提高 2 个百分点。在我们的实例里,第 6 年 GDP 的增长率是 2.9%,而股票的实际风险补偿是 13%,按回归公式计算的 α_i 是 4%,β_i 为 2。因此,有 $+3.2\%(13\%-(4\%+2\times2.9\%))$的股票风险补偿(亦即股票收益率)是来自公司 i 自身的贡献(由 e_i 给出),与市场的总体情况无关。

现在我们来看公司 i 的股票的收益风险补偿的方差。因为 e_i 与 G 不相关,所以可以导出

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_G^2 + \sigma_{e_i}^2$$

前面 $\beta_i^2\sigma_G^2$ 反映了系统风险,后面的 $\sigma_{e_i}^2$则是非系统风险。如果经统计测算出 GDP 增长率的方差是 $\sigma_G^2=0.0003$,同样用统计测算出描述非系统风险的 $\sigma_{e_i}^2$是 0.00152,则可算出股票收益的风险补偿的方差为 0.00272。

再来看协方差。如果另外有一家公司 j 的股票，根据其业绩表现统计测算出它的 $\beta_j=4$。股票 i 和 j 的收益风险补偿的协方差可以容易地按下式算出。

$$\sigma_{ij}=\beta_i\beta_j\sigma_G^2$$

所以有 $\sigma_{ij}=2\times4\times0.0003=0.0024$。

这样一来已经大大地减少了计算的工作量。因为如果组合里有 n 项资产，计算组合的方差——协方差矩阵需要进行 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次方差——协方差的测算，但现在只需要测算 n 个 β_i 和 1 个 σ_G^2 就可以了。如果 $n=50$，则前者需要 1 275 次测算，后者只需 101 次，工作量相差颇为悬殊。

2. 市场模型

第三章讨论的资本资产定价模型实际上就是一种特殊的单指数模型。

我们先用有风险市场组合的收益率的风险补偿来作为宏观经济指数。于是有

$$r_i-r_f=\alpha_i+\beta_i(r_M-r_f)+e_i$$

因为上述关系对于证券组合也一样成立，如果 i 就代表有风险市场组合本身，那么回归结果一定会有，$\alpha_M=0$，$e_M=0$ 和 $\beta_M=1$。

任何证券 i 的风险补偿和有风险市场组合的风险补偿之间协方差就应该是

$$\sigma_{iM}=\beta_i\beta_M\sigma_M^2=\beta_i\sigma_M^2$$

请注意，因为我们把无风险利率作为常数处理，所以风险补偿之间的协方差和收益率之间的协方差是一样的。从而

$$\beta_i=\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

这里的 β_i 和我们在第三章介绍的资本资产定价模型（证券市场线）里的 β 系数是完全一样的，这也就是我们为什么把指数模型里对宏观经济变量变化的敏感度也定义为 β 的原因。

于是我们得到

$$E(r_i)-r_f=\alpha_i+\beta_i(E(r_M)-r_f)$$

与资本资产定价模型做比较，多了一个 α_i。α_i 是证券的收益超出由资本资产定价模型给出的市场均衡收益率的部分。因此，如果处于均衡状态，对所有的资产来说，都应该有 $\alpha_i=0$。

如果在市场上有一项共同基金 A，它的运作水平使 $\alpha_A>0$，将会出现什么情况呢？例如，现在市场的无风险利率是 6%，有风险市场组合的风险补偿是 8%，基金组合 A 的 β 值是 0.5，$\alpha_A=1\%$。这时 A 点会落在证券市场线的上面。现在我们断言：

1）A 点和有风险市场组合 M 点生成的双曲线不会在 M 点与资本市场线相切。因为如果相切的话，将会导出 A 点必定落在证券市场线上的结论（参见第三章的附录 2）。

2）A 点也一定不会落在有效组合边界上。否则，由两基金分离定理知 A 点和 M 点生成的连线就是有效组合边界，也就与第 1 点不符。

这样，优化地组合 A 点和 M 点得到的新的组合就会落到资本市场线的上面（见图

4.2 中 B 点)。将这个新的组合再与无风险证券组合,就能得到比市场的均衡更好的效益。因此,

如果能找到具有正的 α_A 的投资组合,就能够击败市场。

这一点在实践中往往用作制定积极的投资策略的依据。另外,如果对组合 A 容许卖空的话,只要 $\alpha_A \neq 0$ 就可以设计出击败市场的投资策略。当然,此类投资策略要成立,意味着市场一定在某些方面存在着缺陷而导致失衡。我们在第三章正文的讨论中,始终没有考虑市场在某些方面会失衡的情况,但在小结中已经提到了这一点。

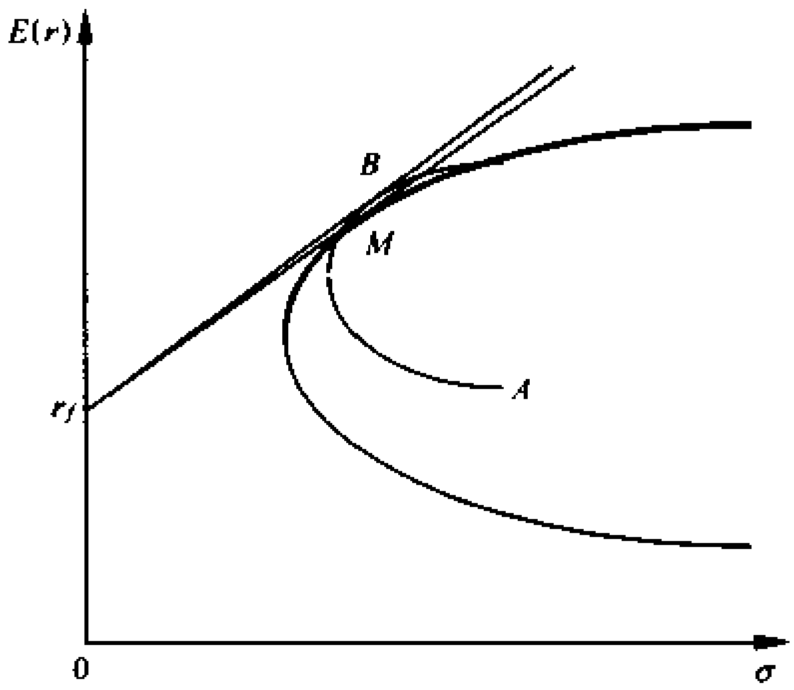


图 4.2

在市场实践中,表示有风险市场组合的宏观经济指数就是证券市场的价格指数,如我们在第三章所提到的一些著名指数。采用指数来代替有风险市场组合,通过统计方法测算出指数的统计特性(如数学期望值、方差等),由前面的讨论知,可以大大简化计算工作量。因此,指数化的投资策略提供了实际可行的途径。并且,就像国库券的收益曲线描述了无风险利率一样重要,证券市场的价格指数也就成为有风险资产估值和定价的基础,也是设计投资策略的强有力的工具。

3. 多指数模型

我们只需考虑 2 个因素的情况,更多因素的情况不难加以推广。在数学上,则需要一点多元回归分析的知识。

回过头来再利用开始时的例子,把 GDP 增长率 G 和通货膨胀率 I 的影响都考虑在内,就有

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_{iG} G + \beta_{iI} I + e_i$$

利用表 4.1 的数据回归后,可算出 $\alpha_i = 5.8\%$,$\beta_G = 2.2$,$\beta_I = -0.7$。如果用第 6 年的实际数据代入,可以算得公司的预期收益的风险补偿是 10%(=5.8%+2.2×2.9%

$-0.7\times3.1\%$)。所以，不因宏观因素的影响，由企业非系统性因素所产生的影响是 $3\%(13\%-10\%)$。

现在我们来看公司收益率的方差(因为认为无风险利率不变，所以收益率的方差就是收益风险补偿的方差)。有

$$\sigma_i^2 = \beta_{iG}^2\sigma_G^2 + \beta_{iI}^2\sigma_I^2 + 2\beta_{iG}\beta_{iI}\mathrm{cov}(G,I) + \sigma_{ei}^2$$

在我们的数字例子里，不难统计算出 $\sigma_G^2=0.0003$，$\sigma_I^2=0.00029$，$\mathrm{cov}(G,I)=0.00065$，$\sigma_{ei}^2=0.00152$。于是可以算得 $\sigma_i^2=0.00291$，标准差为 $\sigma_i=0.0540$。

在讨论了多指数模型后，我们就可以转入介绍套利定价理论。指数模型最早是由诺贝尔经济学奖得主夏普(William F. Sharpe)在 1963 年发表的，他获奖的主要原因则是在建立资本资产定价模型方面的贡献。

4. 套利概念的深化

我们在讨论无套利均衡分析方法时曾指出，关键之处在于互相复制的头寸在未来的现金流能够实现完全的对冲，如果目前市场中互相复制的头寸的价格不一样，就有了套利机会。当市场的套利力量重建均衡消除套利机会时，就能定出头寸的均衡价格。因此，套利就是利用市场价格的暂时性失衡来无风险地套取利润的活动。

但套利活动还可以倒过来看，如果两项(组合)头寸现在的市场价格相等，而其中一项的未来收入现金流不管发生什么情况都会大于另一项头寸未来的收入现金流，则对前一项头寸做多头并同时对后一项头寸做空头，二者组合起来构筑的组合头寸在目前是所谓的零投资组合，即目前不需要投资者投入任何自己的资金，但未来不管发生什么情况，其组合现金流的净现值是大于零的，所以这也就是一个套利组合。我们在第二章讨论远期价格时已经接触过这种情况。

现在我们来看一个比较复杂、不是显而易见的例子。

假定有 A,B,C,D 四家公司，在两个宏观经济变量(通货膨胀率和真实利率水平)的影响下，其收益率会出现 4 种不同的情况(见表 4.2)。

表 4.2

	真实利率高		真实利率低	
	通货膨胀率高	通货膨胀率低	通货膨胀率高	通货膨胀率低
情况发生概率	25%	25%	25%	25%
股票	收益率(%)			
A	−20	20	40	60
B	0	70	30	−20
C	90	−20	−10	70
D	15	23	15	36

这 4 种股票目前的价格、预期收益率、标准差和相关系数矩阵见表 4.3。

表 4.3

股票	当前价格	预期收益率(%)	标准差	相关系数矩阵			
				A	B	C	D
A	10元	25	29.58%	1.00	−0.15	−0.29	0.68
B	10元	20	33.91	−0.15	1.00	−0.87	−0.38
C	10元	32.5	48.15	−0.29	−0.87	1.00	0.22
D	10元	22.25	8.58	0.68	−0.38	0.22	1.00

根据这些数据我们很难直接看出套利机会。现在我们把A,B,C三种股票以等权重组合起来,再与股票D进行比较,得到表4.4。

表 4.4

	真实利率高		真实利率低	
	通货膨胀率高	通货膨胀率低	通货膨胀率高	通货膨胀率低
A,B,C的等权重组合	23.33%	23.33%	20.00%	36.67%
D	15.00%	23.00%	15.00%	36.00%

根据表4.4可算出A,B,C三种股票的组合和D股票的预期收益率、标准差和相关系数,如表4.5。

表 4.5

	预期收益率(即平均值)	标准差	相关系数
三种股票的组合	25.83%	6.40	0.94
D股票	22.25%	8.58	

这两种投资方式并不是完全正相关的。因此,它们并不能完全互相复制。但是,组合的预期收益率高于D股票,标准差又小于D股票,所以组合明显优于D股票。因此,任何投资者,不管其对风险的厌恶程度如何,都可以利用这种相比较的优势来套利。套利的方法很简单,只要相应地对股票D做空头并将卖空所得再同时作A,B,C三种股票的组合多头即可。

假设卖空300 000万股股票D,将所得的3 000 000万元分别购买100 000万股股票A,B和C。在不同情况下的现金流如表4.6。

表 4.6

股票	即时投资现金流(万元)	真实利率高		真实利率低	
		通货膨胀率高(万元)	通货膨胀率低(万元)	通货膨胀率高(万元)	通货膨胀率低(万元)
股票A	−1 000 000	−200 000	200 000	400 000	600 000
股票B	−1 000 000	0	700 000	300 000	−200 000
股票C	−1 000 000	900 000	−200 000	−100 000	700 000
股票D	3 000 000	−450 000	−690 000	−450 000	−1 080 000
组合	0	250 000	10 000	150 000	20 000

从即时现金流来看，我们的投资组合是零投资组合，即开始(至少在理论上)可以完全不需要任何资金投入。但在以后则不管发生什么情况都能得到正的利润。这当然是套利。只要这一机会不消失，套利就可以一直进行下去。而且从理论上讲，只需有一位投资者就可以运作很大规模的资金进行套利。市场当然会很快地做出反应，股票D的价格会下跌，其他三种股票的价格会上升，套利机会就被消除掉。

只要存在无风险的套利机会，从理论上说，套利者会倾向于构筑无穷大的套利头寸来套取无穷大的利润。这种巨大的套利头寸马上就成为推动市场价格变化的市场力量，迅速地消除掉套利机会。

但是我们必须认清排除无风险套利机会建立市场价格均衡和收益/风险权衡关系建立市场价格均衡这二者之间的区别。区别在于：

> 收益/风险权衡关系所主导的市场价格均衡，一旦价格失衡，就会有许多投资者调整自己的投资组合来重建市场均衡，但每位投资者只对自己的头寸做有限范围的调整。套利则不然，一旦出现套利机会，每一位套利者都会尽可能大地构筑套利头寸。因此从理论上讲，只需要少数几位(甚至在理论上只需一位)套利者就可以重建市场均衡。

因此，无套利均衡分析比收益/风险权衡的均衡分析要强得多。收益/风险权衡分析只是经济学中供需分析的一个例子，而无套利均衡分析则是现代金融学特有的研究分析方法。正因为金融市场的均衡是由套利力量建立的，所以金融市场的效率远高于一般的商品和服务市场。

我们来看资本资产定价模型(CAPM)。CAPM是典型的收益/风险权衡所主导的市场均衡，每一位投资者都按照自己的收益/风险偏好选择位于有效组合边界上的投资组合。如果市场组合中某一项证券价格失衡，资本市场线就会发生移动，所有的投资者都会吸纳价值被低估的证券而抛出价值被高估的证券。所以重建市场均衡的力量来自于许多投资者的共同行为，而每位投资者只是小范围地调整其投资组合的头寸。

请注意，在我们的理论概念中，套利必须是无风险的。但在实际的市场操作中，金融业者往往采取比较宽泛的定义。他们的套利概念并不严格要求完全无风险，只要是搜寻定价失衡机会的套作就都可称为套利。有时就把这种套利称作风险套利。

我们在以后讨论衍生工具时会发现，因为衍生工具的价格受其标的物的价格的制约，对于此类金融工具，严格的无套利定价在实际中是可以操作的。对于股票等原生工具来说，无套利分析必须和风险分散化结合起来讨论。

5. 单因素的套利定价理论(APT)

套利定价理论(APT——arbitrage pricing theory)是司蒂纹·罗斯(Stephen Ross)在1976年发表的。虽然套利定价理论真正有用的是多因素的情况，但为了加深理解起见，我们先来考虑只存在一个具有系统性影响的宏观因素的情况。并且，为了在表达上更一般化，我们把这个宏观因素记为F。

单因素的套利定价模型中先有这样的关系

$$r_i = E(r_i) + \beta_i F + e_i$$

这里 r_i、F 和 e_i 是随机变量，r_i 是第 i 项金融工具的实际实现的收益率，$E(r_i)$是其预期收益率(期望收益率亦即收益率的概率平均值)，F 是宏观经济因素的实际值，请注意，它的预期值(概率平均值)应当为零。所以，F 的值实际就是对预期值的偏离。e_i 则是企业所特有原因对所发行的金融工具的收益所造成的扰动。请注意，e_i 的预期值也是零。而且，非常重要的是，e_i 不但对宏观因素 F 是不相关的，而且对于不同的 i 和 j，e_i 和 e_j 互相间也都是不相关的。如果我们回顾一下对 CAPM 的介绍，在讨论风险的分散化时，曾经提到系统风险是由各种金融工具在收益变动上存在某种“同向性”，经过投资分散化后，组合的方差只与组合中证券的平均协方差有关。在这里，e_i 只代表纯粹的非系统风险，它们不但与产生系统风险的宏观因素 F 不相关，而且收益变动不再有任何“同向性”(以及“反向性”)，因此彼此之间也都不相关，即所有的彼此相关性都已被分离到宏观因素 F 中。所以，这一模型将系统风险和非系统风险严格地分开。

举例来说，如果宏观因素 F 取作未预期的GDP的增长率的变化，GDP 增长率的预期是 4%，而实际增长只有 3%，于是 $F=-1\%$。β_i 是第 i 项金融工具的收益率对宏观因素 F 的敏感度，这里假定 $\beta_i=1.2$。于是，这项金融工具实际实现的收益率因为宏观因素的影响将比预期的收益率低 1.2%。再加上非系统风险的影响 e_i，就可以确定实际实现的收益率。

现在我们来看一个非系统风险被充分分散化掉的投资组合 P。在这个组合里，n 项金融工具的权重为 w_i，$i=1,\cdots,n$，$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$。于是组合的收益率为

$$r_P = E(r_P) + \beta_P F + e_P$$

此处有

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$$

$$e_P = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i$$

我们也就可以求出组合的方差

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_F^2 + \sigma^2(e_P)$$

这里 σ_F^2 是宏观因素的方差，$\sigma^2(e_P)$是组合的非系统风险，由下式给出

$$\sigma^2(e_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma^2(e_i)$$

(因为各个 e_i 彼此之间不相关，所以协方差项都为零)。

为了分析简单起见，假定组合中各项金融工具的权重都相等，即有 $w_i=\frac{1}{n}$，$i=1,\cdots,n$。于是有

$$\sigma^2(e_P) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2(e_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma^2(e_i)}{n} = \frac{1}{n}\overline{\sigma^2(e_i)}$$

其中$\overline{\sigma^2(e_i)}$代表各项金融工具的平均方差。显然，当 n 很大时，组合的方差就会变得很小，即非系统风险通过投资分散化被消除掉。因此，对于一个充分分散化的投资组合来说，其

收益率和风险为

$$r_P = E(r_P) + \beta_P F$$

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_F^2$$

请注意，在一个充分分散化的投资组合中，各项证券的比重不一定是要等权重的。

如果有两个充分分散化的投资组合 A 和 B，有 $\beta_A=\beta_B$，就必定有 $E(r_A)=E(r_B)$，否则要出现套利机会。例如，若 $\beta_A=\beta_B=1.0$，$E(r_A)=10\%$，$E(r_B)=8\%$，我们卖空价值 100 万元的组合 B，同时将这卖空所得的 100 万元投资于组合 A，就能套取 2 万元的无风险利润。算式如下

到期 A 多头的收益	$(10\%+1.0\times F)\times 100$ 万元
到期 B 空头的支付	$-(8\%+1.0\times F)\times 100$ 万元
净利润	$2\%\times 100$ 万元 $=2$ 万元

因此，

> **如果两个充分分散化的投资组合有相同的 β 值，它们在市场中必定有相同的预期收益。**

这里，读者一定要清楚地认识到，这一结论是根据上面的两个等式得出的。如果两个充分分散化的投资组合有相同的 β 值，描述风险的方差就是相等的(第二个等式)，如果预期收益率不相等，则由第一个等式知它们的实际发生的收益率就会不相等，于是就会出现无风险套利机会。

对于有不同 β 值的充分分散化的投资组合，其预期收益率中风险补偿必须正比于 β 值，不然也将发生无风险套利。参见图 4.3，假定无风险收益率是 $r_f=4\%$，有一充分分散化的投资组合 C 的 β 值为 $\beta_C=0.5$，具有预期收益率 6%。在图中，代表投资组合 C 的点位于连接无风险资产和组合 A 的直线的下方。现在我们来看另一个投资组合 D，这个组合一半由组合 A 另一半由无风险资产组成。这样，组合 D 的 β 值为 $\beta_D=1/2\times 0+1/2\times 1.0=0.5$，预期收益率是 $E(r_D)=1/2\times 4\%+1/2\times 10\%=7\%$。组合 D 和组合 C 的 β 值相等而预期收益率不等，如前所述，会发生套利。因此，所有充分分散化的投资组合的预期收益率和 β 值的关系都应当是落在从 r_f 点出发的直线上，各个组合的风险补偿的大小正比于其 β 值。

现在我们把有风险市场组合看作一个充分分散化的投资组合，再以有风险市场组合的未预期到的收益变化作为系统风险的度量。有风险市场组合的 β 值当然为 1，因为产生系统风险的因素就是它本身。代表有风险市场组合的 β 值($\beta_M=1$)和预期收益率之间的关系的点也就落在图 4.3 的直线上。于是对任意充分分散化的投资组合，其预期收益率和 β 值的关系就可表示成

$$E(r_P) = r_f + [E(r_M) - r_f]\beta_P$$

这实际上就是资本资产定价模型中的证券市场线。但是请注意，在导出资本资产定价模型时，需要许多有关市场完善性和环境的无摩擦性的假设，这里在套利定价理论(APT)的研究中，则没有用到这些假设。这是 APT 理论的优越性，同时也说明，即使原来在 CAPM

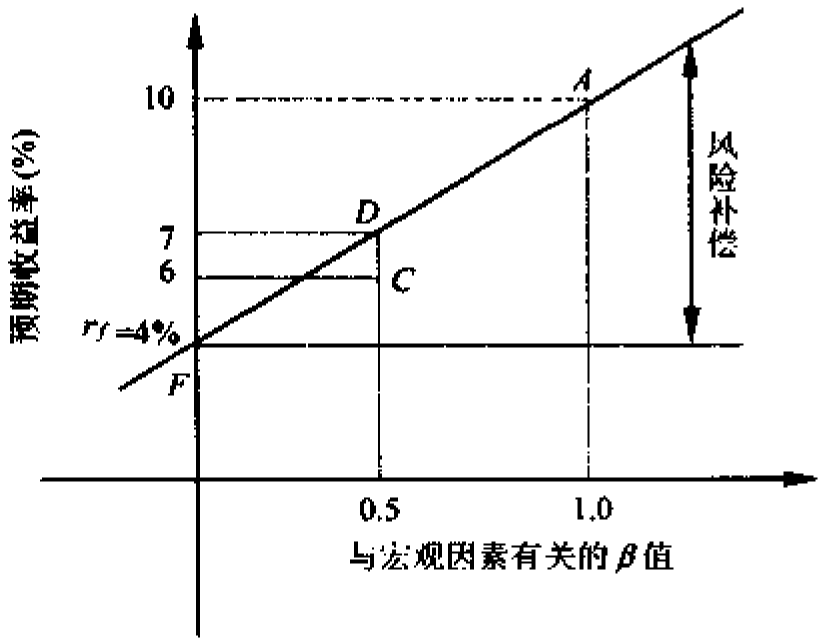


图 4.3

中的那些限制性条件不严格成立，CAPM 所揭示的关于预期收益率和 β 值之间的关系也至少是近似地成立的。

还有一点非常值得注意：在 CAPM 里，必须依靠有风险市场组合才能导出资本市场线和证券市场线，即有风险市场组合是定价的基准。APT 则不需要这个唯一的基准，任何一个充分分散化的投资组合都可以作为基准来导出证券市场线。这样一来，任何指数化的投资组合(它一定是非系统风险被充分分散化的投资组合)都可以用来为证券定价。这又是 APT 的一项优越性。但以上我们只讨论了充分分散化的投资组合的证券市场线，下面我们来看单个证券的情况。

根据前面的讨论，对于任意两个充分分散化的投资组合 P 和 Q，有关系式

$$\frac{E(r_P)-r_f}{\beta_P}=\frac{E(r_Q)-r_f}{\beta_Q}$$

套利定价理论要告诉我们的是，对于组合中的任意两项不同的证券来说，同样的关系式几乎也都成立。即对任两项不同的金融工具 i 和 j，有

$$\frac{E(r_i)-r_f}{\beta_i}=\frac{E(r_j)-r_f}{\beta_j}=K$$

此处 K 是对几乎所有的证券都一样的一个常数。

要注意的是，我们说"几乎所有的证券"，意思是说会有少数的证券不满足这一关系式。

这个结果的证明的数学推理比较麻烦，我们把它放到本章的数学附录里。

对于任意组合中的金融工具 i，有

$$E(r_i)=r_f+\beta_i K$$

所以对任何充分分散化的投资组合，就一定有

$$E(r_P)=\sum_{i=1}^{n}w_iE(r_i)=r_f\sum_{i=1}^{n}w_i+K\sum_{i=1}^{n}w_i\beta_i=r_f+\beta_P K$$

亦即有

$$\frac{E(r_P)-r_f}{\beta_P}=K$$

对所有充分分散化的投资组合来说，K 都是相同的。

6. 多因素的套利定价理论

现在把前述结果推广到多个因素产生系统风险的情况。我们只需讨论两个因素的情况，更多因素的情况不难加以推广。

两个宏观因素的模型是这样的

$$r_i = E(r_i) + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + e_i$$

因素 F_1 比如说代表对GDP预期值的偏离，因素 F_2 则代表未预期到的通货膨胀率的变化，它们的预期值都等于零，因为它们代表的都是对预期值的偏离。同样，e_i 代表企业特有的风险，也是对预期值的偏离，所以预期值也为零。F_1，F_2 和 e_i 都互不相关，而且，不同证券的 e_i 和 e_j 彼此之间也都不相关。

首先我们引入因素组合的概念。因素组合是非系统风险已经充分分散化而消除掉的组合，对其中一个因素的 β 值为1而对其他因素的 β 值都为0。这种因素组合的构造在实践中是行得通的，因为有价证券的种类非常多，而因素的个数又非常有限。在多因素的证券市场线关系中，因素组合将起到基准的作用。

比如有因素组合1和2，前者的预期收益率为$E(r_1)=10\%$，后者的预期收益率为$E(r_2)=12\%$，假定无风险利率为4%，则因素组合1的风险补偿为10%－4%＝6%，因素组合2的风险补偿为12%－4%＝8%。

现在来看任意一个充分分散化的投资组合 A，它对两个宏观因素的 β 值分别是 $\beta_{A1}=0.5$ 和 $\beta_{A2}=0.75$。多因素的套利定价理论指出，投资组合 A 的总的风险补偿应当是投资者承受这两种宏观因素的系统风险所应得到的风险补偿的和。而每种宏观因素的系统风险的补偿等于相对于该因素的 β 值乘以因素组合的风险补偿，即有

$$\begin{aligned}&\beta_{A1}[E(r_1) - r_f] + \beta_{A2}[E(r_2) - r_f]\\&= 0.5 \times 6\% + 0.75 \times 8\% = 9\%\end{aligned}$$

于是，投资组合 A 的预期收益率就是无风险收益率加上总的风险补偿，为13%。

如果投资组合 A 的预期收益率不等于13%，例如是12%，则可以构筑如下的组合头寸：取权重为50%的因素组合1，权重为75%的因素组合2，再加上权重为－25%的无风险证券（权重是负数意味着以无风险利率借入），构成一个新的组合。这个组合的预期收益率为0.5×10%＋0.75×12%－0.25×4%＝13%。同时构筑这个组合的多头和组合 A 的空头，就能套取无风险利润。算式如下

到期套利组合多头的收益	$13\% + 0.5\times F_1 + 0.75\times F_2$
到期组合 A 空头的支付	$-(12\% + 0.5\times F_1 + 0.75\times F_2)$
净利润	1%

所以这是零投资组合能够套取无风险利润的情形。

从这个简单的例子我们可以发现，套利组合是这样构筑的，对于任意一个暴露在 F_1 和 F_2 这两个宏观因素的系统风险下的投资组合 P，分别以其 β 值 β_{P1}，β_{P2} 为权重选取因素组合1和2，再加上权重为 $1-\beta_{P1}-\beta_{P2}$ 无风险证券（若 $1-\beta_{P1}-\beta_{P2}<0$，表示无风险证

券的卖空或以无风险利率借入资金)。这一套利组合实际上复制了组合 P,所以组合 P 可由此套利组合给出定价

$$E(r_P)=\beta_{P1}E(r_1)+\beta_{P2}E(r_2)+(1-\beta_{P1}-\beta_{P2})r_f$$
$$=r_f+\beta_{P1}[E(r_1)-r_f]+\beta_{P2}[E(r_2)-r_f]$$

这一多因素模型显然是单因素模型中证券市场线的推广。

最后,套利定价理论的结果是把上述多因素模型推广到单个证券的情况,有

$$E(r_i)=r_f+\beta_{i1}[E(r_1)-r_f]+\beta_{i2}[E(r_2)-r_f]$$

所以,如果有一证券相对于两个宏观因素的 β 值分别为 $\beta_{i1}=0.5$ 和 $\beta_{i2}=0.75$,则它的均衡定价的预期收益率就一定是 13%。

如果读者能够看懂本章附录中单因素模型的数学证明,则很容易将证明推广到多因素的情况。

7. APT 和 CAPM 的比较

首先要注意的是,CAPM 和单指数模型在本质上是一样的。但 CAPM 要求有一个有风险市场组合,这在实际中难以实现,因为对于规模比较大的金融市场来说,编制全样本指数是很困难的。单指数模型是利用一个在实际上与理论的有风险市场组合完全正相关的综合指数(如著名的标准普尔 500)来代替实际不存在的有风险市场组合。所以在实际的投资策略的制定中,单指数模型是真正有实用价值的。但单指数模型必须基本上符合我们在上一章概括的 CAPM 的前提条件,另外还要加上在投资周期内,股票收益率的概率是稳定的这样一个条件来保证统计取样测算的可靠性。

通常认为,CAPM 是 APT 的特例,因为 CAPM 是单因素的,一般所指的 APT 是多因素的。其实不然,CAPM 也有多因素的推广结果,例如默顿在 1975 年提出的顾客服务模型(consumer service model)。这一模型与 APT 比较,APT 未能具体定出因素组合的风险补偿,这一模型则考虑到这一问题。另外,更富想象力的模型是布雷顿(D. T. Breeden)提出的基于消费的资本资产定价模型(consumption—based capital asset pricing model)。我们在本书中不介绍这些模型,有兴趣的读者可查阅有关的资料。

APT 与 CAPM 最根本的区别在于,APT 特别强调的是无套利均衡原则。CAPM 是典型的收益/风险权衡所主导的市场均衡,是许多投资者的行为共同作用的结果;而 APT 的出发点则是排除无风险套利机会,少数投资者会构筑大额的套利头寸产生巨大的市场压力来重建均衡。正因为如此,APT 不需要 CAPM 赖以成立的那些有关市场假设的条件。另外,APT 的成立只需要有充分分散化的投资组合,不像单指数模型一定要有对有风险市场组合有替代作用的市场指数。因而,从道理上讲,APT 应该有更广泛的应用。

可是,在建立 APT 理论的过程中,读者可以发现,我们特别说明了,APT 的定价并不是对所有的证券都成立的。当单项资产在市场上定价失衡时,在 CAPM 的条件下,所有的投资者都会同时调整自己的头寸来重建均衡。而 APT 单单强调无套利原则,而且这种无套利均衡定价是通过对充分分散化的投资组合的分析得出的,所以对有的单项资产其定

价结论就不一定成立。所以，在实践中，APT 主要是对组合投资决策起支持作用，对于单项资产的定价（例如在实证会计的研究中），CAPM 和单指数模型则有更广泛的应用。从而，CAPM 的那些有关市场的条件也是我们必须加以考虑的。

在使用 APT 模型时，有一个对宏观因素的识别问题。不同的研究使用了不同的宏观经济指标。但归结起来，大体上都涉及以下三大类：一是总量经济活动参数，如 GDP（或 GNP）的增长率、工业产出、总销售额，等等；二是通货膨胀率；三是与市场利率有关的参数，可以是利率差或利率本身。如果我们考虑股票的均衡价格是未来红利流的折现值，显然以上三类经济参数的变化都会影响到未来红利流和折现率的大小，采用这三类参数作为宏观因素的理由就变得非常直观了。

8. 小结

无套利均衡分析方法是现代金融学研究的基本方法，它和以收益/风险权衡所主导的市场均衡有基本的区别。只要无风险套利机会出现，只需要少数投资者构筑大额的套利头寸，就会产生巨大的市场压力来推动重建均衡。这是与经济学的供需均衡分析（收益/风险权衡所主导的市场均衡分析可以看作特例）基本不同之处，供需均衡是大量市场参与者共同行为的结果。

进行无套利均衡分析的关键技术是复制技术。复制可以从正反两个方向来做：复制未来的现金流，同时检查目前是否有价格失衡的套利机会；也可以是现在的价格相等，复制未来在任何情况下都产生更为有利的现金流，或者未来在任何情况下都产生更为不利的现金流。请注意，无论是都有利还是都不利都会产生套利机会，但必须是在任何情况下都有利或者都不利。

套利定价理论集中强调的是无套利原则。对于充分分散化的投资组合定价来说，比资本资产定价模型有许多优越之处。但是，也正因为只强调无套利原则，对于单项资产的定价，不能保证成立。因为可能出现这样的情况，组合中个别几项资产的定价失衡，但整个组合的定价并未失衡，个别证券的定价失衡起了互相抵消的作用。套利定价理论和资本资产定价模型孰优孰劣，要视实际情况而定。

在金融市场中，市场参与者有各自不同的收益/风险偏好。如果顾及每个市场参与者的偏好来研究价格的供需均衡，会使问题变得非常复杂，以至于无从下手。金融系统无疑是一个复杂系统，由于人的参与使系统的复杂性大为增加。无套利均衡分析抓住了这样一个关键点：只要出现无风险套利机会，则所有的市场参与者都会去套利，而无论其个人的风险偏好如何。从而，市场的均衡是建立在消除套利机会的基础之上，而均衡所确定的价格也就与个人的风险偏好无关。这是现代金融学分析问题的方法论的魅力之所在。

练习题

根据以下数据，对单指数模型中的市场模型 $E(r_I-r_f)=\alpha_I+\beta_I E(r_m-r_f)$ 的参数进行估计，并解释估计结果。如果明年的预期市场收益率为 20%，利用上述模型预测股票组合 P 的预期收益率（$r_f=6\%$）。

年份	市场组合的年平均收益率%	股票组合 P 的年平均收益率%
1	20	22
2	27	27
3	12	15
4	13	16
5	5	9
6	28	27
7	32	31
8	17	19

第四章数学附录

套利定价理论用于单项资产定价的数学证明

我们需要证明，对任两项不同的金融工具 i 和 j，有

$$\frac{E(r_i)-r_f}{\beta_i}=\frac{E(r_j)-r_f}{\beta_j}=K$$

此处 K 是对几乎所有的证券都一样的一个常数。

单因素的套利定价模型是

$$r_i=E(r_i)+\beta_i F+e_i$$

首先我们来看 $e_i=0$ 的情况。

请注意，对于某些金融工具来说，$e_i=0$ 的情况是确实存在的。例如某些指数和指数衍生品类的金融工具。在本章介绍多因素套利定价理论时，我们介绍了因素组合的概念。现在我们假定已经有了关于因素 F 的因素组合，并记该因素组合的预期收益率为 $E(r_F)$。这样来构筑一套利组合 A，这一组合是把资金分投到因素组合和无风险证券上，投入的比例是 $\beta_i:(1-\beta_i)$。我们断言，一定有 $E(r_i)=r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]$，不然的话，证券 i 和套利组合 A 之间就会发生无风险套利机会。因为证券 i 和套利组合的实际收益率分别是

$$r_i=E(r_i)+\beta_i F$$

$$r_A=(1-\beta_i)r_f+\beta_i[E(r_F)+F]=r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]+\beta_i F$$

如果 $E(r_i)\neq r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]$，显然就会发生套利。

所以有

$$\frac{E(r_i)-r_f}{\beta_i}=E(r_F)-r_f$$

$E(r_F)$和无风险利率 r_f 对于所有的证券来说都是一样的，令 $E(r_F)-r_f=K$，结论就成立。

现在来看 $e_i\neq 0$ 的情况。

我们断言，只有有限项证券，使 $E(r_i)\neq r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]$。我们采用反证法。对于很小的 $\varepsilon>0$，如果 n 项证券里，有 $N(n)$项证券使下式成立

$$|E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]|\geqslant\varepsilon$$

我们把 ε 取得非常小，在实际中，比 ε 小的差别是可以不考虑的。

当 $n\to\infty$时，若 $N(n)\to\infty$，则我们的断言不成立。

对于每一项证券 i，我们像 $e_i=0$ 的情况一样地构筑套利组合 A_i。若 $E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]>0$，则对套利组合 A_i 做多头并同时对证券 i 做空头，若 $E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]<0$，则反过来做。这样对冲后得到的收益率将是

$$|E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]|+\delta_i e_i$$

其中

$$\delta_i = \begin{cases} +1, 若 E(r_i) - r_f - \beta_i[E(r_F) - r_f] > 0 \\ -1, 若 E(r_i) - r_f - \beta_i[E(r_F) - r_f] < 0 \end{cases}$$

现在我们采取等权重$\frac{1}{N(n)}$的办法把使$|E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]|\geqslant\varepsilon$的$N(n)$组对冲头寸再组合到一起，这一组合的预期收益率应当是

$$\frac{1}{N(n)}\sum_{i=1}^{N(n)}|E(r_i) - r_f - \beta_i[E(r_F) - r_f]| \geqslant \varepsilon > 0$$

其方差为

$$\frac{1}{N^2(n)}\sum_{i=1}^{N(n)}\sigma^2(e_i) \leqslant \frac{\bar{\sigma}^2}{N(n)}$$

其中$\bar{\sigma}^2=\max\limits_i\{\sigma^2(e_i)\}$肯定只是一个有限的数。当$n\to\infty$时，若$N(n)\to\infty$，则方差趋于零。但这一组合头寸是零投资组合，它的预期收益率为正而方差趋于零，就有无风险套利机会存在，即市场处于失衡状态。所以当n变得很大时，$N(n)$不能无限制地变大。于是就反证了我们的论断成立，只有有限项证券，使$E(r_i)\neq r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]$。因此，对于大多数证券来说，APT 的结论成立。即有

$$\frac{E(r_i) - r_f}{\beta_i} = E(r_F) - r_f = K$$

由此完成我们的数学证明。

第五章　期权定价与动态无套利均衡分析

至今为止，我们讨论的无套利分析技术都是一阶段的。本章通过介绍期权定价理论的基本原理，来讨论多阶段的动态无套利分析方法，即动态复制技术。

布莱克(Fischer Black)和舒尔斯(Myron Scholes)1973 年发表了第一个期权定价公式，被认为是现代金融学的一项具有里程碑意义的突破性成果。这项理论成果及其以后的多种变形，极大地推动了衍生工具市场的发展。布莱克-舒尔斯期权定价模型(简称 B-S 模型)发表的时间和芝加哥期权交易所正式挂牌交易标准化期权合约几乎是同时(文章发表在交易开始后的一个月，但理论成果的获得时间则要早得多)。不久，德克萨斯仪器公司就推出了装有根据这一模型计算期权价值程序的计算器。现在，几乎所有从事期权交易的经纪人都持有各家公司出品的此类计算机，利用按照这一模型开发的程序对交易估价。这项工作对金融创新和各种新型金融产品的面世起到了重大的推动作用。为此，对期权定价理论的完善和推广做出巨大贡献的默顿和舒尔斯一起荣膺 1997 年度的诺贝尔经济学奖(布莱克不幸在 1995 年去世，否则一定也应当分享诺贝尔经济学奖的殊荣)。

期权定价理论的核心原理是所谓的*动态无套利均衡分析*，即*动态复制技术*。意思是用于复制期权这样一种衍生工具的证券组合的头寸需要不断地进行调整，才能维持住无套利均衡关系。布莱克-舒尔斯期权定价模型本身是用随机微分方程来刻画的，但为了便于理解动态复制技术，我们将先介绍二叉树定价模型。这一模型最早是由夏普、柯克斯(John C. Cox)、罗斯和鲁宾斯坦(Mark Rubinstein)等人提出的。

1. 期权简介

期权是指未来的选择权，它赋予期权的持有者(购买者，或多头)一种权利而不必承担义务，可以按预先敲定的价格购买或者出售一定数量和一定品质的资产。因为期权代表了一种权利而不必承担义务，所以在市场上成为具有一定价值的金融工具(有价证券)，但是是由期权所要购买或者出售的资产(称为标的资产或标的物)衍生出来的，所以期权是一类*衍生工具*(*衍生证券*)。

有关期权有以下专用术语：

- 按预定价格赋予购买权利的期权称为*买权*(call)，赋予出售权利的则称为*卖权*(put)。
- 预先敲定的价格称为*预定价*或者*执行价*(因为执行期权时就按这一预先敲定的价格买或卖)。
- 期权到一定的日期后会失效，这一日期被称为*失效日*或*到期日*。*美式期权*是在到期日和到期日之前都可以执行的期权，*欧式期权*则是只有在到期日方可执行的期权。我们将用小写字母 c 和 p 表示欧式买权和卖权，用大写字母 C 和 P 表示美式买权和卖权。

期权和期货一样，标的物如果是普通商品（如农副产品、工业原材料、能源产品，等等），称为商品期权；如果标的物是金融工具或者虚拟的金融工具（如指数），则称为金融期权（如股票期权、指数期权、利率期权、外汇期权，等等）。金融工程的创新活动，已经创造出许多期权的变形品种，如顶（cap）、底（floor）、套（collar）等，现在已经出现了第二代、第三

表 5.1

LISTED OPTIONS QUOTATIONS

			–Call–		–Put–	
Option/Strike		Exp.	Vol.	Last	Vol.	Last
IXC Com	45	Aug	1105	2 7/16	...	...
Imcline	20	Aug	320	4 1/4	...	...
Imunex	120	Jul	260	8 3/4	35	4 1/4
InfinityB	10	Jul	991	17 1/8	...	...
28 1/8	30	Jul	288	5/16	...	...
Infoseek	35	Jul	23	10	260	15/16
45 9/16	45	Jul	257	4 1/8	103	3 3/4
45 9/16	50	Jul	478	2 1/4	...	...
Inktomi	110	Jul	192	12	48	7 1/8
116 1/2	125	Aug	270	12 1/4	2	25
116 1/2	130	Jul	321	3	...	...
Inprise	5	Jan	290	2 1/8	...	...
IntgDv	10	Jul	114	1 1/16	195	7/16
10 7/8	12 1/2	Nov	422	1 1/2	...	...
Intel	45	Jul	1	11 3/4	212	3/16
57	50	Jul	119	7 1/4	410	7/16
57	52 1/2	Jul	88	5 1/8	566	3/4
57	55	Jul	447	3 1/4	1344	1 7/16
57	55	Aug	94	4 3/4	230	2 5/8
57	57 1/2	Jul	674	2	130	2 9/16
57	60	Jul	3515	1	107	4
57	60	Aug	1071	2 7/16	200	5 1/2
57	65	Aug	451	1	...	...
57	70	Jul	354	1/16	181	14 1/4
Intelligrp	10	Jan	...	...	200	3 3/4
I B M	90	Jul	325	33 1/4	44	1/8
122 9/16	110	Jul	731	13 1/2	1628	3/4
122 9/16	115	Jul	355	8 7/8	354	1 9/16
122 9/16	120	Jul	743	5 3/4	798	2 3/4
122 9/16	120	Aug	258	9 1/8	75	6
122 9/16	125	Jul	1750	3 1/8	218	5 1/8
122 9/16	125	Aug	424	6 3/4	21	8 1/4
122 9/16	130	Jul	1246	1 1/2	48	8 1/4
122 9/16	130	Aug	858	4 1/2	1	11 1/4
122 9/16	135	Jul	528	9/16	...	...
In Pap	55	Jul	525	3/8	33	4
InvTech	40	Oct	200	1 7/8	...	...
Iomega	5	Jul	427	1/8	...	...
4 5/8	5	Aug	282	7/16	...	...
4 5/8	5	Feb	20	1 5/16	200	1 3/8
4 5/8	7 1/2	Aug	40	1/16	450	3
IridmWr	5	Oct	120	4 3/4	270	1 3/8
9 7/16	7 1/2	Jul	25	2 9/16	218	15/16
9 7/16	7 1/2	Aug	125	2 7/8	400	2
9 7/16	10	Jul	696	1 1/4	284	2 3/8
9 7/16	12 1/2	Jul	102	3/8	238	4
9 7/16	12 1/2	Oct	483	1 3/16	5	6 1/8
9 7/16	15	Aug	1355	11/16	5	7 3/8
9 7/16	15	Oct	465	1 1/8	...	...
9 7/16	20	Oct	27	1/2	250	12 5/8
9 7/16	30	Jul	...	...	200	20
Jackpot	7 1/2	Dec	...	...	200	3/16
JohnJn	90	Jul	295	2 3/4	15	1 1/2
K Swiss	30	Jul	...	...	800	1/4
37 5/8	35	Jul	...	...	250	1 1/4
37 5/8	40	Jul	516	1 15/16	125	4 1/4
37 5/8	40	Aug	500	3 7/8	...	...
KLA Tnc	50	Jul	20	10 1/2	679	3/8
K mart	15	Jul	610	1 1/16	10	1/4
Merck	70	Jul	323	2 1/16	213	1 7/8
70 1/16	70	Aug	1463	3 1/2	56	3 1/4
70 1/16	75	Jan	455	5 1/8	3	8 7/8
MercInt	22 1/2	Jul	1250	12 5/8	...	...
35 1/4	30	Jul	500	6	34	3/4
MerrLyn	65	Jul	10	9 1/8	296	1/2
74 13/16	70	Jul	234	6 1/8	179	1 7/16
74 13/16	75	Jul	684	3 1/8	119	3
74 13/16	80	Jul	939	1 1/8	14	6 1/4
74 13/16	80	Oct	1032	6 1/2	...	...
74 13/16	85	Jul	196	3/4	...	...
74 13/16	90	Jul	298	3/8	200	15
74 13/16	90	Jan	248	6 1/8	200	19 1/2
Metamer	22 1/2	Aug	252	2 15/16	...	...
Metrcm	15	Oct	300	4	...	...
MrmdFbr	47 1/2	Nov	505	2 7/8	...	...
Metzler	25	Nov	560	5	...	...
MicrTc	35	Jul	320	4	1244	1 1/16
38	37 1/2	Jul	114	2 3/4	252	1 13/16
38	40	Jul	940	1 1/2	806	3
38	40	Oct	700	5	67	6 3/8
38	42 1/2	Jul	306	9/16	117	4 7/8
38	45	Jul	864	3/8	370	7 1/8
38	50	Jul	655	1/16	26	10 7/8
38	50	Oct	461	2 9/16	...	...
38	60	Jan	213	2 5/16	11	23
Micsft	65	Jan	30	25 1/4	202	1 7/8
86 3/4	75	Jul	229	11 1/8	143	1/4
86 3/4	80	Jul	1366	7 5/8	1075	3/4
86 3/4	80	Aug	324	9 5/8	84	2 1/2
86 3/4	82 1/2	Jul	1490	5 3/4	117	1 1/4
86 3/4	85	Jul	2025	3 3/4	389	2
86 3/4	85	Aug	210	6 1/4	53	4 1/4
86 3/4	87 1/2	Jul	505	2 1/2	92	4 1/8
86 3/4	90	Jul	1933	1 3/8	193	5
86 3/4	90	Aug	433	3 7/8	17	6 3/4
86 3/4	90	Oct	574	6 1/2	5	8 3/4
86 3/4	90	Jan	264	9 1/2	...	...
86 3/4	92 1/2	Jul	257	15/16	1	7 1/2
86 3/4	95	Jul	1059	1/2	...	...
86 3/4	100	Jul	250	1/4	...	...
86 3/4	100	Oct	403	2 7/8	18	16 1/4
86 3/4	105	Jan	302	4 1/2	...	...
86 3/4	120	Jan	864	2 1/16	...	...
Millip	35	Jul	500	4	...	...
MindSpr	37 1/2	Jul	251	5 1/8	56	2 1/4
40 5/8	40	Jul	313	3 5/8	405	3 3/8
40 5/8	40	Oct	313	8 1/4	...	...
40 5/8	40	Jan	296	11 3/4	...	...
Mir Rst	20	Aug	309	5/16	...	...
Monsanto	40	Jul	199	1 1/2	142	2
39 1/4	40	Aug	5151	2 1/2	27	3
MSDWDis	85	Jul	127	11	403	1 5/16
94 9/16	90	Jul	294	6 7/8	62	2
94 9/16	95	Jul	2907	4 1/8	20	4 3/8
94 9/16	100	Jul	2652	2 1/8	53	7 1/2
94 9/16	100	Aug	345	4 1/2	...	...
MorganJP	140	Aug	349	5 1/2	...	...
Motorola	75	Jul	116	16	500	1/8

代期权品种。期权是金融工程师所使用的花样最多的衍生金融工具。有的期权合约是标准化了的，在交易所集中交易；还有许多期权品种是所谓的柜台交易(OTC-over the counter)品种，是由金融工程师们根据客户的要求采取量体定做(tailored)的方式设计出来的。表 5.1 是《华尔街日报》(Wall Street Journal)1999 年 6 月 29 日登载的 Intel，IBM 等公司的股票期权在芝加哥期权交易所(CBOE—Chicago Board Options Exchange)的报价(全部是收盘价)。第 1 列是该股票在纽约证券交易所(NYSE—New York Security Exchange)当天的价格(也是收盘价)。第 2 列是期权的预定价(即执行价)。第 3 列是期权的失效日(即到期日)，CBOE 交易的是美式期权，失效日用到期月份表示，失效日一般指到期月份的第 3 个星期五后的一天(星期六)，即美国东部时间晚 11 时 59 分，但执行期权的最后时限是在星期五下午 5 时 30 分之前向经纪人发出执行指令。期权本身的市场价格称为期权费(option premium)。后面两组各两列分别显示的是买权和卖权当天的成交量和期权费的收盘价。通常，每一份期权合约赋予购买或出售 1 整手股票(100 股)的权利，所报的期权价格则是买卖 1 股股票的期权费。如果预定价在 30 美元到 100 美元之间，每个价位之间相差 5 美元，低于 30 美元的每个价位间相差 2.5 美元，高于 100 美元时会拉大价位差(例如 10 美元)。

我们可以发现，对于买权来说，预定价越高，期权费就越低，卖权则反之。道理是显而易见的。

到马上要失效时，对于买权来说，如果当时标的物股票的市价低于预定价，则买权没有任何价值，将被放弃而不执行。对于卖权来说，如果当时标的物股票的市价高于预定价，则卖权没有任何价值，将被放弃而不执行。图 5.1 是买权和卖权在到期时的损益状态图(payoff profile)。

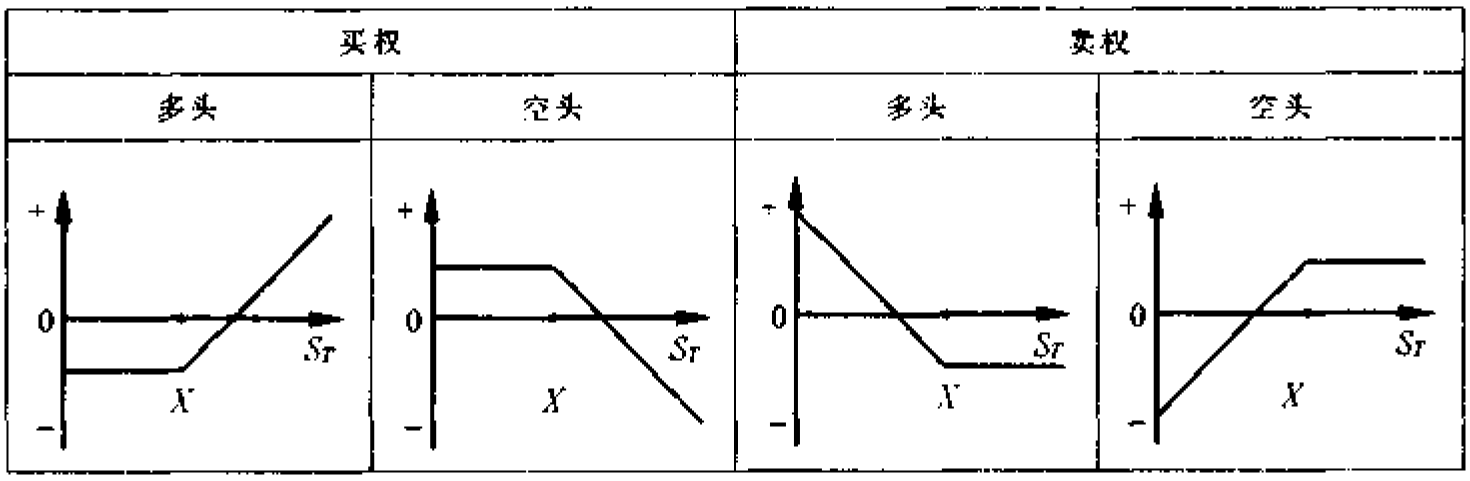


图 5.1

对于买权来说，如果现在标的物股票的价格高于执行价(预定价)，则此时买权处于实值状态(in-the-money)；如果现在标的物股票的价格低于执行价(预定价)，则此时买权处于虚值状态(out-of-the-money)。对于卖权来说，情况正好反过来。期权的执行价(预定价)正好等于标的物股票的价格时，称为处于两平状态(at-the-money)。假想期权现在马上要失效，此时期权的价值称为期权的内涵价值(intrinsic value)。处于虚值状态的期权的内涵价值总为零。在处于实值状态的期权未到期时，卖权的内涵价值是预定价减去当时标的物市价的差，买权的内涵价值则是标的物市价减去预定价的差。请注意，在期权未失

效前，期权费(期权的市场价格)往往大于期权的内涵价值。期权费减去期权的内涵价值的差是期权的时间价值。在到期日，所有期权的时间价值都变为零。处于虚值状态的期权只有时间价值而没有内涵价值。因为期权在失效前，即使处于虚值状态，标的物的价格在剩余的时间里还有可能变到实值状态，所以有时间价值存在。这就是为什么处于虚值状态的期权在市场上也能以正的价格(期权费)出售的缘故。

下面我们都以股票期权为例作讨论。

2. 期权定价的基本无套利关系

所有金融工具的定价都是根据无套利均衡关系给出的，期权当然也如此。因此期权的价格(期权费)必须遵守以下基本的无套利关系。

1) 买权的价值从不高于标的物股票本身的价值，卖权的价值从不高于预定价。

2) 欧式卖权的价值从不高于预定价用无风险利率折现的现值(为什么？请用无套利均衡分析方法作分析)。

3) 期权的价值决不为负。

4) 美式期权的价值决不低于欧式期权。

5) 距失效日时间长的美式期权的价值决不低于距失效日时间短的同一个美式期权的价值。

6) 美式期权的价值决不低于现在马上就执行该期权所实现的期权价值，即有

$$C(t) \geqslant \max\{S(t) - X, 0\}$$
$$P(t) \geqslant \max\{X - S(t), 0\}$$

其中 t 是目前的时间，$S(t)$是目前标的物股票的价格，X 是预定价，$C(t)$和 $P(t)$分别是目前美式买权和卖权的市场均衡价。

我们用一简单的例子来说明这一无套利关系。假如现在股票的价格是 100 元，预定价是 90 元，6 个月后到期的美式股票买权，如果市价是 9 元的话，就出现套利机会，因为不满足上述关系式。此时可以立即执行期权，以 90 元的预定价买入股票后立即在股市上以市价 100 元出售，可以赚取 10 元差价，马上拿出 9 元来再买入同样的买权，就可以无风险地套取 1 元的净利润。显然，欧式期权不具有这一性质。欧式期权只有到期才能执行，令 T 是到期日的时间，欧式期权遵循的规律是

$$c(T) = \max\{S(T) - X, 0\}$$
$$p(T) = \max\{X - S(T), 0\}$$

欧式期权的价格用小写字母表示。

现在我们来看欧式期权和美式期权定价之间的关系。

上面这两个式子是到到期日时欧式期权与到期时标的物股票及预定价之间的关系，我们要考察未到期时的情况。我们先要假设标的物股票在期权的有效期内是不分红的。

先来看欧式买权。

下面我们以 $v_{(T-t)}$记以无风险利率 r_f 为折现率，从时刻 T 折到时刻 t 的折现因子(参见第二章)。显然，只要 $r_f>0$，就有 $v_{(T-t)}<1$。

我们有

$$c(t) \geqslant \max\{S(t) - Xv_{(T-t)}, 0\}$$

因为期权的价值不会为负，所以只需证明 $c(t) \geqslant S(t) - Xv_{(T-t)}$ 即可。我们用反证法，假定 $c(t) < S(t) - Xv_{(T-t)}$，我们在时间 t 构筑如下的对冲头寸：卖空 1 股股票，购买 1 份欧式买权，同时购买价值为 $Xv_{(T-t)}$ 的无风险证券。即时现金流和到期时的现金流见表 5.2。

表 5.2

交易	即时现金流（时刻 t）	到期时现金流（时刻 T）
卖空 1 股股票	$S(t)$	$-S(T)$
购买 1 份欧式买权	$-c(t)$	$\max\{S(T)-X, 0\}$
购买无风险证券	$-Xv_{(T-t)}$	X
净现金流	$S(t)-Xv_{(T-t)}-c(t)$	$\max\{S(T)-X, 0\}-[S(T)-X]$

因为到期时的净现金流 $\max\{S(T)-X, 0\}-[S(T)-X] \geqslant 0$，按假定即时净现金流 $S(t)-Xv_{(T-t)}-c(t) > 0$，显然出现无风险套利机会。由此反证，上述不等式关系成立。

再由前面的无套利基本关系 1）知，必定有

$$\max\{S(t) - Xv_{(T-t)}, 0\} \leqslant c(t) \leqslant S(t)$$

这里有一个有趣的数学现象，如果 $T \to \infty$，则 $v_{(T-t)} \to 0$，就有 $c(t) = S(t)$，即距到期日很远的欧式买权的价值几乎与（不分红的）标的物股票的价值一样。但是实际在市场交易的期权的到期期限都不是很长的（一般不超过 1 年）。

现在来看美式买权。美式买权可以在到期前提前执行，当然并不妨碍它到期再执行。因此，美式买权的价值不应小于欧式买权，即有

$$C(t) \geqslant \max\{S(t) - Xv_{(T-t)}, 0\}$$

但是，如果我们提前执行美式买权，在时刻 t，执行美式买权实现的价值是 $\max\{S(t) - X, 0\}$，显然这是不划算的，因为实现的价值不到期权应有的价值。于是得出结论

> **不分红股票的美式买权不可能提前执行。**

（如果有人要提前执行美式买权，你就可以构筑无风险套利的组合头寸，请读者自己试着做一下。）

既然美式买权不可能提前执行，那就和欧式买权没有区别，因此有

$$C(t) = c(t)$$

卖权的情况如何呢？同样的论证方法可以证明，对于欧式卖权，一定有

$$p(t) \geqslant \max\{Xv_{(T-t)} - S(t), 0\}$$

但对美式卖权来说，情况很不一样。首先，肯定应该有 $P(t) \geqslant p(t)$，所以也有

$$P(t) \geqslant \max\{Xv_{(T-t)} - S(t), 0\}$$

如果提前执行美式卖权的话，在时刻 t，执行美式卖权实现的价值是 $\max\{X - S(t), 0\}$，如果卖权处于实值状态，由前面的无套利基本关系 1）知，又一定有 $p(t) \leqslant X$ 和 $P(t) \leqslant X$，此时如果股票价格 $S(t)$ 很低的话，就有可能出现 $p(t) < X - S(t)$ 和 $P(t) < X - S(t)$ 的情况。但美式卖权可以立即提前执行，所以理性的持有者不会让 $P(t) < X - S(t)$ 的情况

出现。所以美式卖权的价值不会低于其内涵价值。欧式卖权则不然，这说明欧式卖权在这种情况下实际上具有负的时间价值。

归结起来，就有这样的关系

$$C(t) = c(t) \quad 和 \quad P(t) \geqslant p(t)$$

3. 买权和卖权的平价关系

不分红股票的欧式期权有如下的买权和卖权平价关系

$$S(t) = c(t) - p(t) + Xv_{(T-t)}$$

这里买权和卖权有相同的预定价 X。这个平价关系从直观上可以这样理解：现在（时刻 t）持有一个买权的多头、一个卖权的空头，再加上价值等于预定价的现值的无风险债券的多头，这样的证券组合在到期时（时刻 T）可以确保得到 1 份股票，所以是 1 份股票的复制品，因此与现在持有 1 份股票的多头的价值相等。

现在我们采用无套利均衡分析方法来证明这一平价关系。用反证法，假如复制证券与被复制的股票有不同的市场价格，比如说 $S(t)<c(t)-p(t)+Xv_{(T-t)}$，此时对股票做多头，同时卖空复制证券，得到的现金流如表 5.3。

表 5.3

交易	即时现金流（时刻 t）	到期时现金流（时刻 T）	
		$S(t)<X$	$S(t)\geqslant X$
购买 1 股股票	$-S(t)$	$S(T)$	$S(T)$
卖空 1 份欧式买权	$c(t)$	0	$-[S(T)-X]$
购买 1 份欧式卖权	$-p(t)$	$X-S(T)$	0
卖空无风险证券	$Xv_{(T-t)}$	$-X$	$-X$
净现金流	$-S(t)+c(t)-p(t)+Xv_{(T-t)}$	0	0

如果 $S(t)<c(t)-p(t)+Xv_{(T-t)}$，就出现无风险套利机会，定价是失衡的。如果 $S(t)>c(t)-p(t)+Xv_{(T-t)}$，则反过来做复制证券的多头同时卖空股票，一样出现无风险套利机会。由此证明了欧式买权和卖权的平价关系。

我们在第二章讨论远期利率时曾经解释过，到时刻 T 进行交割的股票在时刻 t 时的远期价格如果记为 F，则与时刻 t 的股票价格 $S(t)$ 及无风险利率之间有无套利均衡关系 $S(t)=Fv_{(T-t)}$（这里的写法比第二章里的更一般化）。如果远期价格正好等于期权的预定价，即 $F=X$，由上述欧式买权和卖权的平价关系知，此时欧式买权和卖权的均衡价格应当相等，即 $c(t)=p(t)$。如果 $F>X$，则 $c(t)>p(t)$；如果 $F<X$，则反之。

再来看不分红股票的美式买权和卖权之间的关系。因为有 $C(t)=c(t)$ 和 $P(t)\geqslant p(t)$，所以

$$S(t) \geqslant C(t) - P(t) + Xv_{(T-t)}$$

但还有进一步的关系可以推出。现在我们进行如下的组合头寸的交易（见表 5.4）。

表 5.4

交易	即时现金流（时刻 t）	执行卖权时现金流（时刻 $\bar{t}$）	
		$S(\bar{t})<X$	$S(\bar{t})\geqslant X$
卖空 1 股股票	$S(t)$	$-S(\bar{t})$	$-S(\bar{t})$
购买 1 份美式买权	$-C(t)$	$C(\bar{t})$	$C(\bar{t})$
卖空 1 份美式卖权	$P(t)$	$-[X-S(\bar{t})]$	0
购买无风险证券	$-X$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}$
净现金流	$S(t)-C(t)+P(t)-X$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}-X+C(\bar{t})$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}+C(\bar{t})-S(\bar{t})$

因为美式卖权是有可能提前执行的，所以 $t\leqslant\bar{t}\leqslant T$。现在我们看卖权执行时的情况。当 $S(\bar{t})<X$ 时，显然有 $Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}-X+C(\bar{t})\geqslant 0$。$S(\bar{t})\geqslant X$ 时的情况略微复杂一点。因为买权肯定有 $C(\bar{t})\geqslant\max\{S(\bar{t})-Xv_{(T-\bar{t})},0\}\geqslant S(\bar{t})-Xv_{(T-\bar{t})}$ 的关系，所以 $Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}+C(\bar{t})-S(\bar{t})\geqslant Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}-Xv_{(T-t)}\geqslant 0$。因为不管是否提前执行美式卖权（美式买权不可能提前执行），也不管会发生什么情况，未来的净现金流都不为负，所以，现在的净现金流不能为正，否则就出现无风险套利机会。于是得到 $S(t)-X\leqslant C(t)-P(t)$。最后，我们有

$$S(t)-X\leqslant C(t)-P(t)\leqslant S(t)-Xv_{(T-t)}$$

这就是对不分红股票的美式买权和卖权的无套利均衡限定关系。

现在我们来考虑标的物股票分红对期权价格的影响，我们假定股票在到期日前分发已知数额的红利。首先有

$$C(t)\geqslant c(t)\geqslant S(t)-PV(D)-Xv_{(T-t)}$$

$$P(t)\geqslant p(t)\geqslant Xv_{(T-t)}-S(t)+PV(D)$$

其中 $PV(D)$ 是期间发放的红利折现到 t 时刻的现值。

上面两个不等式的最右端实际上分别是买卖股票的远期合约的多头和空头的现值，远期合约的交割价格（预定价）就是 X，到期日是 T。对于远期合约的多头来说，到期时的价值是 $S(T)-X$，期间要分发红利 D，因为到期交割时红利已经被拿走，而在 t 时刻则红利尚未发放，所以在折算到现值时要把红利的现值扣除。对于空头来说，到期时远期合约的价值是 $X-S(T)$，因为空头方会领到红利，在计算现值时应当把红利的现值加进去。期权的价值不应低于远期合约的价值，美式期权的价值不应低于欧式期权的价值，所以有上述关系式。如果上述不等式限制被破坏，就会出现无风险套利机会。

于是，对在到期日前有已知红利支付的欧式期权来说，有以下买权和卖权的平价关系

$$S(t)=c(t)-p(t)+Xv_{(T-t)}+PV(D)$$

这个关系式的涵义是非常明显的。对于美式期权来说，则有

$$S(t)-PV(D)-X\leqslant C(t)-P(t)\leqslant S(t)-Xv_{(T-t)}$$

我们先来证明第二个不等式。因为如上所述，对于不发放红利的股票的美式期权来说，第二个不等号是成立的，股票在除红以后，一定会引起股价下跌（除红即因红利的发放而从股票的价值中扣除掉红利的价值），从而使买权的价值下降而使卖权的价值上升，因此不等式就更加能够成立。

下面来证明第一个不等式，办法是先用欧式买权和无风险证券的空头和美式卖权的多头的组合头寸来复制股票的相反头寸，进而观察对冲的结果，然后再利用 $C(t)\geqslant c(t)$ 导出最终结果。我们照样采用反证法，假设有 $C(t)-P(t)<S(t)-PV(D)-X$，构筑如表 5.5 的标的物股票的多头头寸和与它对冲的复制头寸。

表 5.5

交易	即时现金流（时刻 t）	执行卖权时现金流（时刻 $\bar{t}$）	
		$S(\bar{t})<X$	$S(\bar{t})\geqslant X$
卖空 1 股股票	$S(t)$	$-S(\bar{t})$	$-S(\bar{t})$
红利的影响	$-PV_{(\bar{T}-t)}(D)$	$PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)$	$PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)$
购买 1 份欧式买权	$-c(t)$	$c(\bar{t})$	$c(\bar{t})$
卖空 1 份美式卖权	$P(t)$	$-[X-S(\bar{t})]$	0
购买无风险证券	$-X$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}$
净现金流	$S(t)-PV_{(\bar{t}-t)}(D)$ $-X-c(t)+P(t)$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}-X+c(\bar{t})$ $+PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}+c(\bar{t})-S(\bar{t})$ $+PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)$

这里，当 $\bar{T}-\bar{t}\leqslant 0$ 时，$PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)=0$。$\bar{T}$ 指分发红利的时刻。当 $S(\bar{t})<X$ 时，有 $Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}-X+c(\bar{t})+PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)\geqslant 0$。当 $S(\bar{t})\geqslant X$ 的时候，因为有不等式 $c(\bar{t})\geqslant S(\bar{t})-PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)-Xv_{(T-\bar{t})}$ 成立，所以就一定会有以下关系成立：$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}+c(\bar{t})-S(\bar{t})+PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)\geqslant Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}-Xv_{(T-\bar{t})}\geqslant 0$。因为 $C(t)\geqslant c(t)$，当然也有 $Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}+C(\bar{t})-S(\bar{t})+PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)\geqslant 0$。如果 $C(t)-P(t)<S(t)-PV_{(\bar{t}-t)}(D)-X$，就出现无风险套利机会。

我们已经指出，不分红股票的美式买权不会提前执行，但对支付红利的股票的美式买权来说，情况可能不是如此。因为在每次除红后，股票的价格会下跌，跌幅的均衡值就等于所支付的红利的价值。股票价格下跌也就导致买权价值的下降，因此，

> **对于支付红利的股票而言，如果红利的数额比较大，有时在除红前的很短时间内，美式买权有可能被提前执行。**

如果在美式买权到期前，股票多次分红的话（比如分红 n 次），每次临近除红时，美式买权的价值都有 $C(t_i)\geqslant S(t_i)-PV_i(D)-Xv_{(T-t_i)}$，$i=1,\cdots,n$。这里 $PV_i(D)$ 是在 t_i 时刻后（包括 t_i）所有红利在 t_i 的现值。如果此时提前执行，实现的价值就应该是 $S(t_i)-X$。如果 $S(t_i)-PV_i(D)-Xv_{(T-t_i)}\geqslant S(t_i)-X$，即 $PV_i(D)\leqslant X(1-v_{(T-t_i)})$，提前执行是不明智的。而如果出现 $PV_i(D)>X(1-v_{(T-t_i)})$ 的情况，则有可能提前执行是好的策略。但如果对于 $k>i$，还有 $PV_k(D)>X(1-v_{(T-t_k)})$ 的情况出现，则要作进一步的分析。为了分析的简单起见，我们假定从 t_i 到期末 T 只有两次分红，分别在 t_i 和 t_{i+1}。如果 $[PV_i(D)-X(1-v_{(T-t_i)})]-v_{(t_{i+1}-t_i)}[PV_{i+1}(D)-X(1-v_{(T-t_{i+1})})]\geqslant 0$，则在 t_i 时刻执行为好，否则推迟到 t_{i+1} 时刻执行更好。这个式子可以化简为 $D_i\geqslant X(1-v_{(t_{i+1}-t_i)})$，其中 D_i 是 t_i 时刻分发的红

利。如果预定价 X 和当时股票的价格很接近，这个式子意味着红利率不小于无风险利率。即只有在时间区间$[t_i,t_{i+1}]$红利率不小于无风险利率时，在时刻 t_i 提前执行买权才是明智的，否则应当推迟到时刻 t_{i+1}。这一分析可以推广到从 t_i 到期末 T 有多次分红的情况。即只有在时间区间$[t_i,T]$红利率始终不小于无风险利率时，在时刻 t_i 提前执行买权才是明智的，否则就应当推迟。因为股票是有风险金融工具，很难保证在 t_i 时刻之后红利率始终不小于无风险利率。所以，对于美式买权来说最大的可能是：要么到期再执行，要么在最后一次除红日前执行。

4. 动态无套利均衡分析

以上我们根据无套利原则归纳期权价值应当遵循的一些关系时，从来没有考虑到标的物股票的价格运动形态。因为期权是一种衍生工具，它们的价值必定是依附于标的物的价格运动规律的，所以，光凭以上这些无套利关系还不能给出期权的定价。

关于标的物股票价格的运动规律我们将放到下一章讨论，本章将着重讨论期权定价的基本分析方法——动态无套利均衡分析。

回顾一下在第一章所介绍的状态价格定价技术，我们在已知债券 A 的价格变化规律和债券 B 在期末不同状态下的价格的条件下，可以用无套利均衡分析方法给出债券 B 目前的定价，基本技术就是用债券 A 和无风险债券的组合来复制债券 B。但在那里，我们仅仅考虑了 1 时期的定价问题，如果要考虑多个相继时期的问题，就要用到多时期的动态无套利均衡分析方法。

我们继续采用第一章的例子，但把它扩展到 2 时期。假定债券 A 的价格运动规律如图 5.2，无风险利率 $r_f=2\%$。

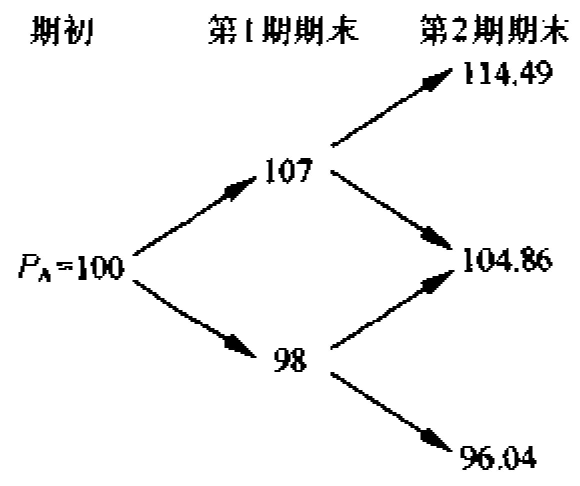


图 5.2

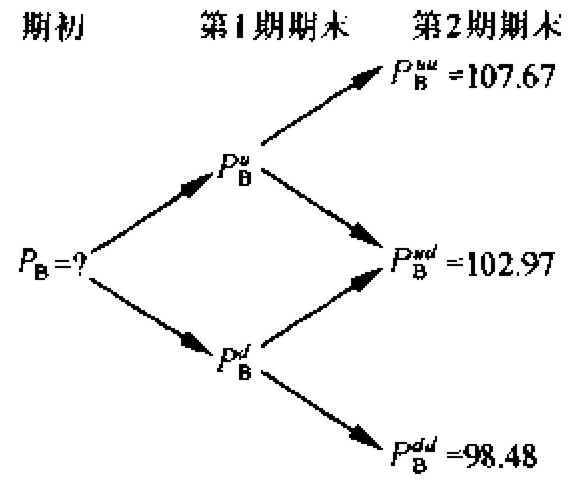


图 5.3

现在已知债券 B 在第 2 期期末 3 种不同状态下的价格如图 5.3，要定出债券 B 现在的均衡价格。

先来看右上方的二叉树，我们用 Δ^u 份债券 A 和现在市场价值为 L^u 的无风险证券来构筑复制债券 B 的证券组合，见图 5.4。

用联立方程组

$$\begin{cases}114.49\Delta^u + 1.02L^u = 107.67 \\ 104.86\Delta^u + 1.02L^u = 102.97\end{cases}$$

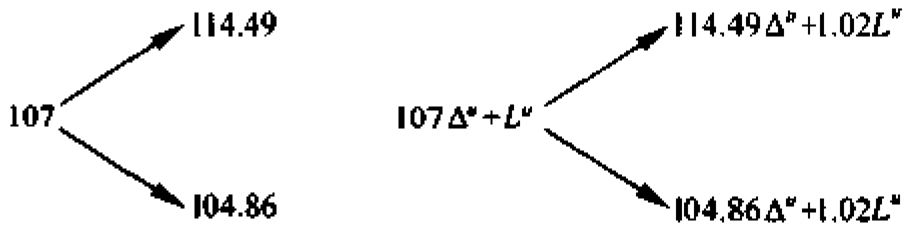


图 5.4

解出 $\Delta^u=0.488, L^u=50.78$。因此有 $P_B^u=107\Delta^u+L^u=103$。

用同样的方法处理右下方的二叉树，解出 $\Delta^d=0.509, L^d=48.62, P_B^u=98\Delta^u+L^u=98.5$。

最后我们来看左方的二叉树。用 Δ 份债券 A 和价值为 L 的无风险证券的组合来复制债券 B，如图 5.5。

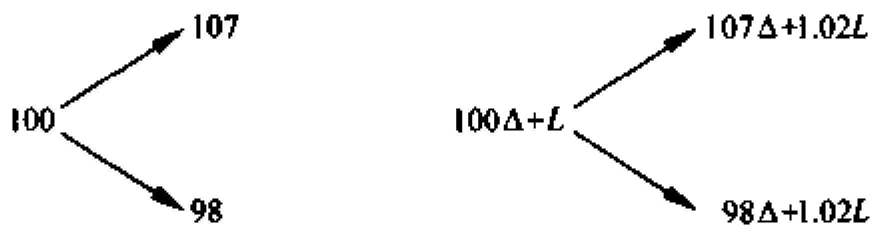


图 5.5

完全可以像第一章一样解出解出 $\Delta=0.5$ 和 $L=48.53$，并由此算出债券 B 现在的市场价值 $P_B=98.52941$。

这就是动态的无套利均衡分析方法。这里有一个关键点，就是所谓的自融资策略。稍微细心一点就可以发现，在第 1 期期末，我们以上方的状态为例，有

$$107\Delta + 1.02L = P_B^u(103) = 107\Delta^u + L^u$$

这说明，我们尽管调整了债券 A 和无风险证券在组合中的头寸，原来是 $(\Delta, L)=(0.5, 48.53)$，调整为 $(\Delta^u, L^u)=(0.488, 50.78)$，但组合的市场价值未变。实际上就是卖掉了一部分债券 A，将所得增加到无风险证券的投资中去。也就是说，尽管调整了组合中的头寸，但投资者不需要追加资金，也不会有资金富余出来。要注意的是，头寸的数值(如 Δ, L)解出来可能是负值，这是容许的，负值意味着对证券的卖空，将卖空所得投资到另一种证券(不可能二者的数额都为负)。我们假设市场的交易规则是容许卖空的。

还要注意的是，这种动态的无套利均衡分析方法是从期末倒推到期初的，即是由未来的最终值倒算出现在的值。这非常符合金融学中对价值的测算原理——金融学是面向未来的，由将来决定现在。

5. 期权定价——二叉树方法

现在出现一个问题，按照上一节的分析，用债券 A 和无风险证券就可以完全动态地复制出债券 B。如果债券 B 和复制的证券组合在任何一个时点的市场价格发生偏离，就会出现无风险套利机会。这样一来，债券 B 实际上就变成了债券 A(加上无风险证券)的衍生证券，是与债券 A 不相独立的一种有价证券。在实际的市场中，情况当然并不都是这样。原因在于我们假设每过一个时期，市场只出现两种可能的状态(二叉树)。这样，无套利均衡分析就只

需要两项互相独立的证券(债券A和无风险证券)就可以复制出所有其他的证券。但市场实际不可能每次只出现两种可能的状态，而可能出现更多的状态。于是就需要更多的互相独立的证券才可能动态地复制其他的证券，这就是市场的动态完全性问题。

但是，对于期权的定价问题来说，情况有点特殊。期权本身就是衍生品，根据上一节的分析可知，期权的价值应当可以由标的物股票的价格、预定价、距到期的时间和当时的市场利率水平(指无风险利率)决定。因此，标的物股票和无风险证券看来就应当能够完全复制期权(当然还要加上预定价和距到期的时间等条件)。这样，倒过来看，二叉树定价对期权来说就具有特殊的意义。事实上，以后我们会讲到，无限细分二叉树的时期间隔，在一定的条件下，确实能完全地描述标的物股票价格变化过程中可能发生的各种可能的状态。

请注意，这一点很重要。一般地说，债券本身是原生工具，不会是另一种债券的衍生品。要动态地复制债券，必须寻找和构筑与它高度统计相关的证券组合，这涉及相当复杂的金融工程技术，在实际中不能直接简单地采用二叉树分析方法。股票的情况则更是如此。而像期权这样的衍生工具，本身与其标的物就有高度的相关性，复制相对比较容易，二叉树分析方法有相当高的实际意义。因此，衍生工具对金融工程师来说非常重要，它们本身可以作为有效的零部件来组合复制其他的金融工具，从而也就使其他的金融工具通过它们进行分解。组合的反面就是分解，组合分解技术是金融工程的核心技术。

下面，我们用二叉树来讨论期权定价问题，并以此加深对动态无套利均衡分析方法的理解。

首先讨论不分红股票的欧式买权，用一个简单的例子从1个时期的定价讨论开始。

假设目前的无风险利率是2%，股票的价格是60元，一个时期后(为简单起见，假设1年后)，股票要么上升到90元，要么下跌到30元。如果一项买权的预定价是60元，那么期末的价值要么是30元，要么是0元，见图5.6。

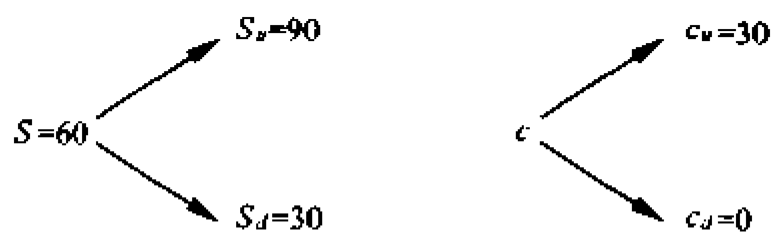


图 5.6

按照前面讲过的无套利均衡分析方法，用Δ份股票和价值为L的无风险证券来复制这一买权，可解得$\Delta=0.5$和$L=-14.71$。因此，买权现在的市场价值是$c=15.29$。如果买权现在的市场价格偏离这一均衡价值，构筑买权和复制证券组合的相反头寸，就能进行无风险套利。

现在提一个问题：为什么Δ的值是0.5?

复制证券组合对标的物股票价格变化的敏感性应当与被复制的买权一样，即应有

$$\Delta=\frac{\delta c}{\delta S}=\frac{30-0}{90-30}=0.5$$

所以复制证券组合中应当包含$\Delta=0.5$份股票。

假如股票价格到期末上升到90元的概率为q，则下降到30元的概率为$1-q$。现在再

提一个非常重要的问题：期权的定价与这一概率分布有没有关系？

从上面所作的无套利均衡定价过程看，期权的定价与这一概率分布没有关系，因此也就与股票的预期收益率无关（对于不分红股票来说，预期收益率就是资本收益率的数学期望值（概率平均值），就我们的例子来说，就是 $E(r)=q\frac{S_u-S}{S}+(1-q)\frac{S_d-S}{S}=\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}(1-q)$）。但从更深一层看，问题没有那么简单。

当我们对期权定价时，如果直接就是将期权未来的预期值（即概率平均值）折现，那么，期权的定价是应当与这一概率分布有关的。但无套利均衡分析不是这样做的（在什么情况下可以这样做，我们后面会讲到），无套利均衡分析只用到股票现在的价格 S。原因在于，在一个有效率的市场中，股票目前的均衡价格已经反映了其未来的收益。所以，期权的定价只需要用到股票目前的价格 S。

进一步的问题是，如果现在市场上出现一个利好的消息，股票价格上升的概率变大了，影响不影响期权的价值呢？答案是会发生影响的。概率的变化将引起目前股票价格的变化，进而影响到期权的价值。

所以，虽然从无套利均衡分析的过程来看，期权的定价并不直接与股票价格变化的概率相关，但实际上是通过股票目前市场价格的变化影响到期权的价值。

这涉及更深一层面的问题。我们一再强调过，金融工具（有价证券）在市场上的定价与投资者的风险偏好无关。这实际上指的是不发生直接的关系。整个市场的价格变化实际上是和市场参与者（不是指个别参与者）的风险偏好有关系的，进而也会影响到金融工具的定价。

下面我们导出二叉树定价的一般模型。先引入一些记号：

$u=1+$股票价格上涨状态的收益率

$d=1+$股票价格下跌状态的收益率

$\bar{r}=1+r_f$（无风险收益率）

为了不发生无风险套利机会，必须有

$$d<\bar{r}<u$$

这一点请读者自己证明。

于是 $S_u=uS$，$S_d=dS$，复制买权的关系为

$$\Delta uS-\bar{r}L=c_u=\max\{uS-X,0\}$$

$$\Delta dS-\bar{r}L=c_d=\max\{dS-X,0\}$$

这里对无风险证券的头寸用负号（意味着卖空无风险证券或以无风险利率借款），纯粹是为了后面公式的整齐起见。

由此可以解出

$$\Delta=\frac{c_u-c_d}{S(u-d)}$$

$$L=\frac{dc_u-uc_d}{\bar{r}(u-d)}$$

请注意，因为

$$dc_u-uc_d=d\max\{uS-X,0\}-u\max\{dS-X,0\}$$

$$=\max\{udS - dX, 0\} - \max\{udS - uX, 0\} > 0$$

所以 $L>0$，即在复制买权的证券组合里，无风险证券一定是卖空的（或以无风险利率借款）。最后，买权的复制头寸是 $c=\Delta S-L$。

我们建议读者自己推导一下复制卖权头寸的公式。

6. 风险中性假设

现在我们讲解在金融学中极为重要的风险中性假设(risk-neutrality)。

定义

$$p = \frac{\bar{r} - d}{u - d} \quad 和 \quad (1 - p) = \frac{u - \bar{r}}{u - d}$$

可以导出

$$c = \Delta S - L = \frac{c_u - c_d}{u - d} - \frac{dc_u - uc_d}{\bar{r}(u - d)} = \frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\bar{r} - d}{u - d}\right)c_u + \frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{u - \bar{r}}{u - d}\right)c_d$$
$$= \bar{r}^{-1}[pc_u + (1 - p)c_d]$$

请注意，如果把 p 和 $1-p$ 作为概率的话，这最后的一个等式表明，买权的市场均衡价值相当于期末买权价值的预期值（概率平均值）用无风险利率折现后的现值。这一情况对于卖权来说也是一样的。但一般说来，$p\neq q$，所以 p 和 $(1-p)$ 不是真实的概率。它们被称为风险中性概率，理由我们很快就会解释。此外，期权是有风险的金融工具，要计算现值的话，折现率也不应该是无风险利率。这都涉及到风险中性假设。

我们先有必要解释一下什么是风险厌恶、风险中性和风险喜好。

18 世纪著名数学家伯努利(Daniel Bernoulli)在研究赌博问题时发现，人们往往对赌博可能输掉的钱看得比可能赢到的钱重。例如有一个掷硬币的赌局，假定硬币是完全对称的，正面朝上可以赢得 2 000 元，反面朝上则 1 分钱也收不回。现在问，入局费（要下的赌注）应当是多大，才能使这一赌局成为一场公平的赌博？

所谓公平的赌博是指赌博结果的预期只应当和入局前所持有的资金量相等，即赌博的结果从概率平均的意义上来说应当是不输不赢。那么，我们的例子中的入局费就应当是 50%×2 000 元+50%×0 元=1 000 元。花费 1 000 元参加这一赌局，使这一赌局成为一场公平的赌博。但是，对于许多人来说，不愿意花 1 000 元来参加这一虽是公平的赌局，因为赌博是冒险的。有人也许只愿意花 300 元来入局，有人甚至只愿意花 100 元来入局。所以，他们实际上是分别要求有 700 元甚至 900 元的预期收益作为承受风险的补偿。这些人是风险厌恶型的，在没有风险补偿时，风险厌恶型的人拒绝公平的赌博。现代金融学认为理性的市场参与者都是风险厌恶型的，但各人对风险的厌恶程度有所不同，有人相对激进，有人则相对保守，对承受相同的风险，要求不同的风险补偿，激进者要求比较小的风险补偿，保守者则反之。

如果有人愿意无条件地参加公平的赌博，则这样的人被认为是风险中性的。风险中性者对风险采取无所谓的态度。例如有另外一个赌局是这样设计的：硬币正面朝上可以赢得 4 000 元，反面朝上则还要赔 2 000 元，入局费也是 1 000 元，这也是一场公平的赌博，风险中性者也会无条件地参加。但这一赌局的风险显然比上一个赌局来得大。因此，风险中性

者对风险的大小无所谓。如果我们把购置未来收益不确定的资产的投资活动看作赌博的话，风险中性的投资者对所有资产所要求的预期收益率都是一样的，而不管其风险如何，并不要求风险的补偿。因此，对所有资产所要求的预期收益率也就同无风险资产的收益率相同。这就是说，风险中性的投资者投资于任何资产所要求的收益率就是无风险收益率。

那么，是否存在风险喜好型的人呢？我们来看最典型的六合彩赌博(supper lotter)。六合彩彩票一般由50个左右的数字组成，下面就算是从1到50这50个数字。博彩者随意圈定6个数字，如果与摇奖摇出的6个数字完全吻合，就能中大奖，比如说3 000 000元。为了简单起见，我们不考虑猜中5个、4个、3个数字的小奖(事实上，博彩的人都是冲着大奖来的)。如果彩票是1元一张，这是一场什么样的游戏呢？

3 000 000元的大奖是非常诱人的，但中奖的概率只有$\frac{1}{15\ 890\ 700}$。在不计小奖的情况下(即认为只要不是6个数字全部猜中，就1分钱也拿不到)，每张彩票的预期收益是$\frac{1}{15\ 890\ 700}\times 3\ 000\ 000+\frac{15\ 890\ 699}{15\ 890\ 700}\times 0=0.20$元。彩票是1元一张，所以这显然不是公平的赌博。但成千上万的人去购买六合彩彩票，说明当人们去博彩时，都是风险喜好型的。此时人们得到的非但不是风险的补偿，甚至是风险的折扣。风险喜好是赌徒的典型心态，市场的理性的参与者都不是赌徒，都是风险厌恶型的。这是投机者与赌徒的基本区别，投机者是市场的理性参与者，他们接受风险的目的是为了获得风险的补偿。投机者是风险厌恶型的，他们不是赌徒！

在一个假想的风险中性的世界里，所有的市场参与者都是风险中性的，那么，所有的资产不管其风险大小或是否有风险，预期收益率都相同，都等于无风险收益率。而且，所有资产现在的市场均衡价格都应当等于其未来收益的预期值，加上考虑到资金的时间价值，就都是未来预期值用无风险利率折现后的现值。这就是我们为什么把p和$(1-p)$叫做风险中性概率，而采用无风险利率作折现率的原因。

风险中性假设是和无套利均衡分析紧密联系在一起的。当无风险套利机会出现时，所有的市场参与者就都会进行套利活动，而不管其对风险的厌恶程度如何。由此出发，就可以得到这样一个合乎逻辑的推理结果：

> *无套利均衡分析的过程和结果与市场参与者的风险偏好无关。*

因为理性的市场参与者都被认为是风险厌恶型的，要他们接受风险就一定要给予风险的补偿。因此，在有风险资产的预期收益率里，都包含有风险的补偿在内。对风险的厌恶程度愈烈，要求的风险补偿就愈大。如果对一个问题的分析过程与市场参与者的风险偏好无关，那么其结果也就无所谓风险补偿的问题。于是就引出了风险中性假设。

所谓风险中性假设是

> *如果对一个问题的分析过程与投资者的风险偏好无关，则可以将问题放到一个假设的风险中性的世界里进行分析，所得的结果在真实的世界里也应当成立。*

利用风险中性假设可以大大地简化问题的分析，因为在风险中性的世界里，对所有的资产(不管风险如何)都要求相同的收益率(无风险收益率)，而且，所有资产的均衡定价都可以按照风险中性概率算出未来收益的预期值，再以无风险利率折现得到。最后，将所得的结果放回真实的世界，就获得有实际意义的结果。

利用风险中性假设的分析方法进行金融产品的定价，其核心环节是构造出风险中性概率。无套利均衡分析方法不涉及参与者的风险偏好，因此适合于风险中性假设的分析方法。我们从上面对期权定价的二叉树方法的例子知道，无套利和风险中性概率之间存在相互依存的关系。我们在以后通过引入鞅的概念讲解无套利基本定理时，会更深入地讨论这一问题。

7. 利用风险中性假设的二叉树定价

现在我们可以利用风险中性假设的分析方法来对多时期的期权进行定价。先来看 2 时期的情况(见图 5.7)。

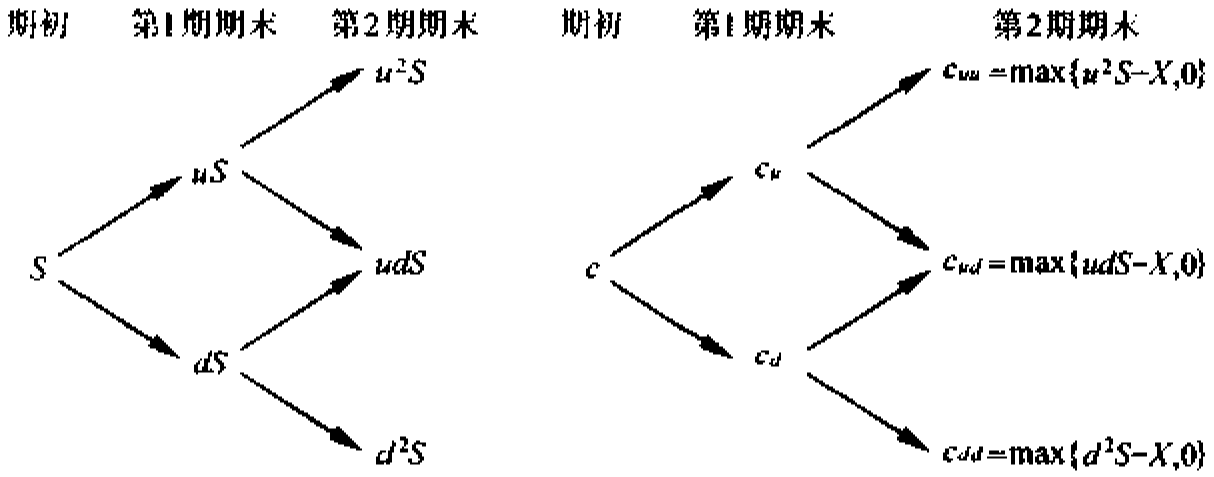


图 5.7

先从第二期期末倒推到第一期期末，有

$$c_u=\bar{r}^{-1}[pc_{uu}+(1-p)c_{ud}]$$
$$c_d=\bar{r}^{-1}[pc_{ud}+(1-p)c_{dd}]$$

再从第一期期末倒推到期初，得出

$$c=\bar{r}^{-2}[p^2c_{uu}+2p(1-p)c_{ud}+(1-p)^2c_{dd}]$$

不难推导出 n 期的一般定价公式

$$c=\bar{r}^{-n}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}c_{u^jd^{(n-j)}}$$
$$=\bar{r}^{-n}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}\max\{u^jd^{(n-j)}S-X,0\}$$

此处，概率 p 和 $(1-p)$ 与前面一样，是 $p=\frac{\bar{r}-d}{u-d}$ 和 $(1-p)=\frac{u-\bar{r}}{u-d}$。

这一结果应该和采用自融资的动态无套利均衡分析方法的定价结果一样，但推算要容易得多。为了验证这一点，我们用下面的数字例子来做一遍(见图 5.8)。

无风险利率为 2%，即有 $\bar{r}=1.02$，另外，由图知 $u=1.2$，$d=0.8$，于是有 $p=\frac{\bar{r}-d}{u-d}=$

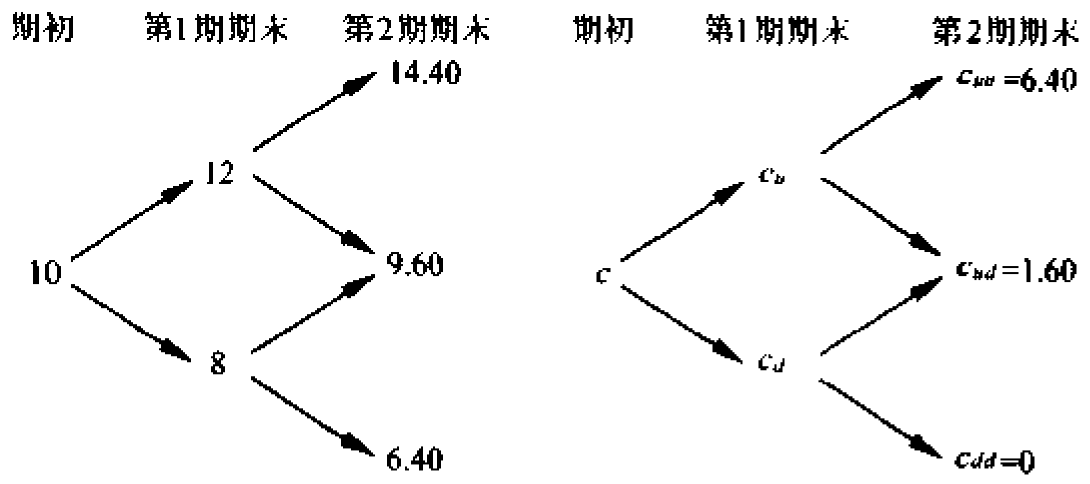


图 5.8

$\frac{1.02-0.8}{1.2-0.8}=0.55$，$(1-p)=0.45$。

1）利用风险中性假设计算

$$c=\bar{r}^{-2}[p^2c_{uu}+2p(1-p)c_{ud}+(1-p)^2c_{dd}]$$

$$=\left(\frac{1}{1.02}\right)^{-2}[0.55^2\times 6.40+2\times 0.55\times 0.45\times 1.60+0.45^2\times 0]=2.62$$

2）采用动态复制技术计算

$$\Delta^u=\frac{c_{uu}-c_{ud}}{uuS-udS}=\frac{6.40-1.60}{14.4-9.6}=1.0$$

$$L^u=\frac{dc_{uu}-uc_{ud}}{\bar{r}(u-d)}=\frac{0.8\times 6.40-1.2\times 1.60}{1.02(1.2-0.8)}=7.84$$

因此，$c_u=\Delta^u uS-L^u=1.0\times 12-7.843=4.157$。同理，算得 $c_d=0.862$。

再倒推到期初，有 $\Delta=0.824$，$L=5.616$，所以 $c=\Delta S-L=2.62$，两种算法的结果一样。

8. 小结

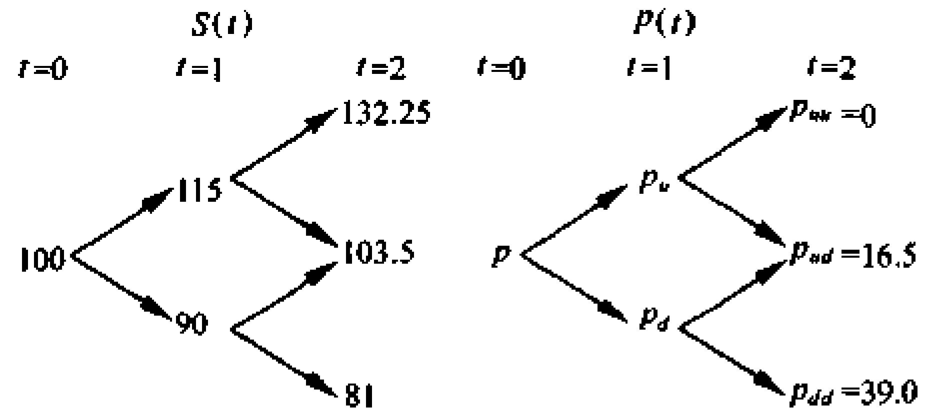
动态无套利均衡分析与静态无套利分析不同之处在于复制组合的构成头寸要进行动态的调整，我们在本章中介绍的分析方法有一个要点是自融资策略。在上面的数字例子里，复制 c 的组合 $\Delta S-L=2.623$ 中，$\Delta=0.824$，$L=5.616$。到了第一期期末，如果标的物股票价格上涨，在复制 c_u 的组合中，股票的头寸变成 $\Delta^u=1.0$，原来的股票头寸只有 $\Delta=0.824$，就不够了！这时，需要补进 0.176 份股票，此时每份股票的市价是 12 元，需要融资 $0.176\times 12=2.112$ 元。所谓自融资就是再卖空价值为 2.112 元的无风险证券(即以无风险利率再借入 2.112 元)，此时组合中无风险证券的空头头寸应为 $5.616\times 1.02+2.112=7.84$ 元，这正好就是 L^u 的数字。这说明，在第一期期末时，我们只是调整了组合中股票头寸和无风险证券头寸的比重，整个组合的价值没有变化，都是股票价格上升后和无风险证券加上 1 期利息后的组合价值 4.157 元。这就是自融资策略！其他节点的情况也都是一样的。

风险中性假设是现代金融理论中极为重要的理论假设。它的成立在本质上是因为在无套利均衡分析中，复制组合的头寸和被复制证券的头寸实现了完全的风险对冲，整个组

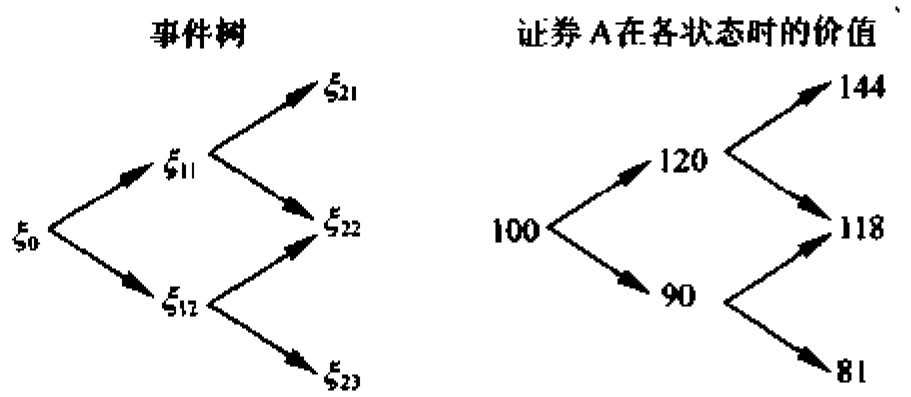
合不再承受风险，当然也就与投资者的风险偏好无关。进一步说，套利机会一旦出现，所有的投资者都会抓住机会套利，而不管他们的风险偏好如何，即无套利均衡分析过程是与投资者的风险偏好程度（实际上是风险厌恶程度）无关的。在一个假想的风险中性的世界里，所有的资产的收益率都是无风险收益率，资金的时间价值问题变得很简单（全部可用无风险利率折现），因此可以大大简化问题的分析过程，而所得的结论又可以放回真实的世界，在真实的世界里依然成立。这是一种非常技巧化的理论，在金融工程的研究中，具有极其重要的启发性涵义。

练习题

1. 已知股票 S 的价格变动趋势如图所示，$r_f=5\%$。利用动态复制技术为股票 S 的卖权 $p(t)$ 定价（期权 $t=2$ 时到期，执行价格为 120 元）。



2. 已知 $r_f=10\%$。



若某买权在 ξ_{21}，ξ_{22}和 ξ_{23}时的价值分别为 6.40，1.60 和 0。

1) 利用动态复制技术求 $c(\xi_0)$ 及 ξ_{21}的状态价格。

2) 利用风险中性定价求 $c(\xi_0)$ 及 ξ_{21}的状态价格。

第六章 布莱克-舒尔斯期权定价模型

我们在第五章用二叉树定价方法介绍了动态无套利均衡分析方法并引入了风险中性假设。我们在本章中通过介绍布莱克-舒尔斯期权定价模型来深化这些概念。

布莱克和舒尔斯在1973年发表的第一个期权定价模型中，蕴含着一个极为深刻的思想，即他们意识到期权的风险实际上在标的物的价格及其运动中就得到反映，而且标的物的价格还反映了市场对未来的预期。因此，要研究期权定价必须首先刻画标的物价格的运动规律，而这也是所有后续的期权定价理论的出发点。他们的原始研究是面向以不分红股票作为标的物的欧式期权。因此，首先要对标的物即股票的价格运动规律做出研究。

1. 股票价格运动的规律

二叉树定价看起来有很不合理的地方，因为证券价格的运动看来不是要么按 u 变大，要么按 d 变小的。证券价格可能取任何值！二叉树定价的合理性何在呢？我们在研究股票价格运动的规律后将得到解释。

我们要用一些随机过程的知识，所以这里先做一点解释。所谓随机过程（随机序列或随机链）是一族无穷多个相互有关的随机变量 $\{S(t)\}$，其中参数 t 的变化如果是连续的，如 $t\in[0,\infty)$，则是随机过程；如果 t 的变化是离散的，如 $t=0,1,\cdots$，则是随机序列或随机链。$S(t)$ 可以是1维的变量，也可以是多维的向量，即可以是 $S(t)=\{S_1(t),\cdots,S_N(t)\}$。

假如一年365天都能观察到股票的价格如下：

$$S_0 \quad \widetilde{S}_1 \quad \widetilde{S}_2 \quad \cdots \quad \widetilde{S}_{364} \quad \widetilde{S}_{365}$$

除了当前时刻 $t=0$ 之外，后面的股票价格上都加上一个波折号～，因为它们都是随机变量。

每天的收益率可以这样计算：

$$\left(\frac{\widetilde{S}_1}{S_0}\right) \quad \left(\frac{\widetilde{S}_2}{\widetilde{S}_1}\right) \quad \cdots \quad \left(\frac{\widetilde{S}_{364}}{\widetilde{S}_{363}}\right) \quad \left(\frac{\widetilde{S}_{365}}{\widetilde{S}_{364}}\right)$$

于是每天的收益率可表示成

$$1+\frac{\widetilde{R}_t}{365}=\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t-1}}$$

这里 $\widetilde{R}_t$ 实际上是“按日计息”的日利率，按照习惯以年率的形式表示。要计算年利率 $\widetilde{R}$，就应该是

$$1+\widetilde{R}=\left(\frac{\widetilde{S}_{365}}{S_0}\right)=\left(\frac{\widetilde{S}_1}{S_0}\right)\left(\frac{\widetilde{S}_2}{\widetilde{S}_1}\right)\cdots\left(\frac{\widetilde{S}_{365}}{\widetilde{S}_{364}}\right)=\left(1+\frac{\widetilde{R}_1}{365}\right)\left(1+\frac{\widetilde{R}_2}{365}\right)\cdots\left(1+\frac{\widetilde{R}_{365}}{365}\right)$$

要处理这个连续乘积是比较麻烦的，因此通常换算为以连续计息方式计息的连续复利

$$\frac{r_t}{365}=\log\left(1+\frac{\widetilde{R}_t}{365}\right)=\log\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t-1}}$$

这个 r_t 是连续计息的连续复利利率，也以年率表示。从而有连续计息的年利率

$$r=\log(1+\widetilde{R})=\log\left(1+\frac{\widetilde{R}_1}{365}\right)+\log\left(1+\frac{\widetilde{R}_2}{365}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{\widetilde{R}_{365}}{365}\right)$$

$$=\frac{1}{365}(r_1+r_2+\cdots+r_{365})$$

请注意，在这里虽然 $r_1,r_2,\cdots,r_{365}$ 是按日计算的，但实际上可以按照任何的时间间隔计算，即有

$$r=\frac{1}{n}(r_1+r_2+\cdots+r_n)$$

下面对股票价格的运动方式给出基本的假设：

1）所有的 r_t 都是独立同分布的；

2）股票的价格变化是连续的。

由这两个条件知，当时间间隔取得很小，即 n 可以取很大数值时，由中心极限定理知随机变量 r（股票的连续复利收益率）服从正态分布，价格的年变化 $1+\widetilde{R}=\left(\frac{\widetilde{S}_{365}}{S_0}\right)$ 就服从对数正态分布。这里要注意的是，第二个条件是必需的。如果不保证股票的价格变化是连续的，则还有其他的随机过程的概率分布满足第一个条件，例如普哇松过程，描述的是按常数概率跳跃的随机过程。

因此，在满足以上两个条件时，有

$$\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(0)}\right)\sim N(\mu T,\sigma^2 T)$$

这意味着有数学期望值

$$E\left[\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(0)}\right)\right]=\mu T$$

和方差

$$Var\left[\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(0)}\right)\right]=\sigma^2 T$$

数学期望值和方差之所以都正比于时间长度 T，是因为前面的条件 1），组成随机过程的各个微小时间间隔上的随机变量之间是互相独立的。

令 $y=\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(0)}\right)$，则 $y\sim N(\mu T,\sigma^2 T)$，而 $\widetilde{S}(T)=S(0)e^y$。进行简单的变量替换，可求出 $\widetilde{S}(T)$ 的数学期望值

$$E(\widetilde{S}(T))=S(0)\exp\left(\mu T+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$$

因此，请注意，一定有

$$E(\widetilde{S}(T))>S(0)\exp(\mu T)$$

如果对对数正态分布的含义不清楚的话，在这里很容易搞错。

对于二叉树定价来说，如果从 $t=0$ 时刻到 $t=T$ 时刻，所分的阶段数越来越多，即二叉树越分越细密，适当地选择二叉树中的 u 和 d(使 u 和 d 都"足够快"地趋于 1)，当所分的阶段数趋于无穷大时，股票的价格变化就趋向于对数正态分布。

理由是：二叉树各个阶段股票价格的变化是互相独立的，而且变化的概率分布是同分布的。因此满足前述条件 1)。至于条件 2)，是使 u 和 d 的选择使它们都"足够快"地趋于 1，从数学上就能证明股票价格的变化趋于连续。于是，由中心极限定理知，当所分的阶段数 $n\to\infty$ 时，股票收益率的变化将趋于服从正态分布(价格变化趋于对数正态分布)。

为了看清楚这一点，我们来观察二叉树定价时价格的变化规律。有

$$\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)=\begin{cases}u, & \text{按照概率 } q\\ d, & \text{按照概率 } 1-q\end{cases}$$

因此均值(数学期望值)为

$$E\left[\log\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)\right]=q\log(u)+(1-q)\log(d)$$

方差为

$$\mathrm{Var}\left[\log\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)\right]=q(1-q)\left[\log\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2$$

对于 n 个阶段的二叉树，因为各个阶段之间价格变化是互相独立的，其均值和方差就应为

$$E\left[\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right]=n[q\log(u)+(1-q)\log(d)]$$

$$\mathrm{Var}\left[\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right]=nq(1-q)\left[\log\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2$$

如果我们这样选择 u,d 和 q:

$$u=\exp(\sigma\sqrt{T/n})$$

$$d=1/u=\exp(-\sigma\sqrt{T/n})$$

$$q=0.5+0.5\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{T/n}$$

显然当 $n\to\infty$ 时，有

$$n[q\log(u)+(1-q)\log(d)]\to\mu T$$

$$nq(1-q)\left[\log\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2\to\sigma^2 T$$

u 和 d 的选择方法使它们都"足够快"地趋于 1。二叉树各阶段之间股票收益的对数的变化是独立同分布的，由中心极限定理知无限细分时会使股票价格趋于服从对数正态分布，而 u,d 和 q 的选择保证了连续计息收益率在单位时间的均值和方差分别是 μ 和 σ^2。因此，适当选择参数，二叉树无限细分确实能够描述股票价格的运动规律。

2. 布莱克-舒尔斯期权定价模型

布莱克-舒尔斯期权定价模型有一系列假设条件，主要有：

1）市场的无摩擦性，包括：

i）无税、无交易成本；

ii）所有的资产可以无限细分；

iii）没有卖空限制。

2）从时刻 $t=0$ 到 $t=T$，都可以以一相同的不变的利率借贷，利率按连续复利 r 计算。

3）从时刻 $t=0$ 到 $t=T$ 股票不分红。

4）标的物股票价格的变化遵循对数正态分布的随机过程，包括以下条件：

i）股票价格连续变化；

ii）在整个期权生命期内，股票的预期收益和收益方差保持不变；

iii）任何时间段股票的收益和其他时间段股票的收益互相独立；

iv）任何时间段股票的复利收益率服从正态分布，即有

$$\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) \sim N(\mu(t_2 - t_1),\ \sigma^2(t_2 - t_1))$$

当然，布莱克-舒尔斯原始模型定价的是欧式期权，即必须到到期日才能执行的期权。

在以上所有假设条件下，股票价格的运动遵循一种称之为带漂移的几何布朗运动的规律，在数学上则表现为称作伊藤过程的一种随机过程。可以这样表示：

$$\mathrm{d}S = \mu^* S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}z = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}z$$

其中

S 是标的物（股票）的价格；

μ^* 是所谓漂移率，$\mu^* = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$，所以 μ^* 是连续计算收益率的股票在单位时间内收益的预期收益率，而 μ 即前面所述的连续计算收益率的股票在单位时间内收益的自然对数的数学期望值；

σ 是波动率，即连续计算收益率的股票在单位时间内收益的自然对数的标准差；

$\mathrm{d}z = \varepsilon\sqrt{dt}$ 是称之为维纳过程（即布朗运动）的一种随机过程，ε 满足标准正态分布，数学期望值为 0，方差为 1。

请注意，如我们前面所指出的，连续计算收益率的股票在单位时间内收益的自然对数实际就是单位时间连续计息的复利收益率。

我们在本章的数学附录中证明，满足上述伊藤过程的股票的连续计息复利收益率服从正态分布，即价格变化服从对数正态分布。所以这一伊藤过程的数学模型确实描绘了股票价格的连续变化规律。

对伊藤过程的研究有一个重要的数学结果，这就是所谓的伊藤引理。

伊藤引理：如果 $f = f(S,t)$ 是衍生品的价格（取决于标的物股票的价格 S 和时间 t），则有以下的关系

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu^* S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\mathrm{d}z$$

显然，$f = f(S,t)$ 可以统一地表示买权或卖权的价格。

布莱克-舒尔斯期权定价模型采用的是典型的动态无套利均衡分析技术。在上述假设条件下，采取一种动态交易策略，来复制欧式买权到期末的现金流。这一复制技术是在期初 $t=0$ 购买一个由标的物股票和一种无风险证券构成的证券组合，然后不断地动态调整其头寸使之保持住无套利均衡关系，一直到到期日 $t=T$。这样，现在 $t=0$ 时刻欧式期权的价值就一定等于复制组合在 $t=0$ 时刻的价值。这一动态复制过程有以下三个特点：

1）与复制 1 份欧式买权相对应，股票的头寸始终小于 1 股。

2）所对应的股票头寸的大小称为套头比或期权的德尔塔（Δ），德尔塔这样定义

$$\Delta=\frac{\partial f}{\partial S}$$

其中 f 表示买权或者卖权。我们回想一下，在上一章讨论二叉树定价时，我们选择的复制组合中的股票头寸就是 Δ，与这里的涵义实际上是一样的。

3）套头比（即 Δ）不停地发生变化，所以为了复制 1 份期权，需要随时调整复制组合中股票的头寸，但这种调整是无成本的（自融资的）。

具体地说，这一动态复制过程就是用期权、标的物股票和一种无风险证券来构筑一个无套利均衡的组合头寸：

用 $\Delta=\frac{\partial f}{\partial S}$ 份标的物股票（股票的价格是 S）的多头（即买入）和无风险证券的空头（卖出）来复制 1 份期权（其价格以 f 表示）。无风险证券的空头的价值记为 L。为了使复制在全过程成立，必须始终动态地保持住以下关系：

$$f=\frac{\partial f}{\partial S}S-L$$

移项整理一下，变成

$$L=-f+\frac{\partial f}{\partial S}S$$

经过一段微小的时间 δt，两边的价值变化为

$$\delta L=-\delta f+\frac{\partial f}{\partial S}\delta S$$

伊藤过程刻画了 δS，而伊藤引理刻画了 δf，将前述的关系代入，得到有趣的结果

$$\delta L=\left(-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2S^2\right)\delta t$$

请注意，在上面的表达式的右边，随机项 z 不再出现。这意味着 1 份期权的空头和 Δ 份股票的多头能实现风险的完全对冲，而 Δ 的大小是动态地调整变化的。所以，右边这二者的组合和与之等值的无风险证券是完全等价的。即二者组合的收益率应当等于无风险收益率 r_f，有

$$\frac{\delta L}{L}=r_f\delta t$$

即有

$$\frac{\delta L}{\delta t}=r_fL$$

令 $\delta t\to 0$ 并在上述关系式里展开 δL 和 L，就得到布莱克-舒尔斯随机微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+r_fS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=r_ff$$

这个随机微分方程刻画了动态调整组合头寸保持无套利均衡的规律。

按照期权到期时的情况可以定出这个微分方程的终端条件如下：当 $t=T$ 时，

对于买权来说，有 $c=f(T)=\max(S(T)-X,0)$；

对于卖权来说，有 $p=f(T)=\max(X-S(T),0)$。

其中 X 是期权中预先指定的标的物的价格(预定价即执行价)。根据终端条件，可以倒向解出上述微分方程的初始值的表达式，就得出布莱克-舒尔斯的期权定价公式：

$$c=S(t)N(d_1)-Xe^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

$$p=Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)-S(t)N(-d_1)$$

其中 $N(\cdot)$是累计正态分布函数，而

$$d_1=\frac{\log(S(t)/X)+(r_f+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

数学表达式看起来有点可怕，但实际上都已编制好程序装入计算器里，经纪人可以随时很方便地用它们给期权定价。

布莱克-舒尔斯随机微分方程有多种不同的解法，可以得到同样的结果。在布莱克和舒尔斯的原始论文里，是通过变量替换把微分方程转变成一个标准的抛物型方程(热扩散方程)解出。许多解法主要依赖于数学技巧，缺乏明显的金融涵义。我们在本书中只介绍利用风险中性假设的解法，因为我们认为这种解法具有比较深刻的金融学涵义，并可为后面介绍等价鞅测度模型做准备。

3. 风险中性定价

我们在第五章已经介绍过风险中性假设，如果再分析一下上面的布莱克-舒尔斯随机微分方程，就发现可以采用风险中性假设来定价。

在布莱克-舒尔斯随机微分方程中，通过动态对冲(称为 Δ 对冲)的办法，使风险因为完全的对冲而消除掉，方程中不再含有随机项 z。除此之外，细心的读者会发现，方程中也不再含有 μ。这一点同样是意味深长的。股票的预期收益率中含有风险补偿，因而会与投资者的风险偏好有关。不含 μ(μ 是连续计算收益率的股票在单位时间内收益的自然对数的数学期望值，即预期的单位时间连续计息的复利收益率)，说明问题与投资者的风险偏好无关。这样，风险中性假设将可适用。

于是，我们可以把求解布莱克-舒尔斯随机微分方程的期权定价问题先放到一个“风险中性”的世界里去研究。在这个假想的世界里，所有的市场参与者都是风险中性的，他们对于有风险资产的收益，都不需要风险的补偿。因此，在这个假想的世界里，所有资产的预期收益率都相等，即都等于无风险收益率 r_f。为了更一般起见，假设现在的时刻是 t，则有如下关系式

$$E^*\left[\frac{\tilde{S}(T)}{S(t)}\right]=\exp(r_f(T-t))$$

请注意，这里的 E^* 表示采用风险中性概率求数学期望。下一步的分析必须非常仔

细。当我们把真实世界的问题转移到风险中性的世界中时，我们并没有改变标的物股票价格运动和变化的方式。所以，在假想的风险中性的世界里，股票价格仍然应该服从对数正态分布。而且，从直观上想象，波动率 σ 也应当保持不变（关于这一点，严格的数学证明比较麻烦，在本书中就不证了）。不同的是 μ。为了有所区别起见，我们在假想的风险中性的世界里，把 μ 记为 $\overline{\mu}$。

前面我们讨论服从对数正态分布的价格变化的规律时已经指出过价格预期值（数学期望值）的正确表达式应该是

$$E(\tilde{S}(T)) = S(t)\exp(\mu(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))$$

在风险中性的世界里，这个关系式也应该成立，不过应该改写为

$$E^*(\tilde{S}(T)) = S(t)\exp(\overline{\mu}(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))$$

同时我们有

$$E^*(\tilde{S}(T)) = S(t)\exp(r_f(T-t))$$

所以有

$$\overline{\mu} = r_f - \frac{1}{2}\sigma^2$$

这里一定要注意 $\overline{\mu}$ 的含义，建议读者回过头去看一下本章前面讲述过的 μ 的定义。

在一个风险中性的世界里，未来带有不确定性的现金流的数学期望值（概率平均值）用无风险利率折现后的现值就应该是均衡定价（回忆前一章关于公平赌博的讨论）。我们以买权为例，期末 $t=T$ 时的取值是

$$\max[\tilde{S}(T) - X, 0]$$

其中 $\tilde{S}(T)$ 是随机变量，在真实的世界里，服从真实概率 P，在风险中性世界里，服从风险中性概率 P^*。

在风险中性世界里的定价就应当是

$$c(S(t),t) = e^{-r_f(T-t)}E^*\{\max[\tilde{S}(T) - X, 0]\}$$

记 $f^*(\tilde{S}(T))$ 为风险中性概率的密度函数，就可把上式写成

$$\begin{aligned} c(S(t),t) &= e^{-r_f(T-t)}\int_0^{\infty}\max[\tilde{S}(T) - X, 0]f^*(\tilde{S}(T))d\tilde{S}(T) \\ &= e^{-r_f(T-t)}\int_X^{\infty}[\tilde{S}(T) - X]f^*(\tilde{S}(T))d\tilde{S}(T) \end{aligned}$$

我们知道，即使在风险中性的世界里，股票的价格也是服从对数正态分布的，即在风险中性的世界里，我们有

$$\log\left(\frac{\tilde{S}(T)}{S(t)}\right) \sim N(\overline{\mu}(T-t), \sigma^2(T-t))$$

作变量替换

$$z = \frac{\log\left(\frac{\tilde{S}(T)}{S(t)}\right) - \overline{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

可以化作标准正态分布的形式，即

$$z \sim N(0,1)$$

代入原积分式后，就有

$$c(S(t),t) = S(t)\int_{-\bar{d}}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{T-t}+(\bar{\mu}-r_f)(T-t)}\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dz - Xe^{-r_f(T-t)}\int_{-\bar{d}}^{\infty}\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dz$$

$$= S(t)e^{(\bar{\mu}-r_f+\sigma^2/2)(T-t)}\int_{-\infty}^{\bar{d}+\sigma\sqrt{T-t}}\frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dw - Xe^{-r_f(T-t)}\int_{-\infty}^{\bar{d}}\frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dw$$

$$= S(t)N(\bar{d}+\sigma\sqrt{T-t}) - Xe^{-r_f(T-t)}N(\bar{d})$$

此处，

$$\bar{d} = \frac{\log(S(t)/X) + \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

代入

$$\bar{\mu} = r_f - \frac{1}{2}\sigma^2$$

就有

$$\bar{d} = \frac{\log(S(t)/X) + (r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2$$

又有 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$，于是得到

$$c(S(t),t) = S(t)N(d_1) - Xe^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

这就是布莱克-舒尔斯随机微分方程的解。因为问题本身与投资者的风险偏好无关，所以在风险中性世界里的解也就是真实世界里的解。

现在我们来看一下 $N(d_2)$ 的涵义。在假想的风险中性的世界里，到到期日股票价格高于预定价的概率是

$$P^*(\tilde{S}(T) > X) = P^*\left[z > \frac{\log\left(\frac{X}{S(t)}\right) - \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$= P^*\left[z > -\frac{\log\left(\frac{S(t)}{X}\right) + \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$= P^*\left[w < \frac{\log\left(\frac{S(t)}{X}\right) + \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$= N\left[\frac{\log\left(\frac{S(t)}{X}\right) + (r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] = N(d_2)$$

所以，$N(d_2)$ 是在风险中性世界里，股票价格高于预定价的（风险中性）概率。由风险中性定价的原理知，假如一份期权到期末时，如果标的物股票的价格高于期权的预定价，则到期时期权的价值为 1 元，否则价值为 0。这样，这份期权现在的定价就是 $N(d_2)$ 元。

另外，从布莱克-舒尔斯期权定价公式看，因为有

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S} = -N(-d_1)$$

所以 $N(d_1)$实际上就是动态套头比。

4. 布莱克-舒尔斯期权定价公式的推广

我们在这一节里对布莱克-舒尔斯期权定价公式加以推广。

(1) 标的物股票支付已知红利的情况

首先考虑标的物股票支付已知红利的欧式期权。

假如现在是时刻 t，欧式买权的到期日是 T，标的物股票将在时刻 t_1 支付已知数额的红利 D，有 $t<t_1<T$。

因为在买权的到期日之前要支付红利，因此标的物的价值不是股票本身，而应该是股票减去红利本身的现值。于是，标的物股票的现在的价值 $S(t)$由两个部分构成：

1) 发生在 t_1 时刻的无风险的红利(因为红利的数额是预先确定的)。

2) 支付红利后到 T 时刻时股票的价值的现值。这一部分价值是有风险的，故记为 $S_{\text{risky}}(t)$，有

$$S_{\text{risky}}(t) = S(t) - De^{-r_f(t_1-t)}$$

请注意，以上分析对于在时刻 t 到时刻 T 之间多次发生已知数额红利的情况也是适用的。在更一般的情况，有

$$S_{\text{risky}}(t) = S(t) - D^*$$

其中 D^* 是所有在时刻 t 到时刻 T 之间发生的红利在时刻 t 的现值。

于是我们可以直接利用布莱克-舒尔斯期权定价公式来定价了，只要用 $S_{\text{risky}}(t)$来代替 $S(t)$即可，有

$$c(t) = (S(t) - D^*)N(d_1) - Xe^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\log((S(t) - D^*)/X) + (r_f + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

请注意，不但要在期权定价公式中以 $S_{\text{risky}}(t)$来代替 $S(t)$，而且在积分限 d_1 和 d_2 中也都要用 $S_{\text{risky}}(t)$来代替 $S(t)$。

下面我们用风险中性假设来分析。

按照风险中性假设，利用布莱克-舒尔斯微分方程的终端条件积分来为欧式买权定价时，是按以下两个公式来计算的

$$c(t) = e^{-r_f(T-t)}E^*\{\max[\tilde{S}(T) - X, 0]\}$$

$$\log\left(\frac{\tilde{S}(T)}{S(t)}\right) \sim N(\bar{\mu}(T-t), \sigma^2(T-t))$$

其中 $\bar{\mu} = r_f - \frac{1}{2}\sigma^2$。

重要的是，在布莱克-舒尔斯定价公式中，$S(t)$实际上只是通过上面描述对数正态分

布的关系起作用的。因为标的物股票在期间要分红，所以下述关系式

$$E^{*}\left[\frac{\widetilde{S}(T)}{S(t)}\right]=\exp(r_f(T-t))$$

不再成立，因为期间有分红行为发生，而应代之以

$$E^{*}\left[\frac{\widetilde{S}(T)}{S_{\text{risky}}(t)}\right]=\exp(r_f(T-t))$$

这实际上是把分红的影响消除掉。这里蕴涵的关系就是

$$\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S_{\text{risky}}(t)}\right)\sim N(\bar{\mu}(T-t),\sigma^2(T-t))$$

这样积分的结果就一定是上面指出的布莱克-舒尔斯微分方程的解。

(2) 标的物股票具有已知的红利率

同样的分析方法可用来为标的物股票在每单位时间连续按比例发放红利的情况。对这种情况的分析非常重要，因为许多重要的标的物如股票指数、外汇等的期权定价，都可以转化为这种形式讨论。我们假定在任何时间段 dt 标的物股票都发放红利 $\eta S dt$，这等价于在每一刻都将剩余股票价值的比例为 ηdt 的部分分走。以连续复利计算，意味着到期末，还剩下原来股票价值的 $\exp(-\eta(T-t))$。所以，在现在时刻 t，标的物股票的价值由两部分组成：比例为 $1-e^{-\eta(T-t)}$ 的部分是作为红利在到期日 T 之前发放的，剩下比例为 $e^{-\eta(T-t)}$ 的部分是 1 份标的物股票在到期日 T 的价值的现值(在时刻 t)。跟上面一节同样的做法，我们可用 $S(t)e^{-\eta(T-t)}$ 来代替 $S(t)$，得到布莱克-舒尔斯模型的解

$$c(t)=S(t)e^{-\eta(T-t)}N(d_1)-Xe^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1=\frac{\log(S(t)e^{-\eta(T-t)}/X)+(r_f+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

和前一小节的分析一样，我们再讨论一下利用风险中性假设的定价方法，但是从更为一般的基础上讨论。风险中性假设的定价方法基本上就是用风险中性概率对期权的期末终端值算出数学期望值(概率平均值)，再用无风险利率折现，即

$$c(t)=e^{-r_f(T-t)}E^{*}\{\max[\widetilde{S}(T)-X,0]\}$$

这里的关键是要找出到期日 T 时价格为 $\widetilde{S}(T)$ 的标的物股票在时间 t 时的价值 $Y(t)$。例如，对于不分红股票来说，$Y(t)=S(t)$，而对于分红的股票(已知红利的数额)来说，则有 $Y(t)=S(t)-D^{*}$，其中 D^{*} 是期间所分红利在时间 t 的现值。在假想的风险中性的世界里，有

$$E^{*}\left[\frac{\widetilde{S}(T)}{Y(t)}\right]=\exp(r_f(T-t))$$

$$\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{Y(t)}\right)\sim N(\bar{\mu}(T-t),\sigma^2(T-t))$$

在原来计算布莱克-舒尔斯模型的积分式里，以 $Y(t)$ 代替 $S(t)$(包括在积分限里)，就能够计算出风险中性定价，定价结果在真实的世界里也成立。

现在在标的物股票具有已知的(单位时间)红利率 η 的情况下，有

$$Y(t)=S(t)e^{-\eta(T-t)}$$

以 $Y(t)$ 代替 $S(t)$ 代入原来的积分式(包括在积分限里)，积分的结果一定和直接解算

微分方程的结果一样。

(3) 外汇期权的定价

外汇期权的定价类似于支付已知红利率的股票为标的物的期权的定价。例如，德国马克对美元的汇率在时刻 t 的汇率是 0.66 美元/德国马克，则可取 $S(t)=0.66$ 美元。记 r_f^{DM} 是马克的无风险利率，$r_f^{\$}$ 是美元的无风险利率。则在任何时间段 dt，1 德国马克就相当于支付 $r_f^{\mathrm{DM}}S(t)dt$ 的美元"红利"。于是，到期日 T 时刻的 1 个德国马克，对应于时刻 t，只相当于 $\exp(-r_f^{\mathrm{DM}}(T-t))$ 个德国马克。因此，如果要求到期日 T 时刻标的资产价值为 1 德国马克的期权，在时刻 t 的美元价值就应是 $e^{-r_f^{\mathrm{DM}}(T-t)}S(t)$，代入布莱克-舒尔斯微分方程求解或者用风险中性假设求积分，就都能得到欧式外汇期权的定价公式

$$c(t)=S(t)e^{-r_f^{\mathrm{DM}}(T-t)}N(d_1)-Xe^{-r_f^{\$}(T-t)}N(d_2)$$

$$p(t)=-S(t)e^{-r_f^{\mathrm{DM}}(T-t)}N(-d_1)+Xe^{-r_f^{\$}(T-t)}N(-d_2)$$

$$d_1=\frac{\log(S(t)e^{-r_f^{\mathrm{DM}}(T-t)}/X)+(r_f^{\$}+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

(4) 分红股票美式买权的近似解

我们考虑分红股票的美式买权，假定标的物股票在时刻 t_1 分红，这里 $t<t_1<T$。美式买权的持有者要么在临近除红时刻 t_1 执行期权，要么到到期日时刻 T 执行期权。因此，我们可以把这个美式买权近似地看作两个欧式买权中取大的值的那一个。这两个欧式买权是：

1) 到时刻 t_1 到期的欧式买权，标的物股票不分红；

2) 到时刻 T 到期的欧式买权，标的物股票在时刻 t_1 分派红利 D。

我们以 $c(S(t),\tau-t)$ 标记到期日为 τ，不分红股票的欧式期权在时刻 t 的价值（用布莱克-舒尔斯定价公式求出），则分红股票的美式买权的近似解是

$$C(t)=\max[c(S(t),t_1-t),c(S(t)-De^{-r_f(t_1-t)},T-t)]$$

这一近似解很显然可以应用到多次分红的情况。

这个近似解略微偏小一点儿。盖斯克(R. Geske)、罗尔(R. Roll)和瓦莱(R. Whaley)的研究给出了在布莱克-舒尔斯模型条件下求解分红股票美式买权定价的精确解。有兴趣的读者可以参阅有关文献。

需要指出的是，在布莱克-舒尔斯模型条件下，美式卖权没有解析解存在，只能求近似解。

关于期权定价公式应用于其他方面的推广，我们将另外讨论。

5. 其他方面的推广

布莱克-舒尔斯期权定价公式还有其他方面的一些推广。

(1) 关于波动率的讨论

在布莱克-舒尔斯期权定价公式里，波动率 σ 作为常数处理。在实际中，波动率 σ 是可能随机变化的，即 σ 可以是一个随机变量。此时，我们可以用期权生命期内各时间段方差的和来代替 $\sigma^2(T-t)$。例如，某一股票的收益的自然对数的标准差（年率）在后面 3 个月中

每个月分别是36%，42%和28%，则采用布莱克-舒尔斯期权定价公式时的波动率应当这样计算

$$\sigma\sqrt{T-t}=\sqrt{\frac{1}{12}(0.36^2+0.42^2+0.28^2)}=0.179$$

要注意的是，这种处理方法只适合于波动率只跟时间和标的物股票价格有关的情况。例如，在二叉树定价模型里，只要知道每个节点的波动率就能稍作变形来应用原来的方法定价。但如果波动率不仅与时间和标的物股票价格有关，还有其他因素的影响，或者说波动率和股票价格的变化不是高度相关的，情况就变得比较复杂，也就不能像这样简单地处理。

(2) 跳跃式的价格变化

在布莱克-舒尔斯期权定价模型中，假定标的物股票价格的变化遵循的是热扩散型的随机过程。但有时股市会发生激剧的价格变动，这时价格变化应当被看作是发生了跳跃。如果向上跳跃和向下跳跃是对称的，这可以看作是波动率突然变大。如果跳跃的发生是不对称的，向上跳跃的概率变大时，处于虚值状态的买权的价值会变大(特别是在接近到期时)；向下跳跃的概率变大时，处于虚值状态的卖权的价值会变大。

(3) 利率的变化

布莱克-舒尔斯期权定价模型假设利率是不变的。一般说来，利率的变化对期权的价值影响并不大(除非是利率期权)。如果在期权的生命期内，市场无风险利率要发生变化，意味着国库券收益曲线不是平坦的，那么，在波动率不变时，可以用到期日与期权相同的零息票债券的累计收益率来代替$r_f(T-t)$。即使波动率发生变化，利率变化对期权价值的影响也是不大的。

6. 小结

本章我们讨论布莱克-舒尔斯期权定价公式及其基本推广。布莱克-舒尔斯期权定价模型有一系列的前提假设条件，其中对标的物股票价格的运动规律的假设是非常基本的。股票收益的变化被认为服从对数正态分布，股票价格运动则遵循伊藤过程。这一假设在理论上和市场的有效率性假设很好地相吻合(关于市场的有效率性将在第九章详加讨论)。但近期的实证研究发现，连续复利收益率的分布并不严格地服从正态分布，有“胖尾”的现象。对这一现象的合理的理论解释还在发展。

一定要牢记的是，μ是单位时间股票收益复利收益率的数学期望值(概率平均值)，而不是股票价格在单位时间收益率的预期值(概率平均值)，后者应该是$\mu+\frac{1}{2}\sigma^2$。这一点很容易发生混淆。

布莱克-舒尔斯的期权定价模型实际上采用的是动态复制技术，即动态无套利均衡分析方法。这一方法的核心仍然是构筑完全对冲的组合头寸。因为对冲是需要不断地动态调整的，所以采用的是所谓德尔塔(Δ)对冲。正因为对冲的结果消除了不确定性，所以这种定价方法一定与投资者的风险偏好无关，由此可以引用风险中性假设。与风险中性假设相联系，在布莱克-舒尔斯期权定价公式里，不再出现单位时间股票收益复利收益率

的概率平均值 μ。在假想的风险中性的世界里，波动率 σ 保持相同，而采用不同的 $\bar{\mu}=r_f-\frac{1}{2}\sigma^2$。

值得一提的是，德尔塔对冲是1阶对冲（后面第十章还要讨论），布莱克-舒尔斯模型是借助伊藤引理建立在这一1阶对冲的基础之上的。1阶对冲是否能建立严格的价格均衡，取决于市场的效率和其他与市场的微观结构有关的问题。所以，布莱克-舒尔斯模型的成立，实际上是依赖于市场的有效率性（前面我们已经指出，用伊藤过程描述标的物股票价格运动方式，本身就依赖于市场的有效率性）。它之所以能相当准确地用作衍生品定价的工具，恰好说明了衍生品市场是非常高效率的市场。考虑更高阶对冲的定价模型的研究可能是有意义的，但其有用性一定是和市场本身的效率结合在一起的。因此，市场微观结构的研究将为各种定价技术建立基础。这也是近来关于市场微观结构的研究成为金融学研究的一个热点的原因。

期权定价公式的基本推广应用的要点是用 $Y(t)$ 代替 $S(t)$。因此，技术的关键在于找出正确的 $Y(t)$。

近似算法在金融工程的资产定价技术中占有非常重要的地位。对于实际交易的定价来说，尤其如此。美式卖权的定价没有解析解，所以近似解法就更为重要。发展快速的近似算法应当是金融工程研究的一个非常重要的领域。

练习题

已知日元兑美元的即期汇率为 $S(t)$，X 是某欧式日元买权的执行价格，到期日为 T、日元的利率为 r^{JPY}，美元的利率为 r^{USD}，连续复利计息，求 $c(S(t),t)$（以美元为单位）。

第六章数学附录

1. 伊藤引理的证明

两个变量的函数 $f=f(S,t)$ 的泰勒展式为

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial S}\Delta S+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\Delta S^2+\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial t}\Delta S\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2+\cdots$$

将伊藤过程也写成差分形式

$$\Delta S=\mu^* S\Delta t+\sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

由此可以推出

$$\Delta S^2=\sigma^2S^2\epsilon^2\Delta t+0(\Delta t)$$

因为 ϵ 服从标准正态分布，有 $E(\epsilon)=0$ 和 $\mathrm{Var}(\epsilon)=1$，由此可以推出 $E(\epsilon^2)=1$。如果我们求 $\epsilon^2\Delta t$ 的方差，我们有

$$\mathrm{Var}(\epsilon^2\Delta t)=(\Delta t)^2E(\epsilon^2-E(\epsilon^2))^2$$

所以，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\mathrm{Var}(\epsilon^2\Delta t)$ 是 Δt 的高阶小量。这意味着，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\epsilon^2\Delta t$ 将变成不再是随机变量，即 $\epsilon^2\Delta t\to\mathrm{d}t$。所以有

$$\mathrm{d}S^2=\sigma^2S^2\mathrm{d}t$$

将这个结果代入上面的泰勒展式，略去二阶以上（包括二阶）的高阶小量，就得到

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2S^2\mathrm{d}t$$

再把 $\mathrm{d}S=\mu^* S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z$ 代入，就有

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu^* S+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2S^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\mathrm{d}z$$

这就是伊藤引理的结果。

如果 f 只是 S 一个变量的函数 $f=f(S)$，则同样的推导导出的伊藤引理的结果是

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\mu^* S+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2}\sigma^2S^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\sigma S\mathrm{d}z$$

2. 关于伊藤过程的说明

股票价格运动服从伊藤过程

$$\mathrm{d}S=\mu^* S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z=\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z$$

其中

$$\mathrm{d}z=\epsilon\sqrt{\mathrm{d}t}$$

是布朗运动，我们先来讨论它的性质。

因为 $\varepsilon \sim N(0,1)$，所以 $\mathrm{d}z \sim N(0,\mathrm{d}t)$，而 $\sigma \mathrm{d}z \sim N(0,\sigma^2 \mathrm{d}t)$。布朗运动的每一连续瞬间都是独立同分布的随机变量，所以有 $\int_{t_1}^{t_2} \sigma \mathrm{d}z \sim N(0,\sigma^2(t_2-t_1))$。

我们把前面只含一个变量 $f=f(S)$ 的伊藤引理中的微分方程

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\mu^* S + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\sigma S \mathrm{d}z$$

改写成积分形式

$$f(S(t_2)) = f(S(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\mu^* S + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\sigma S \mathrm{d}z$$

取 $f(S)=\log S$，则 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}=\frac{1}{S}, \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2}=-\frac{1}{S^2}$，于是有

$$\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) = \left(\mu^* - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_2-t_1) + \int_{t_1}^{t_2}\sigma \mathrm{d}z = \mu(t_2-t_1) + \int_{t_1}^{t_2}\sigma \mathrm{d}z$$

因此，

$$\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) \sim N(\mu(t_2-t_1),\ \sigma^2(t_2-t_1))$$

从而服从伊藤过程的股票的价格变化服从对数正态分布。由此也说明了 μ 和 μ^* 的关系。

第七章 等价鞅测度模型和无套利均衡基本定理

前两章已经分别讨论了用二叉树定价的动态无套利均衡分析和布莱克-舒尔斯期权定价模型(连续的动态无套利均衡分析)。在这两种情况,我们都引入了风险中性假设的解法。因此我们可以想到,风险中性假设和无套利均衡之间一定有非常重要的联系。在这一章我们将进一步讨论多阶段动态无套利均衡的基本定理,介绍等价鞅测度模型,以帮助读者深入地理解动态无套利均衡和风险中性假设之间的关系。这一部分理论,虽然主要应用于或有要求权(contingent claim)的定价,但可以被认为是现代金融理论的精髓所在。因此,也是金融工程原理的核心之一。当然,这一章的内容相对比较艰深。如果阅读有困难,可以跳过去阅读后面的章节,将不影响内容的连贯性。

1. 多阶段证券市场模型和自融资简单交易策略

虽然在前两章我们已经接触了自融资策略,但为了进一步讲清楚多阶段动态无套利均衡分析的原理,我们先要建立一个尽量简化的多阶段证券市场模型,然后在这个模型的基础上,把讨论限制在简单自融资交易策略的范围。我们也将只讨论离散的情况。这样做的好处是使我们能尽量直接地掌握金融涵义。我们先来看多阶段事件树(图 7.1)。

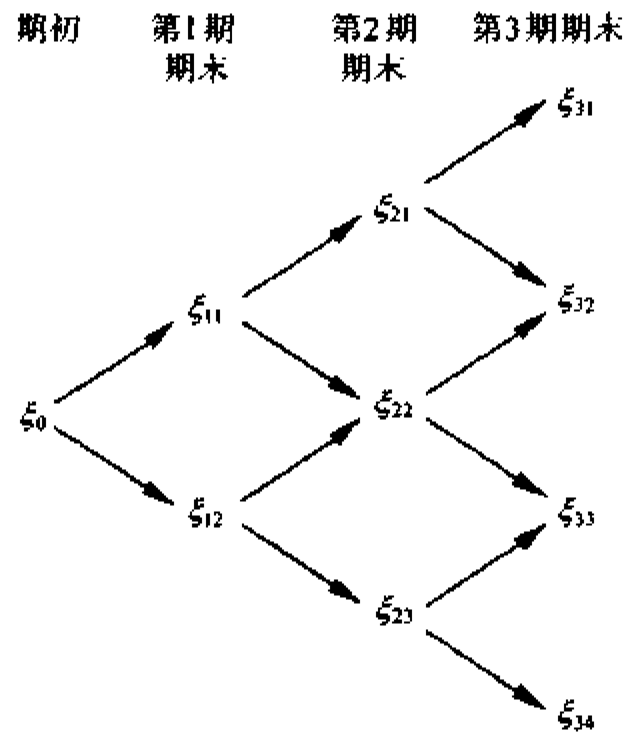


图 7.1

假如证券的交易就是 3 个阶段,每一次交易都在每一期期末集中进行,即由事件树中各节点表示。各节点都是可能发生的事件。这里只画了二叉树的情况,实际上,三叉树、多叉树的情况都是可以的,每一个节点的分叉数目也可以不一样,同一个节点可以是单个节点的后续节点(即后文所讲的“子辈”节点),也可以是若干个节点的后续节点(如图 7.1 的二叉树,部分节点是前面两个节点的共同后续节点)。我们后面用的数字例子将是三叉树。

现在来讨论信息结构的问题。假设现在在期初($t=0$ 时刻),我们或者不进行交易,或者进行交易。如果我们进行交易,现在可以知道的是,到多阶段交易过程终了,所发生的事件一定落在事件集合$\{\xi_{31},\xi_{32},\xi_{33},\xi_{34}\}$之中,但除此而外,一无所知。所以这是在 $t=0$ 时刻所能获得的信息。到了第 1 期期末($t=1$ 时刻),我们就不但知道到多阶段交易过程终了时所发生的事件一定落在事件集合$\{\xi_{31},\xi_{32},\xi_{33},\xi_{34}\}$之中,而且要么落在子集合$\{\xi_{31},\xi_{32},$

$\xi_{33}\}$里，要么落在子集合$\{\xi_{32},\xi_{33},\xi_{34}\}$里。这是在$t=1$时刻所能获得的信息。到了第2期期末($t=2$时刻)，我们就不但掌握$t=1$时刻所能获得的信息，而且知道到多阶段交易过程终了时所发生的事件一定会落在子集合$\{\xi_{31},\xi_{32}\}$，$\{\xi_{32},\xi_{33}\}$，$\{\xi_{33},\xi_{34}\}$中的一个。这就构成在$t=2$时刻所能获得的全部信息的结构(其中包括在$t=1$时刻所能获得的信息)。而到第3期期末($t=3$时刻)的信息结构，则不但包括在$t=2$时刻所能获得的全部信息，而且一定知道最终所发生的事件必定是ξ_{31}，ξ_{32}，ξ_{33}和ξ_{34}中的一个。我们以$\{\Phi_t\}$表示在时刻t的信息结构，显然，若$\tau<t$，则必有$\Phi_\tau\subset\Phi_t$。

现在我们来看一个由$N+1$种证券组成的证券组合$P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$所包含的证券的价格变动过程，这个价格变动过程可以用上图7.1的事件树来表示。ξ_t是事件树上第t期末的一个节点，$S_i(\xi_t)$是第i种证券在节点ξ_t的价格，$\theta_i(\xi_t)$则是在节点ξ_t时组合中第i种证券的数量($\theta_i(\xi_t)$可以为负，这时对第i种证券是卖空)。于是，$P(\xi_t)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_t)$是组合在节点$\xi_t$时的市场价值。

在图7.1的事件树中，每一事件都是可能发生的事件，则每一事件的发生都有一定的概率分布。由前面第五章的讲解可知，采用动态无套利分析进行证券定价时，其实我们并不需要确切地知道在这一真实的世界里价格变动的概率分布。

有了事件树及其概率分布和价格变动过程及其信息结构，我们就建立起一个最基本的多阶段证券市场模型。

我们进一步假定，标号为$i=0$的证券是无风险证券。如果事件树上的证券价格全部都用无风险利率折现的话，$S_0(\xi)$在所有的节点上就都取相同的现值。因此可用来作为度量其他有风险证券价格(即现值)的度量基准。在本章下面的讨论中，假定所有事件树上的证券价格全部都用无风险利率折现过。我们还假定在事件树上，所有的证券都不产生诸如红利之类的收入，当然市场还被解释为无摩擦的(即不发生任何交易成本)。

下面我们定义简单交易策略。所谓简单交易策略是：

1) 在t时刻投资者只根据当时可获得的所有信息依不同状态选择证券组合，即t时刻投资者持有的证券组合只建立在当时的信息结构Φ_t上，并依赖于当时的状态。

2) 交易时刻t投资者所持有的证券i的价值(即$\theta_i(t)S_i(\xi_t)$)变化不会太大。

3) 投资者只在有限个时刻(即事件树的节点处)交易证券。

我们对这三个条件稍作解释。

关于条件1)，由前面讲解证券市场模型的事件树(图7.1)可知，信息结构具有一种“嵌套”的结构，即$\Phi_0\subset\Phi_1\subset\cdots\subset\Phi_T$。越到多阶段交易过程的期末，投资者能够获得的信息越完整。时间越靠前，能得到的信息越少。如果我们对照一下在第五章用二叉树介绍的动态无套利定价技术和第六章介绍的利用风险中性假设求解布莱克-舒尔斯期权定价公式的积分解法，就可以加深理解为什么动态无套利分析方法是由后朝前倒推的，即由未来决定现在，而不是由过去决定将来。因为在我们的理论分析中，市场始终处于均衡状态，所以条件2)的直觉意义是明显的。至于条件3)，这是我们的简单模型所给予的限制，在连续时间情况下这个条件会变得十分苛刻。

现在以$\{\theta(\xi)\}$表示一个简单交易策略，显然，$P(\xi_t)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_t)$是组合在节点$\xi_t$时的市场价值。以$\xi_t^-$表示$\xi_t$的“父辈”节点，即它是一个第$t-1$期末的节点，而节点$\xi_t$是从它那里长出来的(显然，当$t=0$时没有“父辈”节点)。而$\xi_t$显然就是$\xi_t^-$的“子辈”节点，而由$\xi_t$长出来的节点就是$\xi_t^-$的“孙辈”节点，进一步类推，当然就有“重孙辈”节点、等等。所谓自融资简单交易策略是对所有的节点$\xi_t(t>0)$来说，都有$\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_t)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t^-)S_i(\xi_t)$。显然，除了起始节点外，在每一个节点处，只是调整了组合中各种证券的头寸，整个组合的价值并没有因为组合中各种证券头寸的调整而发生变化。

因为我们假设市场是无摩擦的，所以在自融资简单策略下，每次交易前后证券组合的价值不变，投资者用出售证券的所得来支付购买证券的成本，即投资者既不投入也不撤出资金。因此可以这样说，在期初$t=0$时刻和期末$t=T$时刻之间，即不需要也不产生资金。在本章后面的讨论中，假定投资者采取的都是自融资简单交易策略。

如果存在一个自融资简单交易策略$\{\theta(\xi)\}$，在多阶段的证券定价过程中，使由$N+1$种证券组成的证券组合$P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$在期末$t=T$时刻完全复制了另一项资产x在期末$t=T$时刻的价值(x通常指衍生证券或者是或有要求权)，即有$\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_T)S_i(\xi_T)=x(\xi_T)$。此时，我们称该项资产$x$是市场化的，或者说自融资简单交易策略$\{\theta(\xi)\}$生成了$x$。

若存在一个自融资简单交易策略$\{\theta(\xi)\}$生成了x，即x是市场化的。那么，在期初$t=0$时刻，该证券组合的价值$P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)$一定等于资产$x$在期初$t=0$时刻的价格$x(0)$。这个结论可由简单的无套利思想解释：投资者在$t=0$时刻以$P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)$的成本持有证券组合，在经过$t=0,1,2,\cdots,T$等时刻无成本地变换其证券组合使之符合策略$\{\theta(\xi)\}$之后，在$t=T$时刻，在状态$\xi_T$下投资者持有的证券组合的价值$P(\xi_T)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_T)S_i(\xi_T)=x(\xi_T)$。在这期间没有再追加或撤出资金，即策略$\{\theta(\xi)\}$可以完全复制资产$x$。因此，若$x$在$t=0$时刻的价格$x(0)$不等于$P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)$，则可以在资产$x$和依策略$\{\theta(\xi)\}$所持有的证券组合$P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$之间进行套利。于是，无套利原理告诉我们，一定有$P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)=x(0)$。

2. 价格体系和多阶段证券市场模型的生存性

现在，我们给出动态无套利均衡的精确定义。

证券组合$P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$是一个简单套利组合，是指在采用自融资简单交易策略

时，如果在所有期末节点 ξ_T 上，都有 $P(\xi_T)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_T)S_i(\xi_T)\geqslant 0$，且至少在其中一个节点上有 $P(\xi_T)>0$，而同时在起始节点有 $P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)\leqslant 0$；或者在所有期末节点 ξ_T 上，都有 $P(\xi_T)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_T)S_i(\xi_T)\geqslant 0$，而同时在起始节点有 $P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)<0$。显然，简单套利组合的价值可以"无中生有"，因此被称为"白吃的午餐"。动态无套利均衡指套利组合不存在，即没有白吃的午餐。

套利组合存在就说明市场不均衡，在市场均衡时，是没有白吃的午餐的。如果一个定价模型会导出套利组合，则一定出现了不均衡的现象，这个模型也就不能正确地均衡定价。

为了使市场化的资产 x 能被正确定价，必须保证：若有两种自融资简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 和 $\{\theta^*(\xi)\}$ 都能生成资产 x，则一定有 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i^*(\xi_0)S_i(\xi_0)$。因为若不能保证以上条件，即若 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)$ 不等于 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^*(\xi_0)S_i(\xi_0)$，假设 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)<\sum_{i=0}^{N}\theta_i^*(\xi_0)S_i(\xi_0)$，则构造新的交易策略 $\{\bar{\theta}(\xi)\}$，对于所有的 $t=0,1,2,\cdots,T$ 使得 $\bar{\theta}(\xi)=\theta(\xi)-\theta^*(\xi)$，显然这也是一个自融资的简单策略。有 $\sum_{i=0}^{N}\bar{\theta}_i(\xi_0)S_i(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)-\sum_{i=0}^{N}\theta_i^*(\xi_0)S_i(\xi_0)<0$，而 $\sum_{i=0}^{N}\bar{\theta}_i(\xi_T)S_i(\xi_T)=x(\xi_T)-x(\xi_T)=0$。因此，采用自融资简单交易策略 $\{\bar{\theta}(\xi)\}$ 就出现了简单套利组合，从而资产 x 不能被正确定价。于是都能生成资产 x 两种自融资简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 和 $\{\theta^*(\xi)\}$，在期初 $t=0$ 时刻构成的投资组合的市场价值相等。

由前面我们对市场化资产 x 的描述知，x 在期末的价值完全可以由一个自融资简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 来复制。因此，x 实际上是一种衍生资产（衍生证券）。现在我们可以来定义多阶段证券市场的动态完全性：如果市场中存在一组证券 $P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$，市场中任一证券 x 都可以通过某一个自融资简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 来生成，这一多阶段证券市场就是动态完全的，否则就不是动态完全的。

如果我们用 X 表示一个多阶段证券市场中所有的证券的集合，用 M 表示所有可以用自融资简单交易策略生成的证券的集合，显然 $M\subseteq X$。如果市场是动态完全的，则有 $M=X$，否则不然。

所谓价格体系的生存性是指参与交易的投资者在这样的价格体系和各自的预算约束下，能找到一个最优交易，使各自的效用最大化。最优交易存在且能达到，这样的经济模型就是均衡模型。

市场中的价格体系可以看作是一个定义在市场中所交易的资产（证券）的函数：x 是一项证券，$\Pi(x)$ 是它的价格。如果一个价格体系只适用于所有可以用自融资简单交易策

略生成的证券的集合 M，则 Π 是 M 上的一个线性函数。我们可以简单地证明如下：

用反证法，假设 Π 不是线性函数。

设自融资简单交易策略 $\{\theta^{(1)}(\xi)\}$ 和 $\{\theta^{(2)}(\xi)\}$ 可分别生成在 M 中的资产 m_1 和 m_2，所以到期末 $t=T$ 时刻有 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(1)}(\xi_T)S_i(\xi_T)=m_1(\xi_T)$ 和 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(2)}(\xi_T)S_i(\xi_T)=m_2(\xi_T)$。则两项资产 m_1 和 m_2 在 $t=0$ 时刻的价格就分别为 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(1)}(\xi_0)S_i(\xi_0)=\Pi(m_1)$ 和 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(2)}(\xi_0)S_i(\xi_0)=\Pi(m_2)$。现在有一个 m_1 和 m_2 的线性组合 $m_3=\alpha m_1+\beta m_2$，如果 m_3 也在 M 中，即 m_3 也可由一自融资简单交易策略 $\{\theta^{(3)}(\xi)\}$ 生成。到期末 $t=T$ 时刻有 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(3)}(\xi_T)S_i(\xi_T)=m_3(\xi_T)$，$m_3$ 在 $t=0$ 时刻的价格就应该是 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(3)}(\xi_0)S_i(\xi_0)=\Pi(m_3)$。若 Π 不是线性函数，则有 $\Pi(m_3)=\Pi(\alpha m_1+\beta m_2)\neq\alpha\Pi(m_1)+\beta\Pi(m_2)$。设 $\Pi(m_3)=\Pi(\alpha m_1+\beta m_2)>\alpha\Pi(m_1)+\beta\Pi(m_2)$，则可构造一个新的融资策略 $\{\theta^{(4)}(\xi)\}=\{[\alpha\theta^{(1)}+\beta\theta^{(2)}-\theta^{(3)}](\xi)\}$，显然这仍是一个自融资简单策略。到期末 $t=T$ 的时刻，因为有 $m_3=\alpha m_1+\beta m_2$ 的关系，我们得到下面的结果 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(4)}(\xi_T)S_i(\xi_T)=\sum_{i=0}^{N}[\alpha\theta_i^{(1)}(\xi_T)+\beta\theta_i^{(2)}(\xi_T)-\theta_i^{(3)}(\xi_T)]S_i(\xi_T)=\alpha m_1(\xi_T)+\beta m_2(\xi_T)-m_3(\xi_T)=0$。于是出现了套利组合，与价格体系属于一个均衡的经济模型的前提不相符合，由此得到证明，即 Π 是一个定义在 M 上的线性函数。

如果市场不是动态完全的，即 $M\subset X$，一个价格体系如果只适用于 M，这个价格体系要有生存性，它就一定要能被扩展到对市场中所有的证券所组成的集合 X 都适用，即它同样是 X 上的线性函数，而当把它限制在 M 中时，就是原来的价格体系。而且，这个扩展到 X 上的线性函数的取值严格为正（当然，它在 M 中也严格为正）。

下面我们讲解一下多阶段证券市场模型的生存性涵义。

多阶段证券市场模型的生存性是指：该模型不允许有套利组合出现，而且相对于 M 的价格体系有生存性。也就是说，在一个不存在套利机会的模型中，对于任何属于 M 的衍生证券，一定可以找到一个严格为正的线性函数 Π 表示其价格，对于一个不属于 M 的衍生证券，可以找到一个 Π 的扩展来表示其价格。一个多阶段证券市场模型有生存性即为一个经济均衡模型。我们下面就在一个有生存性的模型中来讨论动态无套利均衡问题。

3. 等价鞅测度

我们在前一章已经讲解过无套利均衡和风险中性假设之间的关系，而风险中性假设又是与公平的赌博联系在一起的。这里牵涉到一个称之为鞅(martingale)的数学概念，下面我们先来讨论它。

鞅是一类特殊的随机过程（在离散情况下，称为随机序列或随机链）。在数学文献和教科书中的讲述往往使数学训练不够的人难以接受，我们在这里则着重通过它的经济学含义进行介绍。

所谓鞅是满足如下条件的一类随机过程(在离散情况下是随机序列(链)):在任何时刻 τ,在当时的信息结构$\{\Phi_\tau\}$的基础上(即可以认为当时所有可以获得的有关随机过程$\{S(t)\}$的信息都已包含在$\{\Phi_\tau\}$中——请回过头去看一下前面介绍的事件树的信息结构的涵义),如果对随机过程$\{S(t)\}$的某种概率分布,对任意的 s,t;$0\leqslant s\leqslant t$,都有

$$E^*\{S(t)|\Phi_s\} = S(s)$$

反之,满足上述条件的随机过程$\{S(t)\}$是鞅。

这里要解释一下符号 $E^*\{S(t)|\Phi_s\}$的涵义。这一符号表示,在现在时刻 s 的已有信息结构$\{\Phi_s\}$的条件下,有未来时刻 t 的条件概率分布 $P_t^*\{\cdot|\Phi_s\}$,$E^*\{S(t)|\Phi_s\}$表示随机变量 $S(t)$在未来时刻 t 服从这一条件概率分布的条件数学期望值(条件概率平均值)。

例如,在 t 时刻,$S(t)$有 k 个可能的取值 $S^{(1)},\cdots,S^{(k)}$,相应于这 k 个取值的(s 时刻的信息结构$\{\Phi_s\}$)条件概率分布是 $P^*\{\cdot|\Phi_s\}$,其条件概率是 $p_1^*,\cdots,p_k^*$,就有

$$E^*\{S(t)|\Phi_s\} = \sum_{i=1}^{k} p_i^* S^{(i)}$$

现在我们来讲解一下鞅的经济学涵义。

鞅的直观涵义其实非常简单:假如现在是时刻 s,在现在掌握的所有信息$\{\Phi_s\}$的条件下,随机过程$\{S(t)\}$在未来任何时刻 t 取值的数学期望(即概率平均值)就等于现在时刻 s 时 S 的取值 $S(s)$。这说明根据目前掌握的信息作判断,随机过程$\{S(t)\}$在未来的平均取值就等于现在的值。

回忆一下在第五章介绍的公平赌博的概念,很容易看出,鞅和公平赌博是紧密联系在一起的。人局下注的成本和依据当时的信息对以后任何时候的赌博预期平均结果相等,赌局是公平的。所以,公平赌博的随机过程构成鞅。我们又知道,只有风险中性的人才会接受公平的赌博,而在真实世界里的理性市场参与者都不是风险中性的。因此鞅的概率又是和风险中性概率紧密结合在一起的,通常并非真实世界的概率。这就是我们为什么在表示数学期望的符号 E 上加上 * 号的缘故。

联系到事件树,为了更明确起见,我们可以把鞅表示成$\{S(\xi_s)\}$,把时刻 s 的随机变量表示为 $S(\xi_s)$。再考虑到资金的时间价值,因为在风险中性世界里所有资产的收益率都是无风险收益率,所以都用无风险利率折现。如我们前面已经指出的,我们在分析中把事件树各个节点上证券的价格都看作是采用无风险利率折现后的现值。这样一来,如果能够构筑起风险中性概率,采用风险中性假设的自融资简单交易的定价过程就变成风险中性概率下的鞅,风险中性概率就是鞅概率。

下面,我们引入等价鞅测度(等价鞅概率)的概念。

为了避免比较抽象的测度论的数学概念,我们在这里的介绍将不追求数学上的严密性,而且基本上用离散的情况作讲解。在真实的世界里,证券价格的变化遵循真实的概率 P 的分布。对于概率测度 P,另一个(非真实世界里的)概率测度 P^* 与概率测度 P 相对应。相对应的含义是它们面向的是同样的事件(在离散情况用事件树表示),并且信息结构(指前述的$\{\Phi_t\}$)相同。如果 P^* 满足以下三个条件,P^* 就可以称为 P 的等价鞅测度(等价鞅概率):

1) P^* 与 P 同零集。对于概率 P 来说不可能发生的事件,对于概率 P^* 来说也不可能

发生，反之亦然。

2）对于概率 P 来说，如果一个事件发生的可能性很小，则对于概率 P^* 来说发生的可能性也不会很大。[①]

3）随机过程 $\{S(t)\}$ 对于概率 P^* 来说是鞅过程，即对任意的 $s,t;0\leqslant s\leqslant t$，都有 $E^*\{S(\xi_t)|\Phi_s\}=S(\xi_s)$。

无套利均衡基本定理就是关于无套利定价和等价鞅测度之间的对应关系的论述。我们对基本定理的论证将建立在前面所介绍的多阶段证券市场模型的基础之上。

4. 无套利均衡基本定理

第一基本定理 *在一个有生存性的多阶段证券市场模型中，不存在套利机会的充分必要条件是存在等价鞅测度。*

先证明充分性。

如果存在这样一个等价鞅测度的（条件）概率分布 $P^*(\cdot|\Phi_t)$，相对于这一条件概率分布，在任何时刻 t，对所有服从这一鞅概率的有价证券，一定有 $S(\xi_t)=E^*\{S(\xi_{t+1})|\Phi_t\}$。对于采用自融资的简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 的证券组合 $\{P(\xi)\}=\left\{\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi)S_i(\xi)\right\}$ 来说，如果其中所有证券都服从这一鞅概率，也就有 $P(\xi_t)=\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_t)=\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)E^*\{S(\xi_{t+1})|\Phi_t\}=E^*\left\{\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_{t+1})|\Phi_t\right\}$。因为采用自融资策略，所以一定有 $\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_{t+1})=\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_{t+1})S_i(\xi_{t+1})=P(\xi_{t+1})$。于是得到 $P(\xi_t)=E^*\{P(\xi_{t+1})|\Phi_t\}$。这一关系可以递推成对任意的 $s,t;0\leqslant s\leqslant t$，有 $E^*\{P(\xi_t)|\Phi_s\}=P(\xi_s)$ 成立，即证券组合 $\{P(\xi)\}$ 对于信息结构 $\{\Phi_t\}$ 来说也是鞅。所以，如果在所有的节点 ξ_t 上，都有 $P(\xi_t)\geqslant 0$，则在起始节点一定有 $P(\xi_0)\geqslant 0$。并且，如果至少在其中一个节点上有 $P(\xi_t)>0$，则在起始节点一定有 $P(\xi_0)>0$。由此说明证券组合 $\{P(\xi)\}$ 不是套利组合，这一采用自融资简单策略的证券组合 $\{P(\xi)\}$ 处于无套利均衡状态，$P(\xi_0)$ 就是无套利均衡定价。

因此，如果存在一个等价鞅测度，则在采取自融资策略时，一定不存在套利的机会，亦即没有白吃的午餐。这样，也就可以通过动态复制给出均衡定价。

再证明必要性，即如果不存在套利机会，就一定存在等价鞅测度。

为了避免采用复杂的数学工具，用下面的二阶段多叉树（图 7.2）来讲解我们的证明，分叉的数目是随意画的。

先来看第二阶段最上面的那个三叉树。回忆一下我们在第一章介绍过的状态价格定价技术。因为我们已经假定不存在套利机会，即可以用复制技术定价，所以对这个三叉树

---

① 这一说法在数学上是不严密的。数学上是要求 Radon-Nikodym 导数 $\frac{dP^*}{dP}$ 在原概率测度 P 上平方可积，即 $\int\left(\frac{dP^*}{dP}\right)^2 dP<\infty$。

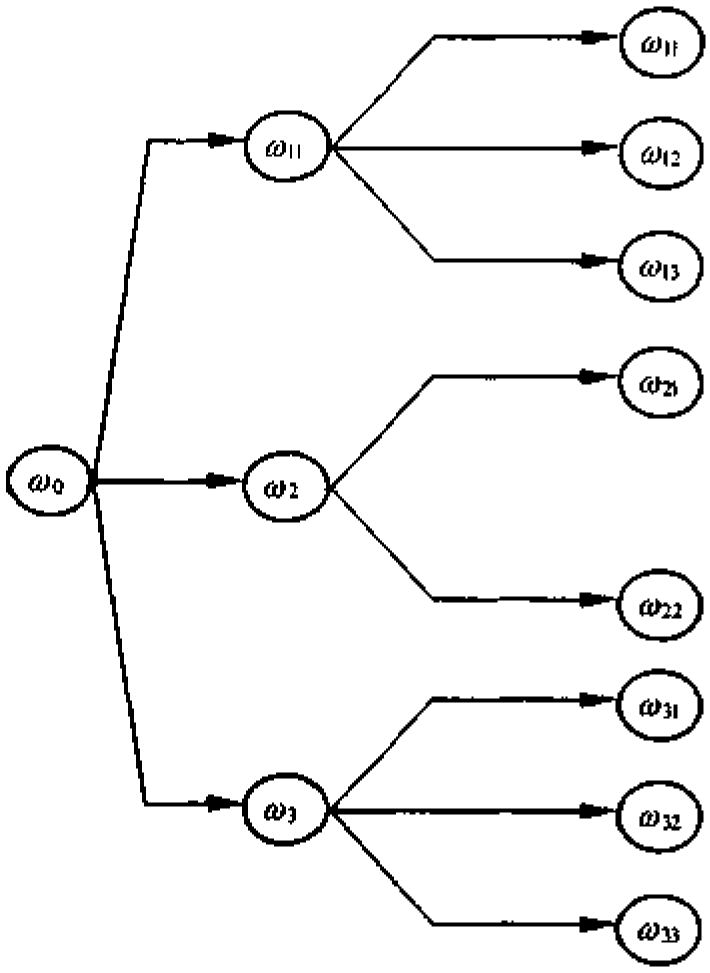


图 7.2

来说，存在三个基本证券，它们的价格变化可用图 7.3 中的三个三叉图来描述。

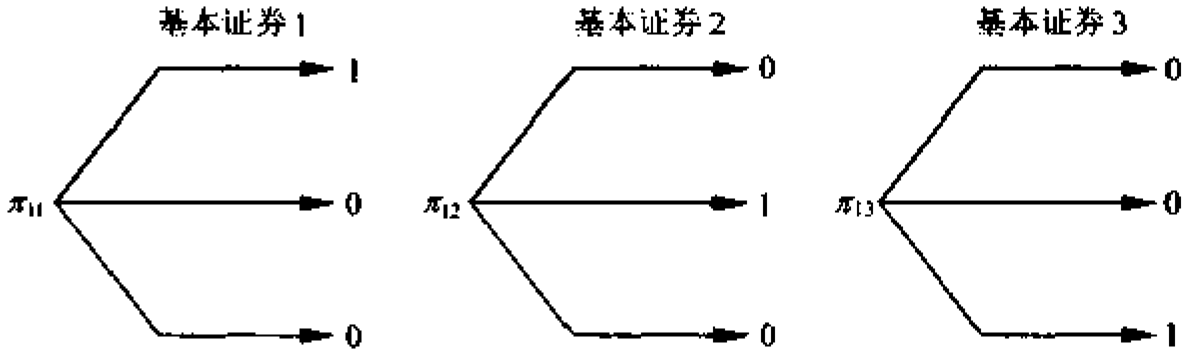


图 7.3

如果有一项证券在这个三叉树上的价格变化如图 7.4，用上述三个基本证券来复制这项证券，应该选取 P_{11} 份基本证券 1，P_{12} 份基本证券 2，P_{13} 份基本证券 3。这样构筑的组合确实能复制该证券在这个三叉树上的价格变化。因此，P_1 的无套利定价就应是

$$P_1 = \pi_{11}P_{11} + \pi_{12}P_{12} + \pi_{13}P_{13}$$

现在再用这三个基本证券来复制无风险证券。前面已经说过，事件树上每个节点上证券的价格都是已经用无风险利率折现过的现值。所以，无风险证券在每个节点上的价格都相等，即有 $P_1 = P_{11} = P_{12} = P_{13} = P$。于是有

$$\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13} = 1$$

因此，我们发现，$\{\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}\}$ 构成了这个三叉树上的概率测度，无套利定价的结果就是按照这个概率对下一期

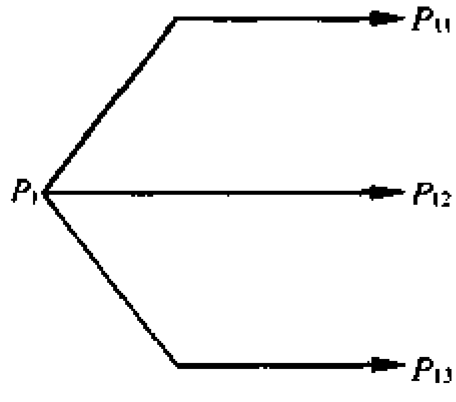


图 7.4

可能出现的价格取数学期望值(概率平均值),并以无风险利率折现。显然,对这个三叉树来说,$\{\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}\}$就构成风险中性概率。

对于第二阶段中间的二叉树和下面的三叉树,当然可以如法炮制,分别求出类似的风险中性概率$\{\pi_{21},\pi_{22}\}$和$\{\pi_{31},\pi_{32},\pi_{33}\}$。不过这里有一点必须说明清楚,我们采用的基本证券就是上面那个三叉树的三个基本证券。所以,对于基本证券1来说,它在节点$\omega_{11},\omega_{21},\omega_{31}$处取值为1,在第二阶段末的其他节点处取值都为0;基本证券2在节点$\omega_{12},\omega_{22},\omega_{32}$处取值为1,在第二阶段末的其他节点处取值都为0;基本证券3在节点ω_{13},ω_{33}处取值为1,在第二阶段末的其他节点处取值都为0。

请注意,第二阶段的多叉树,都是在第一阶段的事件发生以后再发生的,所以,$\{\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}\}$,$\{\pi_{21},\pi_{22}\}$和$\{\pi_{31},\pi_{32},\pi_{33}\}$都是条件概率。这一点要记住。

我们仍然来看上面的三叉树。

三个基本证券每个取1份,组成一个证券组合。它们在ω_1处的价格分别是$\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}$。$\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}$尽管是基本证券的价格,但也反映了各自头寸的情况。例如,把基本证券1的头寸放大$\frac{1}{\pi_{11}}$,基本证券1在ω_1处的价值就变成$\pi_{11}\times\frac{1}{\pi_{11}}=1$。因为$\pi_{11}+\pi_{12}+\pi_{13}=1$,所以可以进行自融资的头寸调整。调整后使基本证券1在ω_1处的价格为1,另两个基本证券在此处的价格都为0。这样,调整前后该证券组合的价值不变。同样的道理,在节点ω_2处,采用自融资策略使基本证券2的价格为1,另两个基本证券在此处的价格都为0;在节点ω_3处,采用自融资策略使基本证券3的价格为1,另两个基本证券在此处的价格都为0。经过这样的自融资调整后,三个基本证券在起始点ω_0处的价格分别为π_1,π_2,π_3。和第二阶段相同的道理,$\{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$构成风险中性概率。

这样构造的概率测度$P^*=\{\pi\}$和真实世界的概率P是同零集的。若在事件树上某一枝发生的真实概率为0,这一枝及其以后的分叉就应从事件树上移去,在这一枝上的风险中性概率自然也为0。如果在事件树上某一枝发生的真实概率大于0的话,说明这一枝后面的事件是可能发生的。我们定义的风险中性概率是对应于该枝的基本证券在枝端节点的价值。当该枝的事件发生时,基本证券在枝末节点的价值为1,如果在枝端节点的价值为0的话,就出现了"无中生有"。这与无套利机会存在相矛盾。

如果在事件树上某一枝发生的真实概率很小,那么,这一枝产生的结果对枝端节点证券价值的影响应该不大。风险中性概率的定价是"子辈"节点的数学期望值(概率平均值),若在该枝上风险中性概率很大的话,该枝产生的结果就会对枝端节点证券价值产生很大的影响,这是矛盾的。

最后,我们来证明以上构造的事件树上的概率测度使事件树成为鞅。对任意的s,t;$0\leqslant s\leqslant t$,当$s=0,t=1$时,显然有

$$P_0=\pi_1P_1+\pi_2P_2+\pi_3P_3=E^*(P_i|\Phi_0)$$

对于$s=1,t=2$,由前面的论述知,有$P_i=E^*(P_{ij}|\Phi_1)$,$i=1,2,3$。对于$s=0,t=2$的情况需要稍加讨论。我们在前面已经提到过,$\{\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}\}$,$\{\pi_{21},\pi_{22}\}$和$\{\pi_{31},\pi_{32},\pi_{33}\}$都是条件概率,条件成立的概率分别是$\pi_1,\pi_2,\pi_3$。于是有

$$\pi_1\pi_{11}P_{11}+\pi_1\pi_{12}P_{12}+\pi_1\pi_{13}P_{13}+\pi_2\pi_{21}P_{21}+\pi_2\pi_{22}P_{22}+\pi_3\pi_{31}P_{31}+\pi_3\pi_{32}P_{32}+\pi_3\pi_{33}P_{33}$$

$$= \pi_1(\pi_{11}P_{11} + \pi_{12}P_{12} + \pi_{13}P_{13}) + \pi_2(\pi_{21}P_{21} + \pi_{22}P_{22}) + \pi_3(\pi_{31}P_{31} + \pi_{32}P_{32} + \pi_{33}P_{33})$$
$$= \pi_1 P_1 + \pi_2 P_2 + \pi_3 P_3 = P_0$$

此即 $P_0 = E^*(P_{ij}|\Phi_0)$。所以，这样构造的概率测度 $P^* = \{\pi\}$ 使事件树成为鞅。由此证明了 $P^* = \{\pi\}$ 是等价鞅测度。

以上证明可以推广到任何阶段的事件树。

这样，我们以很粗浅的方法证明了无套利均衡第一基本定理。通常这一定理的证明(尤其是在连续情况下)要用到相当艰深的数学。我们的证明虽然牺牲了一些数学形式上的严密性，但相对易懂，而且金融涵义比较清楚。

我们在讨论无套利均衡第一基本定理时，并没有涉及等价鞅测度(即鞅概率)的唯一性问题。因为等价鞅概率就是风险中性概率，利用等价鞅测度定价就是在鞅概率下取数学期望值。如果存在不止一个等价鞅测度，以这些等价鞅测度都作为风险中性概率来对同一项衍生证券定价，那么，只有在以这些不同的等价鞅测度求得的数学期望值都相等的话，这项衍生证券才能通过无套利均衡定价，否则不然。因为多阶段证券市场有生存性意味着至少存在一个等价鞅测度，所以，如果只存在一个唯一的等价鞅测度的话，在这个证券市场模型中的所有衍生证券就都能通过无套利均衡定价。这样，市场也就是完全的。于是就证明了下述第二基本定理的充分性部分。

第二基本定理 *在一个有生存性的多阶段证券市场模型中，所有的衍生证券都可以通过无套利均衡来定价(即市场是动态完全的)的充分必要条件是存在唯一的等价鞅测度。*

第二基本定理的必要性部分可以这样理解：因为所有的衍生证券都可以通过无套利均衡来定价，基本证券也可以看作是自身的衍生证券，当然也可以无套利定价。鞅概率是基本证券通过自融资策略定出的价格，这个价格就应该是唯一的。因此，如果所有的衍生证券都能采用自融资策略通过无套利均衡定价，所有的基本证券也就有唯一的无套利均衡价格，就意味着存在唯一的等价鞅测度。

5. 数字例子

我们用几个数字例子来加深对无套利均衡基本定理的理解。

例 1 由下面三阶段的事件树可知，有 9 种状态，用 $\omega_1, \cdots, \omega_9$ 表示。交易时刻集 $T = \{0,1,2\}$，信息结构为 $\{\Phi_t\}$，在 $t=0$ 时，Φ_0 告诉我们，到期末发生的事件一定在集合 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ 中；到 $t=1$ 时，Φ_1 告诉我们，到期末发生的事件一定分别落在集合 $B_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$，$B_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 或者 $B_3 = \{\omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ 中；到 $t=2$ 时，Φ_2 则会告诉我们究竟哪个状态 $\omega_i (i=1, \cdots, 9)$ 会发生。市场上有三种证券，证券 0 为无风险证券，其价格 $S_0(t) \equiv 1$，$S_1(t)$ 与 $S_2(t)$ 已在事件树中给出，上面的是 $S_1(t)$，下面的是 $S_2(t)$。例如 $S_1(0, \omega_1) = 10$，$S_1(1, \omega_1) = 11$，$S_1(2, \omega_1) = 14$，等等。这里我们不给出真实概率 P，只知道对于 $i = 1, \cdots, 9$，所有 $P(\omega_i) > 0$(不给出 P 是因为它与我们后面的讨论无关)。

现在，对于这样一个模型，我们首先要判断它是否有生存性；若有生存性，那么什么样的衍生证券可通过无套利均衡定价。现在我们来设计一项衍生证券：$x = \max\{[2S_1(2) +$

$S_2(2)]-[14+2\min\limits_{0\le t\le 2}(S_1(t),S_2(t))],0\}$，这项衍生证券表示一种买权，在期末 $t=2$ 时执行，是以三个交易时刻、两种风险证券所达到的最低价的两倍再加上 14 的价格来购买 2 份证券 1 和 1 份证券 2 的买权。由这个定义，我们可以计算每种状态下该衍生证券期末的价值，如图 7.5 所示。注意：之所以设计这样的一项衍生证券，意在揭示：衍生证券期末的价值可能依赖所有原始证券全部的历史价格，而不仅仅依赖证券期末的价格。例如，在该例中，在状态 ω_2 和 ω_5 中，它们原始证券期末的价格完全一样，但它们衍生证券期末的价值 $x(\omega)$ 却不同。

这样一类期权被称为奇异(exotic)期权，奇异期权的设计是金融工程师为客户"量体裁衣"定制产品的重要工作任务。一些优秀的金融工程师非常擅长设计奇异期权。

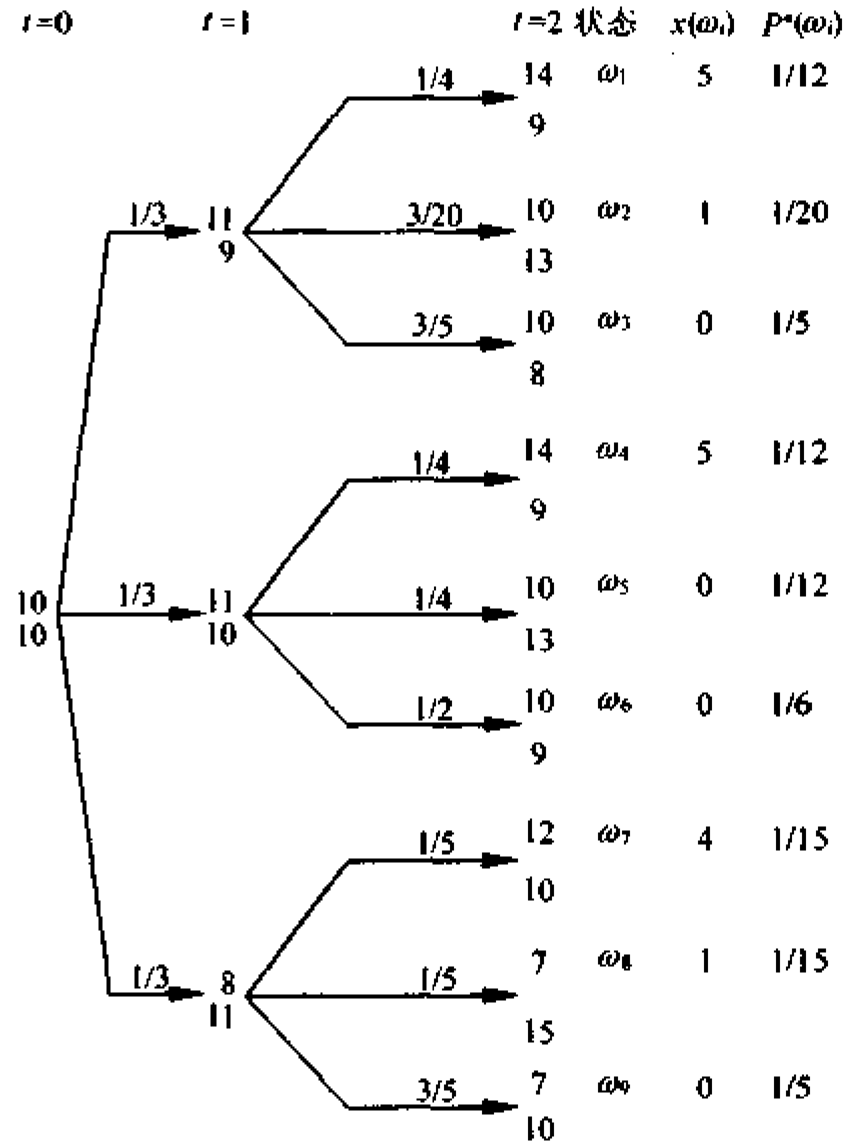


图 7.5

按照前一节所提的思路，先来求出所有的等价鞅测度。由满足等价鞅测度的条件 3 可知：

$$E^*(S_1(1)|\Phi_0)=S_1(0)=10,\quad E^*(S_2(1)|\Phi_0)=S_2(0)=10$$

如果记 $p=P^*(B_1|\Phi_0)$，$q=P^*(B_2|\Phi_0)$，则一定有 $1-p-q=P^*(B_3|\Phi_0)$。由上面两式可得出如下方程组：

$$\begin{cases}11p+11q+8(1-p-q)=10\\9p+10q+11(1-p-q)=10\end{cases}$$

由该方程组可解得唯一解：$p=q=1/3$。

同理，由 $E^*(S_1(2)|B_1)=S_1(1)=11$，$E^*(S_2(2)|B_1)=S_2(1)=9$，可解得唯一的解：$P^*(\omega_1|B_1)=1/4$，$P^*(\omega_2|B_1)=3/20$，$P^*(\omega_3|B_1)=3/5$。以此类推，可以解得 $P^*(\omega_i|B_j)$，$i=4,5,\cdots,9$，$j=2,3$，且可发现这些解都是唯一的，我们把这些解都写在事件树相应的分枝上。由这些条件概率可以算得唯一的等价鞅测度 P^*（见图 7.5）。

通过上面的计算可以发现，该模型存在唯一的等价鞅测度，因此不存在套利机会，而且，该模型是有生存性的，所有的衍生证券均可通过无套利均衡定价。这样，前面我们所定义的衍生证券（奇异买权）x 的价格应为：

$$\hat{\Pi} = E^*(x) = \sum_{i=1}^{9} x(\omega_i)P^*(\omega_i) = 1.2167$$

若改用通过自融资简单策略来生成 x，即用证券 0、证券 1 和证券 2 来复制这个奇异买权，可以得到相同的结果。建议读者自己试算一下。

无论用等价鞅概率求期望值，还是用证券组合通过自融资简单策略复制，得到的资产的无套利均衡价值是相同的。我们再强调一下，这种相同并非巧合。因为鞅概率就是风险中性概率，而无套利均衡分析和风险中性假设之间存在本质联系，因此定价结果的相同是一种必然。而且，两种方法算得结果的一致，又从某种程度上证明了风险中性假设的合理性。

在离散时刻情况下，能生成所要定价资产的自融资策略或许还可算得，用等价鞅测度为资产定价也许并不是唯一的计算资产价值的方法；但在连续时间情况下，自融资策略作为时间的连续函数，并不一定能够求得，这时用等价鞅测度来计算资产的无套利均衡价值就成为非常重要的方法。

前面我们举了只有唯一的一个等价测度的例子，现在来看第二个例子。

例 2 两阶段事件树有三种证券，$S_0(t)\equiv1$，4 种状态 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$。$S_1(t)$ 与 $S_2(t)$ 如事件树（图 7.6）所示（上面的是 $S_1(t)$，下面的是 $S_2(t)$）。

首先，求等价鞅测度 P^*。由满足等价鞅测度的条件 3 可知：

$$E^*(S_1(1)|\Phi_0) = S_1(0) = 10,$$
$$E^*(S_2(1)|\Phi_0) = S_2(0) = 10$$

记 $p=P^*(B_1|\Phi_0)$，则 $1-p=P^*(B_2|\Phi_0)$，此处 $B_1=\{\omega_1,\omega_2\}$，$B_2=\{\omega_3,\omega_4\}$。则由上面两式可得出如下方程组：

$$\begin{cases}11p + 8(1-p) = 10\\ 9p + 11(1-p) = 10\end{cases}$$

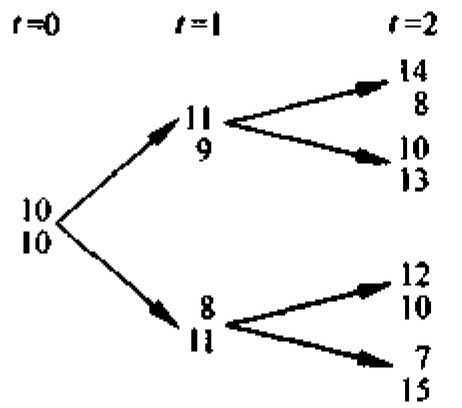


图 7.6

可以看出该方程组无解，故不存在等价鞅测度，该模型无生存性，不是一个经济均衡模型。这一点也可以通过构造以下这个证券组合得到证明。设 $t=0$ 时刻某投资者持有这样一个证券组合 $(50,-2,-3)$，即购买 50 股证券 0，卖空 2 股证券 1 和 3 股证券 2。可以算得 $t=0$ 时刻投资为零（$-50+2\times10+3\times10=0$），到 $t=1$ 时刻可以算得，无论是在状态 B_1 下，还是在状态 B_2 下，该投资者手中持有的证券组合价值都为 1（$50-2\times11-3\times9=50-2\times8-3\times11=1$），即投

资者只要在 $t=1$ 时刻出售手中的证券组合，一定可以得到 1 元的收益。因此，该模型中存在套利机会，不是一个均衡模型。

下面我们再来看第三个例子。

例 3 两阶段事件树有两种证券，$S_0(t)\equiv 1$，9 种状态 $\omega_1,\cdots,\omega_9$。$S_1(t)$ 如事件树(图 7.7)所示。

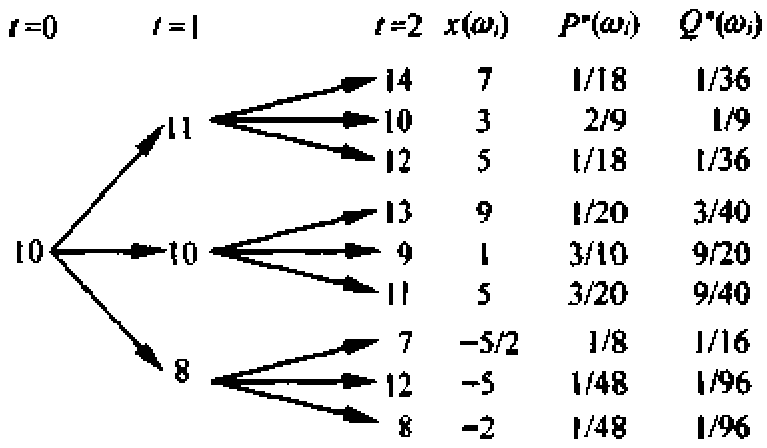


图 7.7

先求等价鞅测度 P^*。由满足等价鞅测度的条件 3 可知：

$$E^*(S_1(1)|\Phi_0)=S_1(0)=10$$

记 $p=P^*(B_1|\Phi_0)$，$q=P^*(B_2|\Phi_0)$，则有 $1-p-q=P^*(B_3|\Phi_0)$。由上式可得出如下方程：

$$11p+10q+8(1-p-q)=10$$

可以看出该方程组有无数组解。同理，由 $E^*(S_1(2)|B_1)=S_1(1)=11$ 也可解得无数组解，故等价鞅测度不唯一，该模型有生存性，但并非所有的衍生证券都可通过无套利均衡定价。只有那些对于所有等价鞅测度 P^*，$E^*(x)$ 都保持不变为一常数的衍生证券 x 才可通过无套利均衡的复制技术定价。那么如何来分辨这些衍生证券呢？我们再回到前面对等价鞅测度的计算中去。虽然我们得不到唯一的等价鞅测度，但我们可以得到以下关系式：

$$(*)\quad\begin{cases}3P^*(B_1|\Phi_0)+2P^*(B_2|\Phi_0)=2\\2P^*(\omega_1|B_1)-2P^*(\omega_2|B_1)=-1\\2P^*(\omega_4|B_2)-2P^*(\omega_5|B_2)=-1\\3P^*(\omega_7|B_3)-2P^*(\omega_8|B_3)=2\end{cases}$$

我们需要保证的是：

$$\begin{aligned}E^*(x)&=\sum_{i=1}^{9}x(\omega_i)P^*(\omega_i)\\&=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{3}x(\omega_i)P^*(\omega_i|B_j)P^*(B_j|\Phi_0)\end{aligned}$$

这样的 $E^*(x)$ 为一常数。同时，无论 $P^*(\omega_i|B_j)$ 和 $P^*(B_j|\Phi_0)$ 取什么样的值，它们必须满足上面的方程组($*$)。

由前面的关系式和约束条件，我们可以得出：只要 $x(\omega_i)(i=1,\cdots,9)$ 满足以下关系式，$E^*(x)$ 即可以保证在任何等价鞅测度下为一常数。

$$
(**)\quad \begin{cases}
[x(\omega_1)-x(\omega_3)]/[x(\omega_2)-x(\omega_3)]=-1\\
[x(\omega_4)-x(\omega_6)]/[x(\omega_5)-x(\omega_6)]=-1\\
[x(\omega_7)-x(\omega_9)]/[x(\omega_8)-x(\omega_9)]=-3/2\\
\dfrac{-\frac{1}{2}(x(\omega_1)-x(\omega_3))+x(\omega_3)-\frac{2}{3}(x(\omega_7)-x(\omega_9))-x(\omega_9)}{-\frac{1}{2}(x(\omega_4)-x(\omega_6))+x(\omega_6)-\frac{2}{3}(x(\omega_7)-x(\omega_9))-x(\omega_9)}=\dfrac{3}{2}
\end{cases}
$$

现在我们找一个满足上面关系式的衍生证券做具体分析。衍生证券 x(其期末价值 $x(\omega_i)$见图 7.7)满足上面关系式,现在我们来检验一下 x 是否可通过无套利均衡定价,即 $E^*(x)$是否在任何等价鞅测度下为一常数。由方程组(∗)可求得两个等价鞅概率 P^* 和 Q^*(见图 7.7),从而算得

$$
E^*(x)=\sum_{i=1}^{9}x(\omega_i)P^*(\omega_i)=\sum_{i=1}^{9}x(\omega_i)Q^*(\omega_i)=3
$$

因此 x 可以通过无套利均衡生成。

得到这种结果并非偶然,而是必然的。因为由方程组(∗)知,等号右边都是常数,因此,只要 $x(\omega_i)$满足方程组(∗)中等号左边各概率前面系数所对应的比例关系,就可以保证 $E^*(x)$在由方程组(∗)求得的概率测度下为一常数,而方程组(∗ ∗)式就是这个比例关系。由此可以验证凡满足方程组(∗ ∗)的资产一定可以通过无套利均衡定价。

在上面这三个例子的讲解中,实际上对离散的事件树,我们已经给出了一些求等价鞅概率的做法。通过这三个例子,我们可以总结以下规律:

1) 如果在一个市场中价格变化过程各自独立的证券种数大于事件树每个父辈节点的分叉数(即状态数)时,则该市场中一定存在套利机会。

2) 当市场上价格变化过程各自独立的证券种数等于事件树每个父辈节点的分叉数(即状态数)时,则该市场上所有的衍生证券均可通过无套利均衡定价,或者说,对于每种衍生证券来说,市场都是完全的。

3) 当市场上价格变化过程各自独立的证券种数小于事件树每个父辈节点的分叉数(即状态数)时,则该市场上并非所有的衍生证券均可通过无套利均衡定价,或者也可以说,市场不是对于每种衍生证券来说都是完全的。市场只对其期末价值满足一定比例关系式(由等价鞅测度的约束条件推出)的衍生证券才是完全的。所以,这样的市场对有些衍生证券来说是相对完全的,对另一些衍生证券来说是相对不完全的。这种说法的正确与否取决于对市场完全性的定义。

6. 小结

本章讨论的(动态)无套利均衡分析的基本定理虽然是在简化了的多阶段证券市场模型和自融资简单交易策略的基础上展开的,但所讲述的核心原理对更为切合实际的模型和策略也都适用。通过对本章的研读,读者将能比较深入地掌握多阶段的动态复制技术,即多阶段的金融资产定价技术。

等价鞅测度的概率就是风险中性概率,由两个基本定理所支撑的等价鞅测度模型深刻地揭示了无套利均衡和风险中性假设之间的关系。而且,通过学习和理解等价鞅测度模

型，能够帮助读者掌握市场的动态完全性等非常重要的金融学概念。第一基本定理告诉我们，风险中性概率（即等价鞅测度概率）存在，采用自融资交易策略，就一定能实现无套利均衡，也就一定能进行动态复制定价；反过来，能够动态复制定价，即实现无套利均衡，就一定能构造风险中性概率。这就彻底消除了为什么风险中性定价和无套利均衡定价的结果一定相同的疑惑。如果存在多个等价鞅测度（即能够构造出多个不同的风险中性概率），那么，各种可能的结果对这些等价鞅测度概率所求的数学期望值（概率平均值）必须相同，证券才能被无套利均衡定价，否则出现多个不同的定价结果，意味着动态复制技术对该证券定价的失败，亦即市场不是动态完全的。当等价鞅测度是唯一时，情况就简单化了。这时市场是动态完全的，而所有的证券都能够被动态复制定价。这就是第二基本定理的内涵。

显而易见，实际的金融市场往往是不完全的市场。在不完全的市场里，有的证券不能被动态复制，即不能通过无套利均衡定价，因而也就不能有效地套期保值进行风险管理。金融工程作为金融创新的技术支持，其重要作用之一是依靠金融工程师们的创造性劳动，设计、开发出新型的金融产品，来增加市场的完全性，增强市场转移和优化配置收益/风险的功能，健全市场本身抵御和防范金融风险的机制。

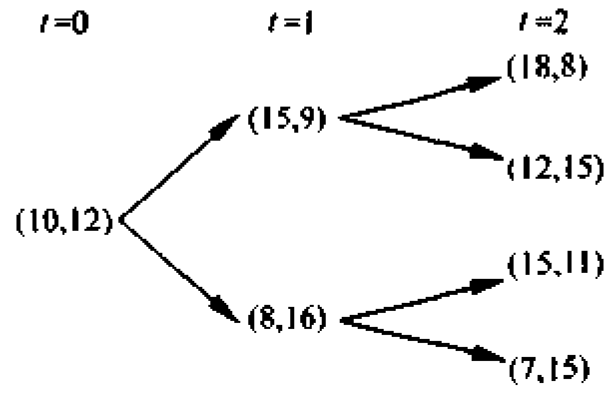
特别需要提请注意的是，如我们在本章中所分析的，同一个市场，往往会对某些证券来说能够无套利均衡定价，而对另一些证券来说却不能。或者我们也可以认为，同一个市场，对某些证券来说是相对完全的，对另一些证券来说则是相对不完全的。这种情况无论在理论上还是实践中，都有非常重要的意义。

利用等价鞅测度模型即风险中性假设为证券定价，关键在于找出等价鞅概率即风险中性概率。在本章的数字例子里，我们实际上已经介绍了一些确定等价鞅概率的办法。但这里介绍的都是离散的情况。连续的情况，有时在数学上的处理要更复杂。利用风险中性假设求解布莱克-舒尔斯期权定价公式的解法给出了一个典型的例子。

练习题

有一两阶段证券市场模型如下：

假设市场中有三种证券：$S_0(t)$，$S_1(t)$和 $S_2(t)$。其中 $S_0(t)\equiv1$，$t=0,1,2$。



试确定等价鞅测度是否存在？若存在，计算等价鞅测度；若否，假设 $t=2$ 时的数据不变，调整 $S_2(0)$，$S_2(1)$使得等价鞅测度存在且唯一，并给出此时的等价鞅测度。

第八章　或有要求权的估值

所谓或有要求权(contingent claims)是未来可能发生的权利,期权是典型的或有要求权(也有人把所有的衍生工具都称为或有要求权)。除了在市场上交易的期权需要定价以外,实际上还存在大量隐含的或有要求权需要估值。实际上,只要是与未来的不确定性决策有关的问题,有许多都是可以用处理或有要求权的方法来估算其价值的(当然可以在估值的基础上定价)。正因为如此,期权定价理论的提出在现代金融学的发展中占据了极为重要的地位。

为了使读者了解期权定价理论在或有要求权的估值方面的应用,我们将介绍与公司财务管理的两个方面有关的内容:其一与融资决策有关,将介绍对带有风险或可转换特性的金融工具的估值和定价;其二与投资决策有关,主要是对所谓实物期权(real options)理论的介绍。这些方面的研究进展,对增强企业金融/财务决策的灵活性有重大的意义,是公司财务理论的重要发展。

对或有要求权的分析方法和传统的采用折现现金流估值的方法相比,是完全不同的新方法。折现现金流的估值方法是用含有风险补偿(即经过风险调整)的预期收益率作为折现率来折现未来的现金流。因为经过资本市场的竞争,预期收益率就是资本的成本,所以用折现后的现值来估值确实是反映了市场的评价。虽然这种估值方法也体现了无套利均衡关系,但这种无套利均衡关系不是直接的,不能通过市场中的套利者建立套利头寸来直接和迅速地建立均衡。而且,这种估值的正确性依赖于资本市场的完善,对市场的完善性要求很高,整个资本市场都应该是完全自由竞争的。采用或有要求权的分析方法则主要是比较同时存在于同一金融市场的其他资产的价值,因而无套利均衡关系表现得更为直接,可以通过套利行为迅速建立均衡。相对来说,这种分析方法也就可能更为直接地体现出市场的评价。因此,这一分析方法的发展,对于推进金融与财务研究具有非常重要的意义。

我们先从这两种估值方法的比较开始讨论。在讨论估值方法之前,我们也先简单地介绍一下债券和股票的报价。表 8.1 是《华尔街日报》刊载的美国纽约交易所的债券市场报价。

左起第 1 列有三项内容:债券名称、息票利率(如果是零息票债券则加上 zr 字样)和到期年份。第 2 列是当期收益率,即息票利率除以面值的百分比所表示的债券当前价格,如果是零息票债券,这一栏没有数字。第 3 列是当天的交易量,企业债券的交易量是不大的。第 4 列是当天(指报纸刊印的前一天)的收盘价,以债券面值的百分比表示,最小单位是 1/32 个百分点。最右边一列是与前一天收盘价相比较的价格变化,最小单位也是 1/32 个百分点。表 8.1 右上方是道·琼斯债券平均指数(Dow Jones Bond Averages)的信息。

表 8.1

NEW YORK EXCHANGE BONDS

Quotations as of 4 p.m. Eastern Time
Monday, June 28, 1999

CORPORATION BONDS
Volume, $10,253,000

Bonds	Cur Yld	Vol	Close	Net Chg
AMR 9s16	8.0	49	112¼	– ⅜
ATT 5⅛01	5.2	7	98⅛	– ⅜
ATT 7⅛02	7.0	40	101⅜	+ ⅜
ATT 6¾04	6.7	45	100⅝	+ ⅜
ATT 5⅝04	5.8	90	96¼	+ ¾
ATT 7s05	6.9	55	101½	– ⅛
ATT 8.2s05	8.0	55	102⅝	+ ⅛
ATT 7½06	7.2	10	104	...
ATT 6s09	6.5	20	93	...
ATT 8⅛22	7.8	168	103⅝	+ ⅜
ATT 8⅛24	7.8	50	104⅛	+ 1⅛
ATT 6½29	7.2	50	89¾	+ ¾
ATT 8⅝31	8.0	20	107⅝	+ ⅜
Aames 10½02	14.6	4	72	– 1
AlldC zr2000	...	25	92⅞	...
AlldC zr01	...	20	86⅝	...
AlldC zr09	...	85	49⅝	+ ½
Alza 5s06	cv	81	137	+ 1⅜
Alza zr14	...	236	45¼	+ ⅛
ARetire 5¾02	cv	15	70½	– ½
Amresco 10s03	13.2	30	75½	– 2¼
Amresco 10s04	13.2	265	76	– ⅛
Argosy 12s01	cv	30	102	...
Argosy 13¼04	12.2	5	109	– 1
ARch 10⅞05	8.9	10	122½	...
BankAm 9⅞01	...	5	104¾	– 4¼
BellsoT 6⅛03	6.3	20	99⅝	...
BellsoT 5⅞09	6.3	10	93	– 1
BellsoT 7s25	7.3	101	96⅜	– ¼
BellsoT 7⅞32	7.6	20	103½	...
BellsoT 7½33	7.6	70	98⅛	– 1¼
BellsoT 6¾33	7.3	71	92	+ 1
BellsoT 7⅝35	7.6	170	99¾	+ 1⅜
BethSt 8⅜01	8.3	1	100⅝	...
BethSt 8.45s05	8.4	10	100¼	...
Bevrly 9s06	9.0	10	100½	+ ⅞
Bordn 8⅜16	8.4	27	100⅛	+ ⅜
BosCelts 6s38	9.7	106	61⅝	...
BrnSh 9½06	9.2	20	103½	+ 1⅝
BurNo 3.20s45	6.5	59	49⅝	– 1
CATS zr11-99	...	16		...
Caterpinc 6s07	6.2	15	96⅝	– ⅜
Centrlrst 7½01	cv	10	93⅜	...
ChaseM 7⅞04	7.8	30	100½	+ ½
ChaseM 6⅛08	6.4	30	95¼	– ⅛
ChaseM 6½09	6.6	140	98	+ 1⅜
CPoM 7¼12	7.3	19	100	+ ⅛
ChespkE 9⅛06	10.3	10	88½	– ⅜
ChckFul 7s12	cv	14	123⅜	+ ⅞
Clardge 11¾02f	...	78	58¼	– ⅛
ClrkOil 9½04	9.4	85	100⅝	– ⅜
CoeurDA 7¼05	cv	4	59¾	– 1¼
Coeur 6⅜04	cv	10	61	...
CompUSA 9½00	9.6	134	99⅝	+ ⅜
Conseс 8⅛03	7.9	5	103¼	– ½
Convrse 7s04	cv	144	49½	+ 1½

Volume $10,784,000

SALES SINCE JANUARY 1
(000 omitted)

1999	1998	1997
$1,671,251	$1,926,709	$2,916,192

	Domestic Mon.	Domestic Fri.	All Issues Mon.	All Issues Fri
Issues Traded	203	179	211	187
Advances	82	60	85	61
Declines	84	83	86	87
Unchanged	37	36	40	39
New highs	0	1	0	1
New lows	16	24	16	24

Dow Jones Bond Averages

1998 High	1998 Low	1999 High	1999 Low		1999 Close	1999 Chg.	1999 %Yld	1998 Close	1998 Chg.
107.17	104.42	106.88	100.72	20 Bonds	101.01	+ 0.29	7.28	104.88	– 0.22
104.71	101.88	104.72	97.53	10 Utilities	97.96	+ 0.43	7.27	102.69	– 0.01
109.81	106.48	109.44	103.49	10 Industrials	104.05	+ 0.13	7.29	107.06	– 0.40

Bonds	Cur Yld	Vol	Close	Net Chg.
Hallwd 7s00	7.5	10	93	+ 2¾
HlthcrR 6.55s02	cv	52	89¾	– ¾
Hlthso 9½01	9.2	12	102¾	+ ½
HewlPkd zr17	...	142	62	+ 3
Hexcel 7s03	cv	5	93	– ½
Hilton 5s06	cv	51	91¼	...
Hollngr 9¼07	9.1	25	102½	...
Hollngr 9¼06	9.1	93	102⅛	– ⅜
IRT Pr 7.3s03	cv	5	98	– 1
IllPwr 6½03	6.5	22	99½	...
IBM 6⅜00	6.4	195	100	– 1/32
IBM 7¼02	7.0	45	102⅞	+ ⅜
IBM 7½13	7.1	1	106⅜	+ 1⅞
IBM 8⅜19	7.5	16	112	+ 1
IBM 6½28	7.3	11	89⅝	– 1⅜
IPap dc5⅛12	6.2	10	82½	– ⅜
IntShip 9s03	8.8	10	102⅝	+ ⅞
KCS En 8⅞08	44.1	59	19⅛	+ ¼
KaufB 9⅜00	9.2	35	101⅜	– ½
KaufB 7¾04	7.9	55	98	+ ⅝
KaufB 9⅝06	9.1	35	105⅜	...
KentE 4½04	cv	65	78	+ 1
KerrM 7½14	cv	12	98⅜	– ⅛
Kolmrg 8¾09	cv	40	100⅛	– 2¾
LeasSol 6⅝01	cv	40	5½	– 1
LehmnBr 8¾02	8.4	10	104½	...
Leucadia 7¾13	7.9	5	98½	...
Lilly 7⅛25	7.3	6	97½	– 1⅞
Loews 3⅛07	cv	98	79⅝	+ ⅜

Bonds	Cur Yld	Vol	Close	Net Chg.
Polaroid 11½06	10.8	85	106⅝	– ⅛
Pride 6¼06	cv	20	98½	– ⅛
PrmHsp 9¼06	9.1	10	101½	...
PSvEG 6⅛02	6.2	30	98⅝	+ ⅜
PSEG 8 03	8.5	21	104⅝	+ ⅞
PSEG 6½04	6.6	20	98¾	...
PSEG 6¼07	6.4	10	98	...
Quanx 6.88s07	cv	1	104⅛	...
RJR Nb 8s01	7.9	25	100⅝	+ ⅛
RJR Nb 8⅛02	7.8	10	102⅝	+ ⅛
RJR Nb 7⅝03	7.6	56	99⅝	...
RJR Nb 8¾05	8.6	20	102	– ½
RJR Nb 9¼13	8.4	40	110	+ ½
RJR Nb 8⅝04	8.5	35	102⅝	– ⅛
Rallys 9⅞00	11.6	57	85 1/32	– 1 19/32
RelGrp 9s00	8.9	25	101¼	+ ½
RelGrp 9¾03	9.5	165	102¾	+ 1⅛
Safwy 9.65s04	8.8	20	109½	+ ⅛
Safwy 9⅞07	8.6	21	114½	– ½
Seque 9⅜03	9.3	61	101¼	– ¾
vjSvcM 8¾01f	...	83	58	– ½
vjSvcM 9s04f	...	100	20½	+ ¼
Simula 8s04	cv	45	80	– 2
SwBell 6⅝01	6.4	35	99⅝	– ⅜
SwBell 7s15	6.9	10	101	+ 1
SwBell 7⅝23	7.4	10	102⅝	+ 1⅛
SwBell 7¼25	7.3	15	98⅝	– ⅜
StdCmcl 07	cv	14	60	+ ½
StdPac 8½07	8.5	13	99⅝	+ ⅛

表 8.2 则是纽约股票交易所 1999 年 6 月 28 日的股票价格情况(取自 6 月 29 日《华尔街日报》,截取了其中一段)。

最左边的两列是过去 1 年(52 周)内股票达到的最高价位和最低价位。股票的价格用货币的数额而不是用百分比报价,在美国股市上最小单位是 1/32 美元。第 3 列是股票的名称,第 4 列是发行股票的公司的辨识标记。第 5 列是当年分配的红利。第 6 列是股票收益,以股票当年分派的股息/红利除以当天的收盘价计算,也就是当期收益率。第 7 列是股票的市盈率,是股票的价格除以每股收益。第 8 列是当天交易的股票的手数,每手 100 股。第 9、第 10、第 11 三列分别报道当天交易的最高价、最低价和收盘价。最右边的一列则是

当天的收盘价和前一天的收盘价的变化，也用货币数额来表示。

表 8.2

NEW YORK STOCK EXCHANGE COMPOSITE TRANSACTIONS

	52 Weeks Hi	Lo	Stock	Sym	Div	Yld %	PE	Vol 100s	Hi	Lo	Close	Net Chg
	81	70 15/16	ViaCp pf		4.75	6.7	...	z110	70 15/16	70 15/16	70 15/16	...
	51¼	4 9/16	Vimpel ADR	VIP		...	dd	101	23 9/16	22 11/16	23 9/16	+ 5/16
	19⅝	4 5/16	VintagePete	VPI	.10	.9	dd	3833	10 15/16	10½	10⅝	+ 1/16
n	24 15/16	24	VA E&P	VPA	1.88	7.8	...	214	24 9/16	24⅛	24⅛	− 5/16
n	25¼	24	VA E&P nts98		1.79	7.3	...	116	24½	24 9/16	24⅝	...
	26⅝	25 3/16	VA Pwr pfT		2.01	8.0	...	2	25 3/16	25 3/16	25 3/16	...
s	20 13/16	7⅜	▲Vishay	VSH		...	dd	6546	21 1/16	20	20⅜	− ⅜
	7⅜	3¼	Vitro ADR	VTO	.58e	11.2	...	880	5⅛	4⅞	5	− 1/16
	23 11/16	6 9/16	VlasicFoods	VL		...	dd	575	7⅝	7⅛	7 9/16	+ 5/16
	216⅞	94	Vodafon ADR	VOD	1.22e	.6	..	16970	205 15/16	201⅜	204⅜	+ ⅛
	34⅝	15 9/16	▲VolInfoSci	VOL		...	15	27	23⅜	22 13/16	22 13/16	− 1/16
	40	25 11/16	Vornado	VNO	1.76	4.8	21	642	37⅛	36⅝	36⅝	− 5/16
	57⅞	38¼	Vornado pfA		3.25	6.2	...	77	52⅝	52¼	52 5/16	− 5/16
n	25¼	23¾	Vornado pfB		2.13	8.8	...	22	24⅛	24¼	24¼	+ ⅛
n	25	23¾	Vornado pfC		2.13p	...	...	124	24½	24⅜	24½	+ ⅜
s	50¾	31 11/32	▲VulcanMat	VMC	.78	1.7	20	4118	47¼	46⅛	47⅛	+ 5/16
			-W-W-W-									
	36 3/16	24½	WBK STRYPES		3.14	9.8	...	175	32¼	32	32⅛	+ ⅜
n	24⅝	23 1/16	WEC CapTr		.46p	...	...	66	23⅜	23⅛	23⅜	...
	13 5/16	6⅝	WHX Cp	WHX		...	dd	8930	6 9/16	6⅝	6⅝	+ 1/16
	48⅝	29	WHX Cp pfA		3.25	10.3	...	24	32	29⅝	31½	+ 2⅛
	46	32	WHX Cp pfB		3.75	11.7	...	41	34 1/16	32	32	− 2⅞
↓	27¾	18 9/16	▲WICOR	WIC	.88	3.1	21	10015	28 15/16	27½	28½	+ 1 5/16
	18⅝	9⅝	WMC ADR	WMC	.24e	1.4	...	143	17 9/16	17¼	17 5/16	+ ⅛
	16⅝	3½	WMS Ind	WMS		...	dd	1186	16 5/16	15	15⅝	+ ¾
	37½	28⅝	WPS Res	WPS	1.98	6.3	16	322	31¼	30 11/16	31 3/16	+ 1/16
n	25⅞	23 9/16	WPSR Capl pfA		1.75	7.4	...	60	24	23½	23½	− 1/16
	26 11/16	10¾	WabashNtl	WNC	.15	.8	17	1078	19 5/16	18⅝	19 5/16	+ ½
	98 9/16	72⅞	Wachovia	WB	1.96	2.3	19	2602	84⅝	83⅝	83⅞	+ 1⅛
	26	18	▲Wackenhut	WAK	.23	...	23	113	25½	25	25½	+ ⅜
	21 9/16	14¾	▲Wackenhut B	WAKB	.23	...	cc	88	20⅝	20	20½	+ 5/16
	29	15	▲WackenhutCorr	WHC		...	24	237	19 7/16	18 15/16	19⅜	+ ⅜
	27⅞	16 7/16	WaddReed A	WDR	.53	2.0	20	681	27¼	26 5/16	27 1/16	+ ⅝
n	27⅞	18¼	WaddReed B	WDRB	.40e	1.5	...	394	26⅝	25⅝	26⅝	+ 15/16
	26⅝	16	WaldnResd	WDN	1.93	9.2	40	661	21⅜	21	21	− 5/16
	26¾	19⅝	WaldnResd pfS		2.30	11.0	...	64	21 1/16	20⅝	20⅝	+ ⅛
	29⅝	20⅝	WaldnResd pfB		2.29	9.3	...	15	24 9/16	24 9/16	24 9/16	− 1/16
n	21½	15⅝	WaldnResd pfD		2.25	11.4	...	10	19 13/16	19 13/16	19 13/16	+ ⅛
s	33 15/16	18⅝	Walgreen	WAG	.13	.4	51	18821	29⅝	27⅞	29 3/16	+ 1¼
	27¼	15 1/16	WallaceCS	WCS	.64	2.5	15	1082	25½	24 13/16	25⅛	− ⅛
s	53 3/32	26 7/32	WalMart	WMT	.20	.4	43	56082	45⅝	43 11/16	45 9/16	+ 2⅜
	19 9/16	10⅜	WalterInd	WLT		...	16	634	13	12⅞	13	...
	44 5/16	18½	Warnaco	WAC	.36	1.3	54	1301	27	26½	27	+ ⅜
	65 13/16	60⅞	WarnerLamb	WLA	.80	1.3	39	21477	63 9/16	62⅝	62⅝	− 1/16
	28⅝	21	WA GasLt	WGL	1.23	4.5	19	1165	27 1/16	26 9/16	27	+ 7/16
	8⅜	4	WA Homes	WHI		...	6	93	6⅜	6 11/16	6 11/16	− 1/16
	46⅝	26⅝	WashMut	WM	.96	2.6	15	17570	36⅜	35⅝	36 1/16	+ 1⅛
	605½	481 9/16	WashPost B	WPO	5.20	.9	22	77	552⅜	550	550	...
	18¾	15 9/16	▲WashREIT	WRE	1.17f	7.1	14	549	16 9/16	16⅜	16½	+ ⅛
	60	35¼	WasteMgt	WMI		...	37	12846	56	55 9/16	55 9/16	+ 11/16
	9 1/16	2⅝	▲[illegible]	WLK		...	dd	1127	3⅝	3	3⅛	− 5/16
s	56½	25 11/16	▲WatersCp	WAT		...	35	1533	53½	53⅛	53⅜	+ 1/16
	29½	16⅝	▲WatkinsJohn	WJ	.48	1.7	dd	632	28	26⅝	28	+ 1 1/16
s	23 11/16	11¼	Watsco	WSO	.10	.6	18	708	16 5/16	16 1/16	16¼	+ ¼
	63	35½	WatsnPharm	WPI		...	30	5485	40¼	38⅝	40⅛	+ 5/16
	24⅝	12 1/16	WattsInd	WTS	.35	1.8	12	1252	19¾	19⅛	19 5/16	+ 1/16
	22⅞	12¼	WausauMosin	WMO	.32	1.9	24	1281	17 1/16	16⅝	17	− 1/16
	39 9/16	15	Weatherford	WFT		...	cc	3773	35	34 1/16	34 1/16	...
	29½	17 1/16	WebbDel	WBB	.20	.9	8	343	22¼	21 11/16	22	+ ½
	33 9/16	25¼	WeeksCp	WKS	2.02	6.6	22	218	31	30 7/16	30⅝	+ 1/16
	24⅞	22	WeeksCp pfA		2.00	8.3	...	27	24⅛	24 1/16	24 1/16	+ 1/16
	17½	3 9/16	[illegible] A	[illegible]	.15	3.4	44	122	4 7/16	4 5/16	4 7/16	+ ⅛
	46⅝	35 13/16	▲WeingtnRlty	WRI	2.84	6.8	20	278	41⅜	41⅛	41½	+ 3/16
	26 11/32	24 1/16	▲WeingtnRlty pfA		1.86	7.5	...	25	25 3/16	24 15/16	24 15/16	− 1/16
n	50⅜	47 1/16	▲WeingtnRlty pfC		1.41e	3.0	...	1	47⅜	47⅜	47⅜	+ ⅛
	3⅝	1 7/16	WeirtnStl	WS		...	dd	242	2 5/16	2⅛	2⅛	− 1/16
	40 5/16	32⅝	WeisMkts	WMK	1.00	2.6	21	46	39	38	38⅝	+ 5/16
	23 15/16	8¾	Wellman	WLM	.36	2.4	cc	2528	15⅛	14⅝	14⅝	− ⅛
	97	50½	WellptHlth	WLP		...	23	10039	85½	81⅛	81½	− 3⅝

1. 折现现金流估值：债券和股票

在一个完全自由竞争的金融市场中，对所有的投资者来说信息都是无偏的，市场又有很高的效率。因此，在完全自由竞争的金融市场中，资产的均衡价格被认为很好地反映了其价值。

（1）债券的估值

固定利率的债券被认为是产生已知现金流的金融工具，所以称为固定收入证券。采用折现现金流估值，带息票的固定利率债券的现值为

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{i \times Par}{(1+r)^k} + \frac{Par}{(1+r)^n} = Par\left[\frac{i}{r} + \frac{r-i}{r(1+r)^n}\right]$$

其中 Par 是债券的面值，i 是利息息票利率，r 是由当时的市场条件所决定的预期收益率，也就是投资于该项债券的资本成本。

例如，如果债券在开始发行时按照当时的市场条件是平价债券，即发行价格 $P_0=$

Par。比方说,$Par=1\ 000$ 元,息票利率 $i=6\%$,$n=3$,发行时市场对该种债券的预期收益率是 $r=i=6\%$,则由上述公式可以容易地算出 $P_0=PV=Par=1\ 000$ 元。过了一段时间,市场的利率环境发生了变化,对该种债券的预期收益率上升到 $r=8\%$,而息票利率 i 保持不变。为了实现 8%的预期收益率,债券的价格就会下跌到 $P_0=PV=948.46$ 元,成为折价债券。反之,如果市场对债券的预期收益率下降,债券的市值(价格)就会上升。因此,

> **对于固定收入证券的折现现金流来说,预期收益率的变动方向和证券的市值(价格)的变动方向相反。**

就上面的带固定利率息票债券的折现现金流的估值公式而言,这一点不难从数学上做出证明(见本章数学附录)。

下面对债券的两种收益率给出定义:

当期收益率(current yield)定义为年度息票利息与债券价格(市值)之比。如债券的年度息票利息为 100 元,目前的市场价格为 1 067.42 元,则

$$\text{当期收益率}=\frac{\text{年度息票利息}}{\text{市场价格}}=\frac{100}{1\ 067.42}=9.37\%$$

到期收益率(YTM-yield to maturity)定义为使债券的折现现金流的现值等于其市场价格的折现率,实际上就是债券的内部收益率。例如 1 份还有 2 年到期的带息票债券,面值为 1 000 元,每年的息票利息是 100 元,现在的市场价格是 1 100 元,用折现现金流公式可算出到期收益率只有 $r=4.65\%$。当期收益率却高达 9.09%。

对于溢价债券,有

到期收益率<当期收益率<息票利率

对于折价债券,则有

到期收益率>当期收益率>息票利率

这是所谓的**债券定理**。

读者读到这里的时候,应当回过头去复习一下我们在第二章讲述过的内容。如果表示利率的期限结构的国库券的收益曲线不是平坦的,而对国库券的折现现金流采用同一个折现率(即预期收益率,也就是到期收益率),那么它是不同时期的零息票利率集的某种平均。对于所有其他债券来说也是如此,不过零息票利率中都要加上风险补偿。但是这是理论上的道理。在实际的市场操作中,如我们上面所述,是通过面值、息票利率、到期期限和当前的市场价格来换算出当期收益率和到期收益率。

下面我们来讨论为什么具有相同到期期限的债券会有不同的到期收益率?

第一个原因是不同息票利率的影响,我们用数字例子来说明。

如果国库券的收益曲线不平坦,1 年期的零息票利率是 4%,而 2 年期的零息票利率是 6%。如果有两项 2 年期的国库券的息票利率分别是 5%和 10%,面值都是 1 000 元,则它们现在的市场均衡价格分别是

$$\frac{50}{1+0.04}+\frac{1\ 050}{(1+0.06)^2}=982.57\ \text{元}$$

和

$$\frac{100}{1+0.04}+\frac{1\,100}{(1+0.06)^2}=1\,075.15\text{ 元}$$

我们用折现现金流公式来求解二者的到期收益率，分别有

$$982.57=\frac{50}{1+r^{(1)}}+\frac{1\,050}{(1+r^{(1)})^2}$$

解出 $r^{(1)}=5.9500\%$；又

$$1\,075.15=\frac{100}{1+r^{(2)}}+\frac{1\,100}{(1+r^{(2)})^2}$$

解出 $r^{(2)}=5.9064\%$。

因此，当国库券收益曲线不平坦时，相同到期期限但息票利率不同的债券的到期收益率是不一样的。

第二个原因是违约风险和税收的影响。

上面举的是国库券的例子，对于有违约风险的债券(例如企业债券)来说，即使到期期限相同甚至息票利率也相同，因为违约风险的大小不一样，市场所要求的(到期)收益率也是不一样的。违约风险比较大的债券要求较高的风险补偿，到期收益率就会比较高，违约风险比较小的债券则反之。另外，不同的债券可能会有不同的税收待遇，某些税种对有的债券是可以免征的。享受税收优惠的债券在市场上会比较有吸引力，价格因此相对比较高，到期收益率因此也就比较低。

其他影响债券(到期)收益率的原因还有很多。由于金融工程的发展，已经出现了带有各种附加特性的债券。比如，可赎回债券赋予债券的发行者一种权利(而不是义务)——可以提前赎回债券；可转换债券则赋予债券的购买者一种权利(同样不是义务)——可以在一定的时期内按照预定的转换比将债券转换为股票。债券只要带上诸如此类的特性就都会影响收益率。总而言之，如果所带有的特性是有利于债券的发行者的，则会降低债券的市场价格，从而提高债券的到期收益率；如果所带有的特性是有利于债券的购买者的，就会提高债券的市场价格，从而降低债券的到期收益率。因此，可赎回债券的收益率就比普通债券高，而可转换债券的收益率就比普通债券低。给债券带上各种特性是设计不同融资方案的重要途径，当然也就是金融工程重要的设计技术。

下面我们再考察一下时间和利率变化对债券价格的影响。如果利率的期限结构是平坦的，而市场利率也不发生变化，无论是处于折价状态(市场价格低于面值)的债券还是处于溢价状态(市场价格高于面值)的债券，随着时间的流逝，都会单调地趋向于债券的面值。也就是说，折价债券的价格随着时间的流逝会提高，溢价债券的价格随着时间的流逝会降低，最后到到期日都会和面值相等。

带息票债券和零息票债券的价格对市场利率水平变化的敏感性是不一样的。1 份 30 年期，面值为 1 000 元，息票利率为 8%的带息票平价债券，当市场利率提高，对该债券的预期收益率从 8%上升到 9%时，价格下跌到 897.26 元，跌幅大概是 10%。而同样 1 份 30 年期，面值为 1 000 元的零息票债券，收益率从 8%上升到 9%时，价格会从 99.38 元下跌到 75.37 元，跌幅几乎高达 23%。因此，零息票债券的价格对市场利率变化的敏感性大大高于带息票债券。

(2) **股票的估值**

因为普通股股票的红利率是不确定的，股票不是固定收入证券，所以股票的估值要比债券复杂。我们在这里讲的股票估值都是就普通股股票而言的。

对于股票来说折现现金流就是所谓的折现红利流模型(DDM—— discounted dividend model)。红利流模型的导出如下所述。

股票的收益由两个部分组成：*红利收益和资本收益*。红利收益是期间发行股票的公司所分派的红利，资本收益则是因为股票价格的变化所带来的收益。资本市场根据发行股票的公司的经营业绩及其他有关信息，定出对股票收益的风险调整折现率，称为股票的*市场资本化率*。市场资本化率也就是市场对该股票的预期收益率。假如有一家公司的股票在1年后的预期价格是 P_1，现在的价格(尚未定出)记为 P_0，则1年中预期的资本收益是 P_1-P_0。在这1年内预期发放的红利是 D_1(为简单起见，假定红利到年底发放)，而市场对这种股票在这第1年的预期收益率(即市场资本化率)为 $E(r_1)=k$。于是应有

$$E(r_1)=\frac{D_1+(P_1-P_0)}{P_0}=k$$

由此可以倒解出

$$P_0=\frac{D_1+P_1}{1+k}$$

如果知道了 D_1，P_1 和 k，就可以定出该股票现在的均衡价格 P_0。例如，若 $D_1=6$ 元，$P_1=110$ 元，$k=16\%$，就可定出

$$P_0=\frac{6+110}{1+16\%}=100\text{ 元}$$

如果到了第2年市场的资本化率保持不变，仍是 $k=16\%$，则有

$$P_0=\frac{D_1+P_1}{1+k}=\frac{D_1+\left(\dfrac{D_2+P_2}{1+k}\right)}{1+k}=\frac{D_1}{1+k}+\frac{D_2+P_2}{(1+k)^2}$$

这个关系式可以类推到无穷期

$$P_0=\frac{D_1}{1+k}+\frac{D_2}{(1+k)^2}+\cdots=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_t}{(1+k)^t}$$

这就是折现红利流模型。

请注意，未来发生的红利流实际上是不确定的，所有的 D_t 也都是对未来发生的红利的预期。另外，如我们在第二章所反复强调的，市场环境是要变化的，现在取同一个市场资本化率 k 作为折现率也是依据预期对未来所有的市场资本化率的某种“平均”。因此，折现红利流模型的意义主要是在理论分析上，真正用它来为股票定价在实际上是很难操作的。

显然，以后任何时刻股票的预期价格 P_t 都可以从折现红利流模型的尾部“截出”：

$$P_t=\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{D_{t+\tau}}{(1+k)^{\tau}}$$

现在假设红利逐年按照一个固定的增长率 g 增长，即有 $D_t=D_1(1+g)^{t-1}$。若 $g=10\%$，因而 $D_1=6$ 元，$D_2=6.60$ 元，$D_3=7.26$ 元，等等。代入折现红利流模型，可得到

$$P_0=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_1(1+g)^{t-1}}{(1+k)^t}=\frac{D_1}{k-g}$$

于是 $P_0=\frac{6}{16\%-10\%}=100$ 元。

现在我们来讨论一下这一红利稳定增长模型(CGRDDM——constant growth rate discounted dividend model,亦称哥登(Gorden)模型)的涵义。首先,股票的价值与以下因素有关:

1) 每股股票的预期红利越大,股票的价值越大;

2) 股票的市场资本化率越小,股票的价值越大;

3) 股票的红利增长率越大,股票的价值越大。

由红利稳定增长模型显然可知,这一模型的适用范围是在红利增长率低于股票的市场资本化率(即 $g<k$)的情况。如果 $g\geqslant k$,由模型的推导过程可以清楚地看出,公司股票的红利不可能长久地按照这一增长率增长,否则股票的价值会向无穷大发散。在这种情况下,模型应根据 g 的变化情况按时间分段处理。

因为

$$P_t=\frac{D_{t+1}}{k-g}=\frac{D_1(1+g)^t}{k-g},\quad P_{t+1}=\frac{D_1(1+g)^{t+1}}{k-g}$$

所以有

$$P_{t+1}=P_t(1+g)$$

于是,股票价格的增长率和红利的增长率相等。在第 t 年,股票的资本收益率应为 $\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}=\frac{P_t(1+g)-P_t}{P_t}=g$,红利收益率则是 $\frac{D_t}{P_{t-1}}=\frac{D_1(1+g)^{t-1}}{P_0(1+g)^{t-1}}=\frac{D_1}{P_0}$。这样,股票的预期收益率由两个部分组成,一是红利收益率,一是资本收益率,即有

$$E(r)=k=\frac{D_1}{P_0}+g$$

对于红利稳定增长的公司来说,这两部分收益率都是常数(就红利增长率而言,红利增长,股票价格也增长)。在我们上面的数字例子里,$k=16\%$,其中红利收益率为 $\frac{D_1}{P_0}=\frac{6\text{ 元}}{100\text{ 元}}=6\%$,资本收益率为 $g=10\%$。

红利稳定增长模型虽然看起来与实际有比较大的差距,但从中却可以分析出许多具有一般规律性的金融/财务涵义。下面我们就在红利稳定增长模型的基础上(即假定公司发放的红利是稳定增长的)作进一步的讨论。

首先可以指出,公司收益的增长率和红利的增长率是一样的,因为有

$E_t=D_t+(P_t-P_{t-1})$

$E_{t+1}=D_{t+1}+(P_{t+1}-P_t)=D_t(1+g)+(P_t-P_{t-1})(1+g)=E_t(1+g)$

公司的收益不是全部用来分红的,其中有一部分要转化为新的净投资,即有

$$P_0=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_t}{(1+k)^t}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{E_t}{(1+k)^t}-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{I_t}{(1+k)^t}$$

请注意,这后面一部分是新的净投资的现值 $I=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{I_t}{(1+k)^t}$。净投资的涵义是:企业除了维持现有的生产能力外,为了扩大生产另外再追加的投资。$I<0$ 的情况也是可能

的，此时意味着企业的折旧基金没有(或没有全部)用于设备更新，企业的生产能力逐渐衰减。对于"夕阳产业"的企业来说，经常就是这种情况。$I=0$时，企业仅仅是维持原有的生产能力不变。对于企业来讲，追加新的净投资必须有恰当的投资机会，这一点后面还要深入讨论。

追加新的净投资会创造出新增加收益。于是，可以把现在股票的价值(均衡价格)分解成两个部分：一部分是以后每年创造的收益与现在的收益(E_1)相等的部分折算成的现值；另一部分是未来的新增收益减去新加投资后的净值折算成的现值(我们称之为未来增长机会的净现值(PVGO—— present value of growth opportunities))。即有

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E_1}{(1+k)^t} + \text{未来增长机会的净现值} = \frac{E_1}{k} + \text{未来增长机会的净现值}$$

假如有一家维持型的公司，每年的投资仅仅用来更新已经损耗了的设备，即维持原有的生产能力不变。这样，$I=0$，未来增长机会的净现值也就为0。如果该公司目前股票的每股收益为16元，市场资本化率(即投资于该公司股票所要求的预期收益率)$k=16\%$，则公司目前股票的均衡定价应为

$$P_0 = \frac{16}{16\%} = 100\text{ 元}$$

现在我们来看一家增长型的公司。这家公司目前股票的每股收益也是16元。但这家公司把以后每年收益的一半用作追加的新投资，新的净投资所创造的收益率将是24%，比公司股票的市场资本化率高出8个百分点。也就是说，公司目前第一年的红利不是16元，而是$D_1=8$元，另外8元用于新的投资扩大生产能力。

前面已经说明，在公司红利稳定增长的情况，公司收益的增长率和红利的增长率相同。这一增长率可以分解成两个部分

$$g = \frac{\Delta E}{E} = \frac{NI}{E} \times \frac{\Delta E}{NI}$$

其中第一部分$\frac{NI}{E}$是保留收益的比例(保留收益用于新增投资)，第二部分$\frac{\Delta E}{NI}$就是新增投资的预期收益率。这样，这家增长型公司的收益增长率(亦即红利增长率)就是

$$g = 50\% \times 24\% = 12\%$$

我们用红利稳定增长模型为这家公司目前的股票定价，就有

$$P_0 = \frac{8}{16\% - 12\%} = 200\text{ 元}$$

因此，尽管这家公司当年分派的红利少，但是因为它有新的投资机会，未来的红利会增长，所以现在股票的价值(均衡价格)要比维持型公司的股票价值高。高出的100元就是未来新增投资所创造的净现值。

一定要看清楚的是，股票价值提高的原因在于新增投资的预期收益率(24%)高于公司股票的市场资本化率(16%)，这是创造价值的真正源泉！为了说明起见，我们来看第三家企业，把它称作非增长型公司。它一样把自己收益的一半用作新的投资，但新投资的预期收益率和原来股票的市场资本化率一样，只是16%，我们用红利稳定增长模型来估值。这时公司的收益增长率(即红利增长率)为

$$g = 50\% \times 16\% = 8\%$$

而股票的均衡定价就应是

$$P_0 = \frac{8}{16\% - 8\%} = 100\text{ 元}$$

股票的价值并不因为新增投资而增加。

非常值得再比较一下维持型公司和非增长型公司二者在股票价格、预期收益、预期红利(率)及其变化的情况。只看 3 年的话，见表 8.3。

表 8.3

维持型公司 年份	年初股价(元)	预期收益(元)	预期红利(元)	预期红利率	预期股价增长率
1	100	16	16	16%	0
2	100	16	16	16%	0
3	100	16	16	16%	0
非增长型公司 年份	**年初股价(元)**	**预期收益(元)**	**预期红利(元)**	**预期红利率**	**预期股价增长率**
1	100	16	8	8%	8%
2	108	17.28	8.64	8%	8%
3	116.64	18.66	9.33	8%	8%

尽管非增长型公司的股票价格、预期收益、预期红利都以 8%的增长率逐年递增，但股票(目前)的价值和维持型公司的相比并没有增加。事实上，这两家公司的股票价格都是

$$P_0 = \frac{E_1}{k} = \frac{16}{16\%} = 100\text{ 元}$$

与前面的定价公式

$$P_0 = \frac{E_1}{k} + \text{未来增长机会的净现值}$$

相比，一定有

未来增长机会的净现值＝0

因为非增长型公司新增投资的预期收益率和资本成本(对该公司股票的市场资本化率)相等，即折现率就是内部收益率，当然净现值为 0。

这一结果说明，企业只有从事净现值大于 0 的投资项目，才能真正为股东创造财富。亦即是说，只有预期收益率大于公司股票本身的市场资本化率的投资项目，才是真正的投资机会。否则，不如把赚到的红利直接分给股东。必须清醒地认识到

> **盲目地扩大企业的规模并不能真正带来效益。**

例如，如果新投资的预期收益率只有 12%的话，$g=50\%\times12\%=6\%$，股票的价值还会下降，降到

$$P_0 = \frac{8}{16\% - 6\%} = 80\text{ 元}$$

而只有每股股票的价值，才真正代表了股东的财富。因此，这种扩大规模的投资，是违反财务管理的基本目标的。

下面我们简单地讨论一下怎样利用市盈率（P/E 值）来评价股票。

市盈率是每股股票的价格对每股收益的比值，股市上经常用这个指标来评价股票的优劣。由前面所述的股票定价公式

$$P_0 = \frac{E_1}{k} + \text{未来增长机会的净现值}$$

知，股票的市盈率大有两种可能性：市场的资本化率 k 小或者未来增长机会的净现值大。后者意味着公司有很好的投资机会。因为未来投资的回报率高出股票本身的市场资本化率而使股票具有较高的市盈率，此类股票称为增长型股票。

证券市场上的股评家们往往说，某支股票的市盈率高，意味着这种股票的收益会增长。由上面的分析可以知道，这一说法是不科学的。我们前面的例子中的非增长型公司的股票收益是逐年增长的，但它未来增长机会的净现值为零。甚至我们最后提到的那家新投资的预期收益率只有12%的公司，它的收益还照样有每年6%的增长率。而它未来增长机会的净现值为负，其市盈率与同类公司相比肯定是比较低的。

2. 或有要求权估值：债券和股票

和折现现金流的估值方法不一样，或有要求权的估值方法利用的是与所要估值的对象资产有关的其他资产的价格及其波动性的知识。这一方法可以用来为普通的债券和股票估值，也可用来为可转换债券等各种或有要求权估值。这一节我们讨论普通债券和股票的估值。

先从简单的情况入手。假定一家公司的总资产市值是1亿元

$$V = E + D = 100\,000\,000 \text{ 元}$$

其中 E 是股票的市值，D 是公司发行的债券的市值。假定公司的负债是折现型的债券，1年后到期，面值是 60 000 000 元（共发行 60 000 份债券，每份面值 1 000 元）。首先假设公司的债券是无违约风险的，而当时市场的无风险利率是 $r_f=4\%$。此时负债的市值为

$$D = 60\,000\,000/(1+4\%) = 57\,692\,307 \text{ 元}$$

全部股票的市值就应当为

$$E = V - D = 100\,000\,000 - 57\,692\,307 = 42\,307\,692 \text{ 元}$$

如果全部股票的市值不等于 42 692 307 元的话，就会出现套利机会，论证方法同第一章所述相同。

实际上，企业的负债不是无风险的。设1年以后公司的总资产市值为 V_1，如果到时候 V_1 大于需要偿还的负债面值 60 000 000 元的话，剩余部分的价值归股东所有（股东权益是剩余索偿权），即股东将得到 $V_1-60\,000\,000$ 元。但是，若公司发生重大亏损，到时候 V_1 小于需要偿还的负债面值 60 000 000 元，则全部 V_1 将归债权人所有，股东权益的价值变成0。公司债券和股票的市值与到时候企业的价值之间的关系见图 8.1。

从图 8.1 可以发现，在公司负债是折现型债券的情况，到期末债券和股票市值的损益状态分别与卖权空头和买权多头相似。对于公司股东来说，公司发行负债的结果使他们无

偿地获得一个以到期负债总额 X 为预定价的买权 $c(V_t,X,T-t)$(因为从图中可以看出期权费为 0)。到期如果企业的总资产价值低于须偿还的负债额时,因为有限债务责任,股东可以放弃企业。而债权人在购买公司发行的负债时,相当于出售给公司股东一个预定价和期权费都等于负债总额的卖权 $p(V_t,X,T-t)$(这里为了简单起见,都表示成欧式期权的形态)。正因为这种原因,公司负债和股东权益的估值和定价可以像期权一样用或有要求权的估值方法来处理。布莱克和舒尔斯在他们发表的第一篇关于期权定价的论文中,就指明了这一点。另外要指出,这两个图合并起来,正好是会计/财务恒等式

企业价值(资产)=负债+权益

这个关系必须在任何时候始终保持成立,于是得到平价关系

$$V_t = -p(V_t,X,T-t) + c(V_t,X,T-t)$$

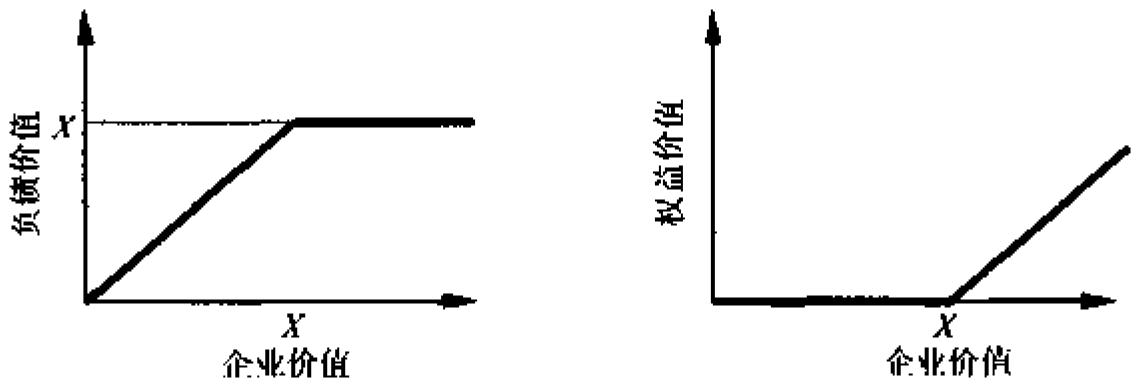


图 8.1

假定 1 年后公司的市值可能出现二种不同的情况,而债券和股票的总市值也相应地出现二种不同的情况,如图 8.2 的二叉树所示。

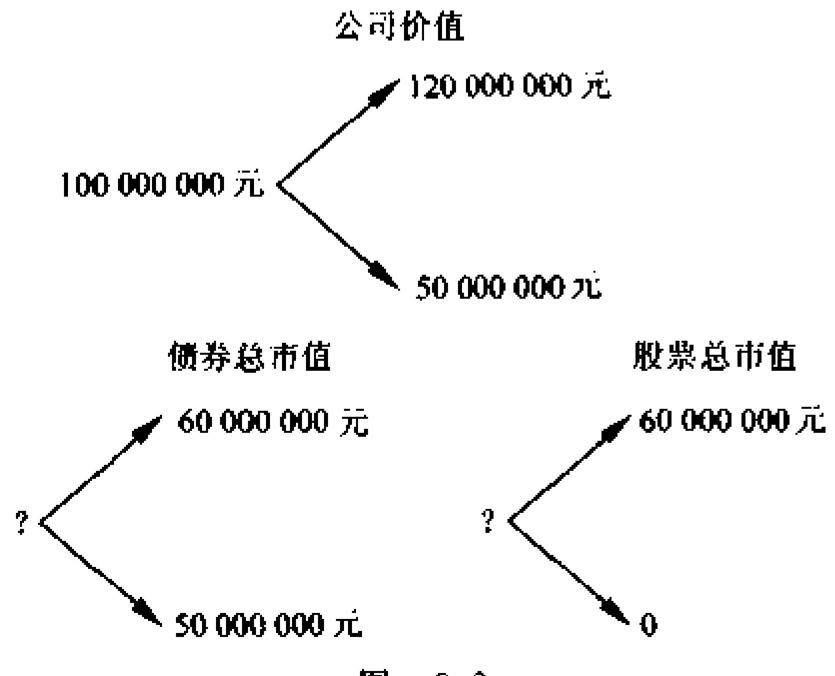


图 8.2

现在我们用一定比例的公司资产和无风险证券来复制公司的股票。读者可能会奇怪,一定比例的公司资产就意味着一定比例的公司的债券和同样比例的公司的股票,这样的复制不就是股票自己复制自己吗?因为股票的价值只代表了公司价值的一部分,读者看下去就会明白,这样复制是可以成立的。

我们用比例为 x 的公司资产和现值为 Y 的无风险证券来复制公司的股票。因为无风

险利率是 $r_f=4\%$，所以有

$$\begin{cases}120\,000\,000x + 1.04Y = 60\,000\,000 \\ 50\,000\,000x + 1.04Y = 0\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}x = 6/7 \\ Y = -41\,208\,791\text{ 元}\end{cases}$$

这里 Y 是负值意味着卖空无风险证券。于是，由无套利原理知，现在股票的市值应当是 $E=100\,000\,000x+Y=100\,000\,000\times\frac{6}{7}-41\,208\,791=44\,505\,495$ 元。债券目前的市值就应当是 $D=V-E=100\,000\,000-44\,505\,495=55\,494\,505$ 元。未清偿债券的数目是60 000份，因此目前每份债券的市场均衡价格应当是 55 494 505/60 000＝924.91 元。债券的到期收益率(YTM)应当这样计算

$$\frac{1\,000}{1+YTM}=924.91$$

于是，$YTM=\frac{1\,000-924.91}{924.91}=8.12\%$。其中有 4.12 个百分点是公司债券的违约风险补偿。

照样可以用公司资产和无风险证券复制公司债券来无套利定价，得到的结果是一样的。

在我们用无套利均衡分析方法来为股票和债券定价时，先决条件是必须知道它们的期末价值。在这里，是要知道公司总资产到期末的价值。这种无套利定价技术可以称之为*条件无套利定价技术*。

上面我们在采用这种技术来为股票和债券定价时，可以发现，我们只要定出了股票的市值，就马上可以定出债券的市值，反过来也一样。如果我们现在知道了股票的市场均衡价格，又有上面关于用公司资产和无风险证券复制股票的知识，我们就可以估计出债券的市值。这说明，我们实际上并不一定需要知道公司资产现在的价值，而只要知道股票或者债券二者之一的市值，就可定出另一者的市值。下面我们举例说明。

如前述的公司，我们已经知道，6/7 的公司资产的多头和 41 208 791 元无风险证券的空头可以复制公司股票目前的市值。如果不知道目前公司的总资产价值，但知道目前股票在市场上的均衡价格是 52 元/股，公司未清偿的股票数是 1 000 000 股。这样，目前股票的总市值为 52 元/股×1 000 000 股＝52 000 000 元。因为有

$$E=V\times\frac{6}{7}-41\,208\,791=52\,000\,000\text{ 元}$$

所以有

$$V=\frac{7}{6}\times(52\,000\,000+41\,208\,791)=108\,743\,589.50\text{ 元}$$

债券的现值就为

$$D=V-E=108\,743\,589.50-52\,000\,000=56\,743\,589.50\text{ 元}$$

债券的数目是 60 000 份，每份债券的价格是 56 743 589.50/60 000＝945.73 元。照样

可以算出债券的到期收益率是 $YTM=\frac{1\,000-945.73}{945.73}=5.74\%$，风险补偿是 1.74%。

反过来，如果我们知道的是公司债券的到期收益率，比如说是 $YTM=7\%$，我们照样可以用或有要求权的估值法来定出股票的均衡价格。债券的价格应当是 $\frac{1\,000}{1+7\%}=934.58$ 元。债券的数目是 60 000 份，因此可计算得到债券的总市值 $60\,000\times934.58=56\,074\,766$ 元。如果我们用公司资产和无风险证券来复制公司债券，无套利分析的结果是可用 1/7 公司资产的多头加上 41 208 791 元无风险证券的多头来复制公司债券目前的市值。于是有

$$D = V \times \frac{1}{7} + 41\,208\,791 = 56\,074\,766 \text{ 元}$$

所以有

$$V = 7 \times (56\,074\,766 - 41\,208\,791) = 104\,061\,827.50 \text{ 元}$$

股票的市值就应为

$$E = V - D = 104\,061\,827.50 - 56\,074\,766 = 47\,987\,061.50 \text{ 元}$$

未清偿的股票一共是 1 000 000 股，所以每股均衡价格是 47.99 元。

3. 动态复制技术

前面所述假定公司在 1 年后只可能发生两种不同的情况，这当然是远不符合实际的。我们已经在第六章讲解过二叉树模型确实能够正确地描述金融工具的价格变化规律，而二叉树定价用的是动态复制技术。二叉树的动态复制技术可以用来为期权定价，当然也就可以用来对其他的或有要求权定价。我们还用上述公司的股票和债券的估值和定价为例加以说明。

我们把图 8.2 的二叉树分细，变成二阶段的，每阶段的时间是半年(见图 8.3)。

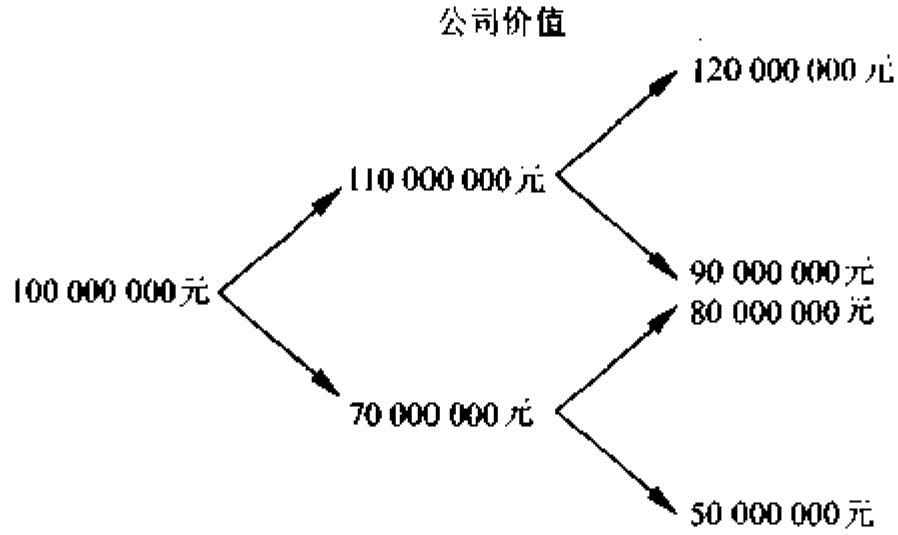


图 8.3

同前面一样，公司发行了面值为 60 000 000 元的折现型债券。为了简单起见，我们假定每半年的无风险利率是 2%。这样。相对于 1 年后出现的 4 种不同的情况，公司股票的价值分别为 60 000 000 元、30 000 000 元、20 000 000 元和 0 元。为了给股票现在的市值定价，就可以采用像期权的二叉树定价一样的动态复制技术。我们用公司的总资产和无风险证券来动态复制股票，当然也是采用自融资简单交易策略。先来看第 2 阶段上部的二叉

树。用比例为 x^u 的公司资产和半年后价值为 Y^u 的无风险证券来复制公司的股票，相对于股票在两种不同状态的价值，得到方程组

$$\begin{cases}120\,000\,000x^u + 1.02Y^u = 60\,000\,000 \\ 90\,000\,000x^u + 1.02Y^u = 30\,000\,000\end{cases}$$

解出，得到

$$\begin{cases}x^u = 1 \\ Y^u = -58\,823\,529.41\end{cases}$$

因此，若半年后股市走牛（出现二叉树上分叉状态），股票的总市值应该是 $E^u = 110\,000\,000\times 1-58\,823\,529.41=51\,176\,470.59$ 元。同样的方法，若半年后股市走熊（出现二叉树下分叉状态），可算得股票的总市值为 $E^d=13\,986\,928.10$ 元。

下面再倒算第一阶段（前半年）的二叉树，即照样用公司总资产和无风险证券来复制下面的二叉树（见图 8.4）。

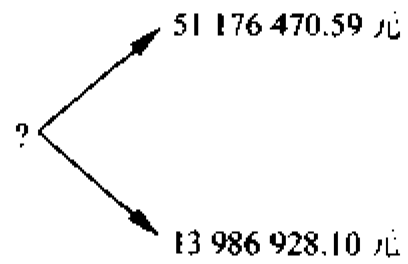


图 8.4

用比例为 x 的公司资产和现值为 Y 的无风险证券来复制公司的股票，有

$$\begin{cases}110\,000\,000x + 1.02Y = 51\,176\,470.59 \\ 70\,000\,000x + 1.02Y = 13\,986\,928.10\end{cases}$$

解出，得到

$$\begin{cases}x = 0.9297 \\ Y = -50\,092\,912.99\end{cases}$$

从而可以算出，目前公司股票的总市值（无套利均衡值）应当是 $E=100\,000\,000\times 0.9297-50\,092\,912.99=42\,880\,943.24$ 元。如果总共的股票数是 1 000 000 股，则每股的均衡定价应当是 42.88 元。目前公司债券的总市值就是 $D=100\,000\,000-42\,880\,943.24=57\,119\,056.77$ 元。如果未清偿的债券数是 60 000 份，则每份债券目前的市场均衡价为 951.98 元。如果债券每年计息 2 次，到期收益率是 $YTM=4.98\%$，风险补偿为 0.98%。

当然也可以用动态复制的办法先定出公司债券的总市值，再定股票的无套利均衡价。

把二叉树继续拆细，期末公司的总资产价值可能出现的情况就变成用高阶的二项分布来描述。适当地选择二项分布的参数，就可以比较准确地描述实际的情况。我们可以这样来解释其原因：在第六章，我们曾经指出，适当地选择二项分布的参数，无限细分的二叉树模型确实可以用来描述股票价格的运动方式。如果公司的资本结构是全股本的，当然二叉树模型也就可以用来描述公司资产价值的变化规律。对于资本结构中含有有风险负债的情况（如这里例子所述），我们在本书开头第一章就介绍过 MM 关于企业价值与资本结构无关的理论。后人（包括默顿（R. Merton）、夏普（W. Sharpe）和斯蒂格里茨（J. Stiglitz）等）不断地发展和完善 MM 理论，突破了 MM 条件中许多苛刻的限制。因此，

采用无限细分的二叉树模型来描述公司价值的运动变化在很大程度上也是适用的。采用动态复制的或有要求权估值方法来为股票和债券(尤其是对有违约风险的情况)定价,是有实际意义的。

4. 公司的融资决策

我们采用或有要求权估值方法来为金融工具定价,从中还可以进一步加深对公司的金融/财务决策(这是公司财务管理的核心)的理解。

公司的股东和债权人的利益并不是完全一致的,存在着内在的利益冲突。公司的管理人员代表的是公司所有者(股东)的利益,管理层可以通过金融/财务决策来影响股东权益的市场价值。这一点从或有要求权估值的角度可以解释得比较清楚。

前面我们已经指出,公司的债权人的债权可以看作一种卖权的空头而股东的权益可以看作一种买权的多头。因此管理层可以通过不同的金融/财务决策来发挥影响:

1) 投资决策　公司投资项目的不确定性越大,股东权益(买权多头)的价值越大,债权(卖权空头)的价值就越小。

2) 分红决策　分红越多,公司的抗风险能力就越小,债务违约的可能性也就越大。

3) 融资决策　公司可以通过增发新的负债(与原有的负债的偿债等级相同或更优先)来增加股东权益的价值。

关于第3)点(融资决策),不是一眼看得出的,需要做一些解释。

公司发行的负债可以有不同的偿债等级。公司必须先履行对具有优先等级的债务的义务,然后再履行对优先等级较低的债务的义务,在付息时是这样,在清偿本金时更是如此。优先等级较低的债务被称为次等债务(subordinated debt),但次等债务的索偿优先顺序依然是要排在股票(包括优先股和普通股)前面的。

假如目前处于时刻 t,公司在发行新债前的价值(即资产价值)是 V_t,公司原来就有到期面值为1 000万元的零息票债务(折现型),这笔债务目前的市场价值计为 $D_1(V_t,t)$。在发新债前公司股本权益的价值记为 $E(V_t,t)$。因此有

$$V_t = D_1(V_t,t) + E(V_t,t)$$

现在公司新增发到期面值为1 000万元的零息票债务,新债务目前的市场价值记为 $D_2(V_t,t)$。公司在增发新债后,权益资本在总资本中的比重下降(加大了财务杠杆),因而公司债务的违约风险加大,会造成老债务市场价值的下降。从图8.5所描绘的发新债前后表示老债务的卖权空头的损益状态图也不难发现,发新债后,从或有要求权的角度看老债务的价值确实是降低了。发新债后,老债务的市场价值记为 $D_1^*(V_t,t)$,有 $D_1(V_t,t) - D_1^*(V_t,t) > 0$。老债务损失的市场价值到哪儿去了呢?

新债务是根据其实际市场价值来发行的。因此,在资产负债表左侧,公司资产的增值就等于新债务的市场价值,即公司在发行新债后的价值变成

$$V_t^* = V_t + D_2(V_t,t) = (D_1(V_t,t) + E(V_t,t)) + D_2(V_t,t)$$

但是在资产负债表的右侧,老债务的市场价值已不再是 $D_1(V_t,t)$,变成了 $D_1^*(V_t,t)$,权益的市场价值也就不应该仍然是 $E(V_t,t)$,而应成为 $E^*(V_t,t)$,所以有

$$V_t^* = D_1^*(V_t,t) + D_2(V_t,t) + E^*(V_t,t)$$

因此有

$$D_1(V_t,t) - D_1^*(V_t,t) = E^*(V_t,t) - E(V_t,t)$$

即老债务损失的市场价值就是通过增发新债权益所增加的价值。

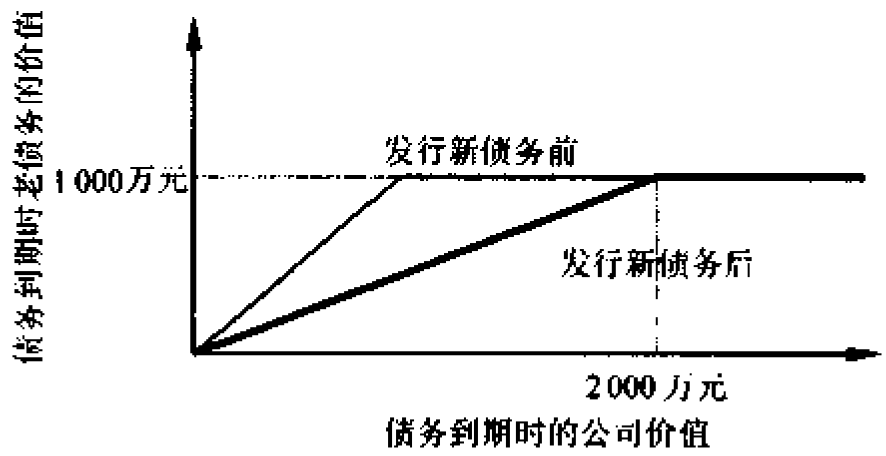


图 8.5

因为增发相同(或更高)优先等级的新债务会损害老债权人的利益,所以公司在签署借款合约(银行贷款或发行债券)时,债权人方面往往要求加上限制增发新债的条款。

下面我们进一步讨论不同优先等级债务的价值关系。

假定一家公司共发行了三种不同优先等级的有价证券:

1) 零息票优等债券,面值为 X_1;

2) 零息票次等债券,面值为 X_2;

3) 普通股股票。两种债券的到期日相同,到期时三种证券的损益状态图如图 8.6。

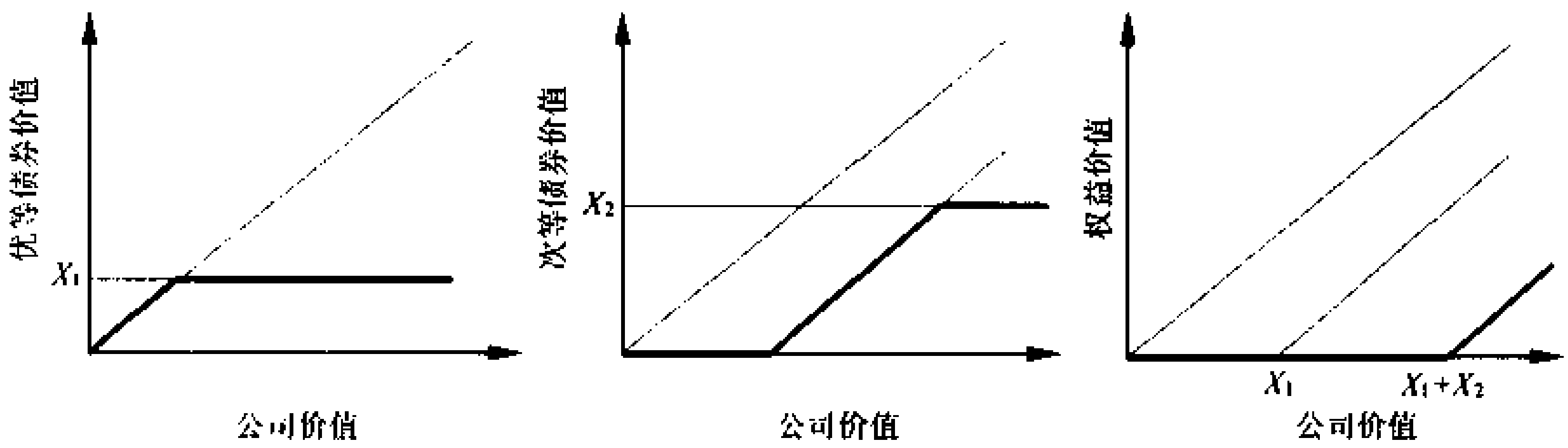


图 8.6

从或有要求权估值的角度看,优等债券并不因为发行次等债券而影响其价值,如 $c(V_T,X)$ 表示到期时预定价为 X 的买权的价值,则

$$\text{优等债券的总市值} = V_T - c(V_T,X_1)$$

权益仍然可以看作一个买权,但预定价成为 X_1+X_2,

$$\text{权益的总市值} = c(V_T,X_1+X_2)$$

次等债券则成为一个类似"垂直牛市价差套购"的期权组合,其总市值为

$$\text{次等债券的总市值} = c(V_T,X_1) - c(V_T,X_1+X_2)$$

这是两个到期日相同,预定价分别为 X_1 和 X_1+X_2 的买权的多头和空头的组合,其中多

头期权的期权费为零。关于期权组合，我们以后还会再讨论。

下面我们用或有要求权估值的方法来讨论各种带有可转换特性的融资工具的估值和定价问题。这些融资工具所含有的或有要求权性质，有时被称为嵌入期权（embedded options）。

5. 认股权证

认股权证相当于股票的买权。所不同的是，股票买权的标的物是本来就存在的股票，而认股权证是在执行时，公司才把股票创造出来，如果不执行，公司就不创造出这些新的股票来。因此，当认股权证被执行时，公司的权益被稀释，而公司的价值因为新发股票而增加。

为了对认股权证估值和定价，先规定一些符号：

n——原有的股份数目；

m——因为执行认股权证而新创造的股票数目；

$\alpha=\dfrac{m}{m+n}$是如果执行认股权证，新创造的股份数占总股份数的比例；

S_t——股票当前的价格；

W_t——认股权证在时刻 t 的总市值；

$X=xm$——认股权证执行价的和，其中 x 是每份认股权证的执行价；

V_t——目前公司的总（资产）价值，V_T 则是到期日 T 的公司价值。为了分析的简单起见，假定公司没有负债，[①]所以 $V_t=nS_t+W_t$。请注意，认股权证虽然只是一种或有负债，但其市场价值是不能不计在内的。

显然，如果认股权证全部被执行的话，新的股票按照预定价被创造出来，此时公司的总价值变成 V_T+X，而新股票的价值将是 $\alpha(V_T+X)$。因此，到到期日认股权证的总市值应当为

$$\begin{aligned} W_T &= \max[0, \alpha(V_T + X) - X] \\ &= \max[0, \alpha V_T - (1-\alpha)X] \\ &= \alpha\max\left[0, V_T - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)X\right] \end{aligned}$$

所以，认股权证的或有要求权可以解释为：

1）1 份买权，其标的物是比例为 α 的公司总价值部分，预定价是 $(1-\alpha)X$，可以表示为 $W_t=c(\alpha V_t, (1-\alpha)X, T-t, \sigma_V)$。

2）α 份买权，其标的物是公司总价值，预定价为 $\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)X$，可以表示为 $W_t=\alpha c\left(V_t, \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)X, T-t, \sigma_V\right)$。

对于认股权证的估值和定价来说，我们已经知道了 $n, m, X, T-t$ 这几个变量，S_t 和 σ_S 是可以通过统计方法测算的，但要计算 W_t，还需要知道 V_t 和 σ_V。一般说来，如果除了普

① 公司资本结构中有负债的情况可以作类似的分析。

通股股票外，公司还发行了其他有价证券的话，则 $\sigma_V \neq \sigma_S$。

我们先假定企业价值的波动率 σ_V 是已知的。如果已经有了买权 $c\left(V_t,\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)X,T-t,\sigma_V\right)$ 的定价公式（如采用布莱克-舒尔斯公式），因为有

$$V_t = nS_t + W_t = nS_t + \alpha c\left(V_t,\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)X,T-t,\sigma_V\right)$$

可以用数值解法解出 V_t，然后再求出 W_t。

如果 σ_V 未知，就要先想办法把它求出来。因为股票价值的波动率 σ_S 是可以用统计的方法测算的，应设法从 σ_S 导出 σ_V。股票价值的波动率 σ_S 对企业价值的波动率 σ_V 的比值应当正好等于公司权益价值变化对企业（公司）价值变化的弹性 $\Omega_{S/V}$（即 1 个百分点的企业价值的变化会产生多少百分点的股票价值的变化），即有

$$\frac{\sigma_S}{\sigma_V} = \Omega_{S/V}$$

但另一方面，按照定义，有

$$\Omega_{S/V} = \frac{\partial E/E}{\partial V/V} = \left(\frac{V}{E}\right)\frac{\partial E}{\partial V}$$

由前面的公式知

$$E_t = nS_t = V_t - W_t = V_t - \alpha c\left(V_t,\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)X,T-t,\sigma_V\right)$$

所以由布莱克-舒尔斯期权定价公式知

$$\frac{\partial E}{\partial V} = 1 - \alpha\frac{\partial c}{\partial V} = 1 - \alpha N(d_1)$$

其中

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{\alpha V}{(1-\alpha)Xe^{-r_f(T-t)}}\right)}{\sigma_V\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma_V\sqrt{T-t}}{2}$$

由此可以求出

$$\Omega_{S/V} = \frac{V_t}{nS_t}[1-\alpha N(d_1)]$$

进而求出

$$\sigma_V = \frac{\sigma_S nS_t}{V_t[1-\alpha N(d_1)]}$$

这个式子代入前面 V_t 的表达式，就能用数值解法求出 V_t 的值，然后就能计算认股权证的价值 W_t。

6. 可赎回债券

在实际中，绝大部分的公司债都具有可赎回特性。这就意味着债权人（债券持有人）实际上"签发"了一个买权给债务人（发行债券的公司），债务人有权执行这个买权按照预定的价格（赎回价）赎回所发行的债券。

这个或有要求权（嵌入期权）是有价值的，它的价值反映在债券的市场价格中。

可赎回债券通常有一个"赎回保护期",发行债券的公司(债务人)只有在过了赎回保护期之后才能执行赎回权。

公司的管理层在什么样的条件下才会执行赎回权呢?

如果债券的市场价值低于赎回价,公司显然不会执行赎回权。而一旦债券的市场价格达到或高于赎回价,公司就立即会执行赎回权。

那么,在什么样的市场条件下,债券的市场价格会达到甚至高于赎回价呢?

赎回权这样一个或有要求权的价值与市场利率的期限结构的变动情况有关,也和发行债券的公司的资信情况的变化有关。因此,赎回权的估值和定价是比较复杂的,建议读者在研读完本章和下一章后再回过头来考虑这一问题。

7. 可转换债券

可转换债券赋予债券持有者这样一种权利,在债券到期时,或者可以得到本金的偿还,或者可以按预定的转换比将债券换成股票。在实际的市场操作中,转换权利的执行是在某个转换期内(不一定是到到期日)。我们在这里作简化的分析,假定转换权只有债券到期才能执行,而债券也先仍然看作是折现型的。因而,其中的嵌入期权是欧式的。而且,先考虑债券是不可赎回的。

现在假设,上述例子中公司发行的 60 000 份债券都是可转换债券,转换率是 1 份债券换 18 股股票。我们先来确定,到期末(1 年后)公司的总资产价值多大时,债券持有者愿意执行转换权。

60 000 份债券全部转换为股票的话,共转为 60 000 份×18 股/份=1 080 000 股股票,加上原来的 1 000 000 股,将有 2 080 000 股股票。只有每 18 股股票的价值高于 1 份债券的面值(1 000 元),亦即 1 080 000 股股票的市值高于 60 000 份债券的市值(此时每份债券的市值等于它的面值)时,才会发生转换。因此债券转换时公司的总资产价值必须满足以下要求:$\frac{1\,080\,000}{2\,080\,000}\times V \geqslant 60\,000\,000$ 元,即 $V \geqslant 115\,555\,556$ 元。反之,如果到期公司的总资产价值大于 115 555 556 元,所有的可转换债券都会转换成股票。

1 年后公司总资产价值如图 8.2 所示,我们用或有要求权的估值法来为可转换债券定价。

显然,到期若公司资产价值上升至 120 000 000 元,则所有的债券都会转换为股票,60 000份债券的市值就是转换为 1 200 000 股股票的市值。此时债券的总市值为$\frac{1\,080\,000}{2\,080\,000}\times 120\,000\,000 = 62\,307\,692$ 元。到期若公司资产价值下跌至 50 000 000 元,则公司已经资不抵债,债权人(债券持有者)接收全部公司资产,债券的总市值就是 50 000 000 元。现在用比例为 x 的公司资产和现值为 Y 的无风险证券(无风险利率是 4%)来复制可转换债券,有

$$\begin{cases}120\,000\,000x + 1.04Y = 62\,307\,692\\ 50\,000\,000x + 1.04Y = 50\,000\,000\end{cases}$$

由此解出

$$\begin{cases}x = 0.1758\\ Y = 39\,623\,838 \text{ 元}\end{cases}$$

由无套利原理可定出债券的现值为

$$D = 0.1758 \times 100\,000\,000 + 39\,623\,838 = 57\,203\,837 \text{ 元}$$

因此每份可转换债券的市场均衡价格为 57 203 837/60 000=953.40 元。到期收益率是 $YTM=\frac{1\,000-953.40}{953.40}=4.89\%$。

稍加分析就可知道，可转换债券的均衡定价和预先指定的转换率有直接的关系。转换率高，可转换债券的均衡价格就高(到期收益率就低)，否则反之。

实际的市场情况当然要复杂得多(例如债券不是折现型的，股票是分红的，等等)，传统方法对可转换债券的定价是依赖于统计和市场经验的。而我们这里采用或有要求权的估值方法，是为了帮助读者认识可转换债券所含有的或有要求权性质。

下面我们来做进一步的讨论。因为在实际中，公司(资产)价值的变化不会像图 8.2 那样简单，因而我们可以用布莱克-舒尔斯期权定价公式来为可转换债券定价。先定义以下的符号：

n——原有的股份数目；

m——因为债券转换而新创造的股票数目；

$\gamma=\frac{m}{m+n}$——如果债券转换，新创造的股份数占总股份数的比例，在本例中，$\gamma=\frac{1\,080\,000}{2\,080\,000}$；

S_t——股票当前(时刻 t)的价格；

B_t——可转换债券在时刻 t 的总市值；

X——可转换债券的面值总和，在本例中，$X=60\,000\,000$ 元；

V_t——目前公司的总(资产)价值；

V_T——到期日 T 的公司价值。

到债券到期日，可能出现三种情况：

1) $V_T \leqslant X$，此时公司破产，$B_T=V_T$，$nS_T=0$。

2) $X<V_T\leqslant X/\gamma$，此时债券不转换，$B_T=X$，而 $nS_T=V_T-X$。

3) $X/\gamma<V_T$，债券全部转换为股票，$B_T=\gamma V_T$，而 $nS_T=V_T-\gamma V_T$。

分别以上三种情况，把权益分拆成两个部分，如表 8.4 所示。

表 8.4

两部分权益的价值	$V_T\leqslant X$	$X<V_T\leqslant X/\gamma$	$X/\gamma<V_T$
第一部分	0	V_T-X	V_T-X
第二部分	0	0	$-\gamma(V_T-X/\gamma)$

根据到期的损益状况，第一部分可以看作是一个以企业价值为标的物，以 X 为预定价的买权的多头，第二部分则是 γ 份以企业价值为标的物，以 X/γ 为预定价的买权的空头。因此有

$$nS_t = c(V_t, X, T-t) - \gamma c(V_t, X/\gamma, T-t)$$

于是可转换债券的价值是

$$B_t = V_t - nS_t$$

$$=(V_t - c(V_t, X, T-t)) + \gamma c(V_t, X/\gamma, T-t)$$
$$=-p(V_t, X, T-t) + \gamma c(V_t, X/\gamma, T-t)$$

最后式子的两部分分别表示债券本身的价值(作为卖权的空头,请回过头参阅前面的讲解)和可转换特性的价值。采用布莱克-舒尔斯期权定价公式,就可以像前面介绍认股权证定价的方法一样,用数值解法为可转换债券定价。

如果转换权可以提前执行(这时嵌入期权变成美式的),情况如何呢?

若在到期日前,股票不分红,那么可以断言提前转换是不明智的。原因在于:如果提前执行,债券的价值变成 γV_t,到到期日,价值就是 γV_T。如果不提前执行,到到期日,债券的价值变成

$$V_T - \max(V_T - X, 0) + \gamma\max(V_T - X/\gamma, 0) = \min(X, V_T) + \max(\gamma V_T - X, 0)$$

因为 $\gamma<1$,所以最后这个式子一定大于 γV_T。

如果股票在期间分红和/或债券是带息票的,则情况比较复杂,需要作具体的分析。因为具体情况是千变万化的,所以我们不再详细讲解定价过程,只简略地指出以下几点:

1) 如果在债券到期日前股票不分红,则不会提前执行转换权。原因如上面所述的一样,更何况还会损失掉部分息票利息。

2) 如果在债券到期之前有大额红利派分,则提前执行转换权可能是有利的。如果保留转换权的价值不足以抵补可以派分的红利的话,就应该提前执行。

3) 债券如果是带息票的,息票利息的存在将降低债券持有者执行转换权的积极性。因为如果不执行转换权,债权人可以得到全部息票利息;如果转换了,息票利息将留在公司里,而原来的债权人只占有其中的 γ 部分。

4) 如果在支付息票利息前派发红利,而红利的数额小于息票利息的话,则债权人不会为了红利提前执行转换权。

8. 可赎回的可转换债券

这种债券和普通的可赎回债券的不同之处在于:当债务人要执行赎回权利时,债权人有权把债券转换为股票而继续持有它们。这样,债券持有者在做是否转换的决策时,是在获得数额等于赎回价格的现金还是转换后获得股票之间做出选择。

继续沿用上节的记号,如果

$$\gamma V_T > m \times \text{赎回价}$$

则债券持有者会决定转换。

公司的管理层代表的是股东的利益,在公司资产价值不变时,管理层要致力于尽量压低负债的市场价值,也就增加了权益的价值。那么,公司是否会在债券到期之前执行赎回权呢?

如果公司的资产升值,以至于 $\gamma V_T > m \times$ 赎回价,但若即将发放的红利的数额小于即将支付的债券息票利息的话,即使转换权作为期权处于实值状态(这意味着 $\gamma V_T >$ 债券的本金和利息的现值),债券持有者也会不愿意转换——他们愿意一方面拿到息票利息的现金,另一方面又继续保留转换权,即继续持有转换权的价值。在这种情况下,公司应当立即执行赎回权来强迫债券转换,甚至转换价格的总和大于债券本息的现值也会这样做。因为这样做公司可以节省息票利息的现金,同时剥夺了债券持有人不转换的选择权。或有要求

权(期权)是一种选择权，而选择权包括执行和不执行两个方面，这两个方面都是有价值的。强制转换的做法压低了债券的价值，就一定使公司原来的股东获利。

公司在什么时候应当立即执行赎回权呢？总的来说，一旦出现 $\gamma V_T > m\times$(赎回价)，公司就应立即执行赎回权。所以，从理论上来说，在 $\gamma V_T = m\times$ 赎回价的瞬间公司就应该执行赎回权。但是西方金融市场的实证研究表明，大多数中型企业是在股票的转换价值高出赎回价将近一半时才执行赎回权的。这是什么原因呢？

一般的解释是，公司执行赎回权要支付一大笔现金，从而降低公司资产结构的流动性。而债券被强制转换导致股票权益稀释，从而股价下跌(这一点实证研究的结果与理论非常吻合)。为了避免对市场产生误导，公司在决定是否执行赎回权时会非常谨慎，尽可能不轻举妄动。

那么，如果 $\gamma V_T < m\times$ 赎回价，是否公司一定不执行赎回权呢？不一定。如果当时市场利率变得很低，从而赎回价远低于债券本息的现值，公司就会在债券到期之前执行赎回权。把债券买回去后，同时又以更为优惠的利率条件重新融资。这一点对于普通的不可转换的可赎回债券来说也是如此。

下面我们用二叉树模型对带有息票(和分派红利)的可赎回的可转换债券定价，采用以下的例子。

公司的总资产价值是 200 000 000 元，有 150 000 股不分红股票，100 000 份可赎回的可转换债券，息票利率是 10%，面值为 1 000 元，转换价是 1 100 元，期限为 2 年，转换比为 1(1 份债券换 1 股股票)，市场的无风险利率为 8%。二叉树模型的有关参数如下：

$$\bar{r} = 1 + r_f = 1.08,\ u = 1.5,\ d = 0.5$$

$$p = \frac{\bar{r} - d}{u - d} = 0.58,\ \gamma = \frac{m}{m+n} = \frac{100\,000}{100\,000 + 150\,000} = 0.4$$

公司价值的变化过程由图 8.7 所示的二阶段二叉树描述(单位：百万元)。

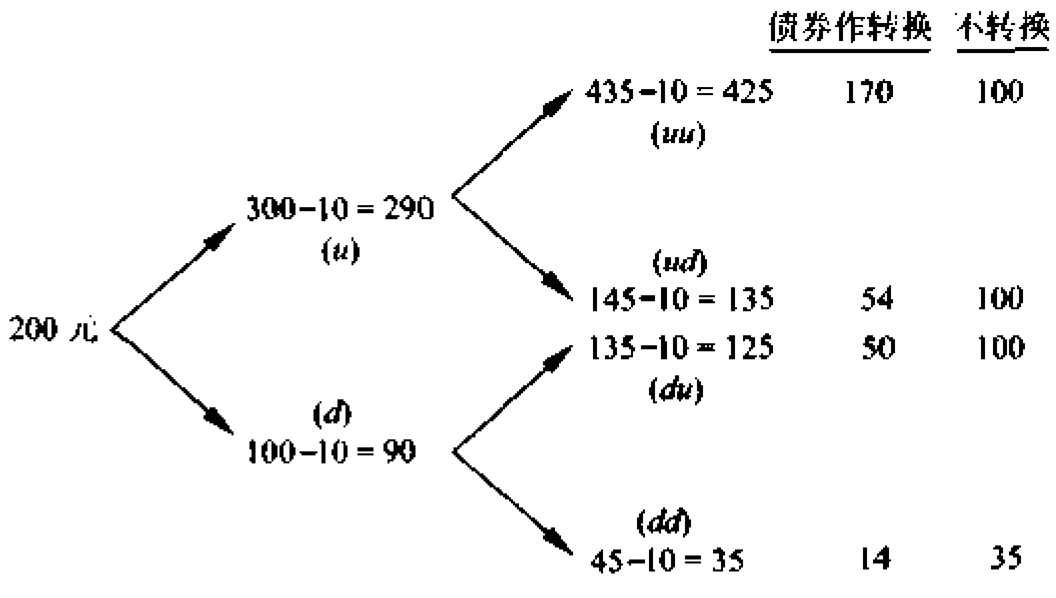


图 8.7

在第一阶段二叉树上方节点(该节点可记为 u)处，如果债券提前转换，债券持有者获得的价值是 $\gamma V_u = 0.4\times 290\,000\,000 = 116\,000\,000$ 元。如果暂时不转换，到第二阶段末再作决定。那么，债券到期时(第二阶段末)，如果出现市场上升的情况(节点 uu)，转换将获得价值 170 000 000 元，不转换只有 100 000 000 元，显然转换有利。如果出现市场下跌的情况(节点 ud)，转换得到的价值只有 54 000 000 元，不转换可以保持 100 000 000 元的价

值，显然以不转换为好。因此，如果在节点 u 处不提前转换，则由二叉树定价的方法知债券的价值应为

$$D_u=\frac{0.58\times 170\ 000\ 000+0.42\times 100\ 000\ 000}{1.08}+\frac{10\ 000\ 000}{1.08}=139\ 444\ 444\text{ 元}$$

和提前转换(获得价值 116 000 000 元)相比，显然不提前转换比较有利。

那么，在此节点 u 处，公司是否应当提前执行赎回权呢?如果此时公司执行赎回权，会不会迫使债券转换呢? 如果公司此时执行赎回权，债券不转换而被赎回，债券持有者得到赎回价格的总和 110 000 000 元。如果转换，得到的股票的总市值是 116 000 000 元，显然会选择转换。

如果公司不在此时提前执行赎回权，本来债券的总价值是 139 444 444 元。所以，公司提前执行赎回权迫使债券转换的话，债券持有者损失的总价值是 139 444 444－116 000 000＝23 444 444 元。这实际上就是债权人被迫放弃的不转换选择权利的市场价值。这笔价值被转移到原来的股东手里(因为资产总价值不变)。

因此，在这个节点 u 处，公司的最优策略是提前执行赎回权迫使债券转换。

现在来看第一阶段末下方的节点 d。采用同样的分析方法，如果债券在节点 d 不提前转换，债券的市场价值是

$$D_d=\frac{0.58\times 100\ 000\ 000+0.42\times 35\ 000\ 000}{1.08}+\frac{10\ 000\ 000}{1.08}=76\ 574\ 074\text{ 元}$$

提前转换得到的股票价值则是 $\gamma V_d=0.4\times 90\ 000\ 000=36\ 000\ 000$ 元。显然，债券持有者将采取不提前转换的策略。

那么，公司在此时是否应当提前执行赎回权呢?赎回价格的总和是 110 000 000 元，公司此时的总价值只有 90 000 000 元，并且赎回价的总和大于债券的市场价值，所以公司显然不能采取提前执行赎回权的做法。

现在再倒推到起始节点来为债券定价，有

$$D=\frac{0.58\times 116\ 000\ 000+0.42\times 76\ 574\ 074}{1.08}+\frac{10\ 000\ 000}{1.08}=101\ 334\ 362\text{ 元}$$

而如果此时提前转换的话，得到的股票总价值是

$$\gamma V=0.4\times 200\ 000\ 000=80\ 000\ 000\text{ 元}$$

显然，债券持有者将不愿意提前转换。因为债券的价值低于赎回价的总和，公司也不会采取提前执行赎回权的策略。这种可赎回的可转换债券的市场均衡定价就应该是

$$\frac{101\ 334\ 362\text{ 元}}{100\ 000\text{ 份}}=1\ 013.34\text{ 元/份}$$

以上模型中债券带有息票利息，如果公司股票在期间派发已知数额的红利，则模型稍作变换就可以了。

9. 公司的投资决策

在经典的公司财务管理教科书中，传统的折现现金流估值方法(净现值(NPV)法)不仅用于公司的融资决策和公司证券定价，更在公司资本预算(即长期投资决策)中占主导地位。但是近年来的研究表明，这一传统方法的缺陷已经越来越明显。或有要求权估值法

不但在公司证券定价方面有重要的作用，而且在投资决策方面更有巨大的生命力。这方面的研究，已经形成了实物期权理论。

首先我们复习一下在公司资本预算中，传统的净现值法是如何支持投资决策的。

对于一个投资项目，先要做出它的预算现金流量表，选择正确的折现率（资本成本）对现金流进行折现计算，求得净现值 NPV。如果 $NPV \geqslant 0$，项目可行；如果 $NPV < 0$，则项目不可行。这就是净现值法的基本原理。与其他传统的资本预算技术（如回收期法、内部收益率法等）相比较，净现值法有很多优点。几乎所有的财务管理教科书中，对净现值法的优点及其与其他传统方法之间优劣的比较，都有详细的论述，这里不再重复。

但在实际中，净现值法有很大的局限性。局限性主要表现在以下两个净现值法的蕴涵假设中：

1）投资决策是一次性完成的，这意味着投资机会一出现，必须现在就做出决策，以后机会就没有了。

2）投资项目是完全可逆的（fully reversible），这意味着放弃投资项目不花费任何成本。

在实际的投资决策过程中，这两项假设经常是不成立的。关于第 1）点，企业的管理层不仅有权决定是否投资于一个新项目，而且往往有权决定何时开展这个新项目。至于第 2）点，开始一个新项目往往涉及一大笔沉没成本（sunk cost），放弃项目时，这笔成本很难全部收回。

这样的局限性对于实际的投资决策来说是本质性的，因此，在近期的公司财务管理理论发展中，净现值法遭受到很多批评。将或有要求权的估值方法应用于投资决策，引起了愈来愈多的注意。实物期权理论就是或有要求权估值在企业管理决策中的应用，所以又被称为*管理期权*（managerial options）。

10. 实物期权

实物期权对于增强管理决策的灵活性具有重要的意义，其实际意义并不局限于投资决策，在产品定价、市场营销、原材料与零配件供货、售后服务、工资与福利政策等企业经营管理的各个环节，都存在着应用前景。甚至对于宏观经济政策的研究，都有应用的可能性。我们在本书中，只对投资决策的应用进行讨论，有兴趣的读者，可以进一步参阅有关的文献资料。

下面我们以一个例子来说明。

假设一家公司要对是否投资建设一个生产灯具的工厂做出决策。投资决策可以在任何时间做出，但一旦做了决定，就不能再更改，即不能收回投资建设的费用。建厂的投资费用总共是 1 600 万元。建成投产后，每年可以生产 100 万架灯具，每架的生产成本是 1 元，目前灯具的市场价格是 3 元/架。1 年后，市场上灯具的价格将会发生一次重大的调整：要么上升到 4 元/架，要么下跌到 2 元/架，概率各为 1/2。为了分析简单起见，假定价格一旦调整以后就不再发生变化。由资本成本核算得到的灯具工厂的折现率为 10%。问题在于公司是否应当现在就做出投资决策？

公司现在手中好比有一个预定价为 1 600 万元的买权，用于购买灯具工厂未来创造

的收入现金流。这是一个美式期权，因为随时可以执行。期权的有效期限可以认为是无限长。

用期权的语言来解释净现值法的涵义，就是只要期权一处于实值状态，就立即予以执行。但这样做显然是不明智的。比方说，现在计算下来的净现值为 $NPV=1$ 元，立即执行期权的结果是放弃了继续等待的选择权利，而这一继续等待的权利的市场价值远高于 1 元。

如果现在就要做出投资决策，用净现值法进行评估，平均价格是每架灯具 3 元，因此净现值的计算如下（单位：万元）：

$$NPV=-1\,600+\frac{(3-1)\times 100}{1+10\%}+\frac{(3-1)\times 100}{(1+10\%)^2}+\frac{(3-1)\times 100}{(1+10\%)^3}+\cdots$$

$$=-1\,600+\frac{200}{0.10}=400\text{ 万元}$$

如果推迟 1 年再做投资决策，1 年后可能出现两种情况：

1）价格上升到 4 元/架，用净现值法评估，有

$$NPV_{up}=-1\,600+\frac{(4-1)\times 100}{1+10\%}+\frac{(4-1)\times 100}{(1+10\%)^2}+\frac{(4-1)\times 100}{(1+10\%)^3}+\cdots$$

$$=-1\,600+\frac{300}{0.10}=1\,400\text{ 万元}$$

2）价格下跌到 2 元/架，用净现值法评估，有

$$NPV_{down}=-1\,600+\frac{(2-1)\times 100}{1+10\%}+\frac{(2-1)\times 100}{(1+10\%)^2}+\frac{(2-1)\times 100}{(1+10\%)^3}+\cdots$$

$$=-1\,600+\frac{100}{0.10}=-600\text{ 万元}$$

在第 1）种情况，因为 $NPV=1\,400$ 万元 >0，将会接收这个项目，进行投资；在第 2）种情况，因为 $NPV=-600$ 万元 <0，将会拒绝这个项目，不进行投资。不进行投资的话，净现值当然变成 0 而不是 -600 万元。

因此，如果延迟 1 年再作投资决策的话，用净现值法来评估，就应该是把 1 年后的平均净现值再折现到现在，于是有

$$NPV=\frac{0.5\times 1\,400+0.5\times 0}{1+10\%}=636.36\text{ 万元}$$

与不延期决策的净现值 $NPV=400$ 万元相比，延期决策显然有利。这两个净现值的差 $636.36-400=236.36$ 万元，就是延期决策这个实物期权的价值。

从上例可以看到，这里实际上是一个现在即时决策和延期决策之间的利益权衡。如果延期决策，企业保留了暂时不执行的权利，亦即保留了实物期权的价值，在以后获取了新的信息后可能做出更好的决策。但是这样做的同时，牺牲了第一年可以获得的收益。仍然看上面的例子，可以设想，如果在产品的市场价格下跌之前项目的收入就足以抵补所有的成本，而一旦市场情况不好，企业可以以很低的成本（理论上无成本）结束这一项目，那么，

延期决策显然不是一个好的策略。

在这里，采用或有要求权(实物期权)估值的决策方法与通常的决策树分析是有区别的。因此，实物期权理论对于不确定性环境下决策科学的发展，也将有重要的贡献。

11. 实物期权与金融期权的比较

由前面的讨论可知，实物期权和期限非常长的支付红利的美式金融期权非常相像。我们用表 8.5 做比较。

由表 8.5 的比较，至少可以直观地想象到，我们在第五章所讨论的关于分红股票的美式期权的提前执行的一些规律，对于实物期权也应当是适用的。对于投资决策的实物期权来说，对于不可逆(irreversible)的投资项目，至少可以归纳出以下一般规律：

1) 并非项目折现现金流的净现值 $NPV \geqslant 0$ 就投资；

2) 只有在净现值 NPV 足够大，大到等于或大于投资决策的实物期权的价值时才投资；

3) 项目未来的不确定性越大，而经过延迟获得新的信息后能够消除的不确定性越大，延迟决策就越有利。

表 8.5 投资决策实物期权与美式金融买权的比较

	美式金融买权	投资决策实物期权
标的物	股票	投资项目的价值
预定价	X	投资成本(1 600 万元)
不确定性	股票的价格	项目的价值
延迟决策的好处	保留不执行期权的权利 延迟支付执行价 X	保留不投资的权利 延迟支付投资成本
延迟决策的坏处	损失红利	损失延迟期的生产
执行期权实现的价值	$S_t - X$	NPV
保留期权掌握的价值	C_t	实物期权的价值

一般公司在投资决策实践中，采用阈值利率(hurdle rate)的做法，即选定一个高于资本成本的阈值利率作为折现率计算项目的折现现金流，然后再用净现值法进行评估。有研究表明，国际水平的企业选取的阈值利率平均是 17%。

采用阈值利率的做法说明企业在投资实践中意识到了传统的净现值法存在的问题，因而只有在净现值"足够大"时才决定投资。但这个阈值利率是凭经验来确定的。

与这样的经验做法相比较，实物期权有相当的优点。首先，实物期权可以比较准确地估算延期决策的价值，比单凭经验估计阈值利率更为科学。其次，如果项目未来的不确定性很大，而通过延期决策，从获取的新信息中可以消除掉很大部分不确定性，那么，实物期权的价值就会比较大，也就需要定出较高的阈值利率。所以从道理上讲，阈值利率应该因项目的不同而不同，简单地采用同一个阈值利率是不够科学的。

12. 小结

本章讨论了或有要求权估值，展示了期权定价理论(动态复制技术)的广泛应用。首先对原生金融工具(股票和债券)估值的折现现金流估值和或有要求权估值这两种不同的估值方法进行了比较，进而将或有要求权估值的应用扩展到各种带转换特性的融资工具的估值与定价和投资决策(实物期权)上，说明无套利均衡分析方法在金融市场运作和企业财务管理决策方面的重要作用。

通过对传统的折现现金流分析和或有要求权估值的比较，一方面帮助读者进一步认识折现现金流分析作为基本的金融/财务分析技术的功用，理解企业价值的创造源泉；另一方面又揭示了这种传统技术的局限性。而或有要求权估值所显示的巨大应用潜力，会帮助读者加深对无套利均衡分析方法这一金融学的基本方法论的理解。

或有要求权估值方法的应用，可以扩展到经济生活的方方面面。凡是涉及带有未来不确定性的决策问题，这种方法就都可能发挥作用。而实物期权理论所揭示的延迟决策以保留期权价值的思想方法，其涵义是非常深刻的，将大大提高决策的灵活性。例如，对于一些目前正在亏损的项目，是否要立即予以放弃或中止(在采掘工业中有大量的例子)；对于重大的购买活动(例如买房子)，是否必须马上决定，等等；如果采取延迟决策而保留选择的权利，在问题的前景变得更为明朗以后再作决定，将会取得好得多的效果。利用实物期权的思想，研究宏观经济调控的问题，可能也是一种有前途的研究思路。当然，也不能教条式地采用这样的思想方法，有时竞争的压力要求当机立断(我们最近的理论研究结果显示，当出现竞争时，实物期权的价值会降低)，有时等待的实物期权的价值实际上很小，延迟决策就不是一个好的策略。但无论如何，深入地掌握或有要求权估值方法并加以灵活有效的应用，对于真正理解现代金融学的核心思想是非常重要的。

练习题

1. 某公司的负债全部为折现型债券，共有 80 万份，每份面值为 100 元，现价 72 元，一年后到期。与公司债券期限相同的折现型国债每份面值 100 元，现价 90 元。一年之后，如果经济环境有利，公司资产总市值预计可达 1.2 亿元；如果经济环境不利，公司资产总市值预计仅为 4 800 万元。

1) 公司当前总资产的市场价值是多少？

2) 如果公司的股票共有 100 万股，则每股的市场价格应该是多少？

3) 如果当前公司股票的市价为 15 元/股，是否存在套利机会？如果存在，如何进行套利？

2. 某公司总资产市场价值为 200 000 000 元，有 200 000 股股票，100 000 份可赎回的可转换债券，息票利率为 8%，面值 1 000 元，赎回价格 1 100 元。期限 2 年，转换比为 1，无风险利率为 5%。公司预计在第一年末每股派发红利为 7 元，第二年末每股红利为 8 元，可转换债券的付息日即为股票的除红日。公司对未来的预测采用二叉树模型，有关参数如下：

$\bar{r}=1+r_f=1.05$；

$u=1.4$；

$d=0.6$；

$p=\frac{\bar{r}-d}{u-d}=0.5625$；

$\gamma=\frac{m}{m+n}=\frac{100\,000}{100\,000+200\,000}=\frac{1}{3}$。

分别就市场上升、下跌两种情况分析公司在第一年是否应行使赎回权，并为这种可转换债券定价。

第八章数学附录

固定收入折现现金流的估值关系

带息票的固定利率债券是典型的固定收人折现现金流，我们就以此为例做出数学证明。债券的均衡价格的估值为

$$P_0 = P_0(r) = PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{i \times Par}{(1+r)^k} + \frac{Par}{(1+r)^n} = Par\left[\frac{i}{r} + \frac{r-i}{r(1+r)^n}\right]$$

令

$$f = f(r) = \left[\frac{i}{r} + \frac{r-i}{r(1+r)^n}\right]$$

f 对 r 取导数，有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = -\frac{i}{r^2} + \frac{i + i(n+1)r - nr^2}{r^2(1+r)^{n+1}} = \frac{i + i(n+1)r - nr^2 - i(1+r)^{n+1}}{r^2(1+r)^{n+1}}$$

令 $g=g(r)=i+i(n+1)r-nr^2-i(1+r)^{n+1}$，又有

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = i(n+1)[1-(1+r)^n] - 2nr < 0$$

所以 $g(r)$ 单调减，而 $g(0)=0$，故 $g(r)<0$。因此$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}<0$，债券市值（价格）的变化方向与市场对债券的预期收益率的变化方向相反。

第九章　市场环境、交易方式与资产定价

金融市场的组织与交易方式是各种各样的，不同的市场环境对所交易的金融商品的定价会产生不同的影响。这涉及与市场的宏观和微观结构有关的许多相当深刻的理论和实践问题。

金融市场是交易金融商品的场所。在市场的组织和交易方式上是不同的，这与所交易的金融商品的性质有关。市场的组织有集中的，如交易所的场内市场；有分散的，称为场外市场或柜台(OTC—over-the-count)市场。有有形的，也有无形的(通过电讯和计算机网络进行交易)。在交易方式上，有*盯市*(mark to market)的和非盯市的，有容许*卖空*(short sale)和不容许卖空的，有价格变动幅度限制(涨停板和跌停板)和没有价格变动幅度限制的，等等。在监管办法、税收待遇和会计处理上也有各种不同。

不同的市场环境有不同的效率，而市场效率从根本上说与市场信息的传播效率密不可分。虽然随着信息技术的发展，网络交易和电子商务在金融领域的作用越来越大，金融全球化的趋势使国际金融市场连为一体，信息传播的效率受市场组织方式的影响逐渐弱化，但因所交易的金融商品本身的性质不同和交易方式的不同，对资产定价还是会产生不同的影响。市场的*有效率性*(efficiency)是一个非常深刻的金融概念，曾经而且还继续在引导大量的研究工作，有时争论非常激烈，甚至达到白热化的程度。下面我们就先介绍*有效率市场假设*(efficient market hypothesis)的理论。

1. 有效率市场假设

从50年代计算机技术开始应用于经济学研究以来，最先就是经济数据的时间序列分析。人们很自然地想用股票价格的时间序列来预测其走势，此类努力形成了股市实践中的所谓*技术分析*(technical analysis)。技术分析力图从以往价格变化的模式中提取一般规律，根据不同的模式来分析预测以后的变化。另一类股市实践的主要分析方法称为*原本分析*(fundamental analysis)，收集各种与企业的经营管理有关的信息，尤其是收入的来源和收益变化的前景，以及有关市场乃至整个经济环境未来变化的预测信息，以此为基础对股票的价格变化做出预测。原本分析侧重于比较长期的预测，技术分析则比较着眼于短期的状况，二者经常是混合使用的。大量媒体(报纸、电视、广播等)报道的股市分析都是基于技术分析和(或)原本分析的。

在金融市场中，投机行为和套利行为不是一回事。套利是抓住(包括人为制造)市场暂时性失衡的机会套取无风险利润，投机则是依靠预测来牟取风险利润。从理论上讲，套利是不承受风险的，投机则是通过承受风险获取风险报偿。投机的成功与否取决于像技术分析和原本分析之类的预测技术是否正确。如果此类预测技术在实际上并没有科学依据的

话，那么投机就纯粹只是碰运气。从下面的分析我们可以发现，这一点同样是和市场的效率紧密联系在一起的。

技术分析和原本分析究竟有没有科学依据，是金融研究领域激烈争论的问题。有一点是肯定的，如果金融市场是有效率的(即有效率市场假设成立)，技术分析和原本分析就都是站不住脚的，即技术分析和原本分析都是建立在市场失去效率(至少是暂时性失去效率)的基础之上的。于是就要解答两个问题：第一，这样说的理由是什么？第二，市场是否始终是有效率的(即有效率市场假设是否始终成立)？

有效率市场假设是现代经济学中理性预期理论(rational expectation——又称合理预期理论)在金融学中的平行发展。理性预期理论是约翰·缪斯(John Muth)在60年代初提出的，是对原来的适应性预期理论(adaptive expectation)的改造。适应性预期理论认为人们对未来的预期完全依赖于过去的经验。因为经验的积累是一个缓慢的过程，所以人们对未来的预期的变化也是缓慢的。理性预期理论则认为人们对未来的预期不仅依赖于过去的经验，而且与所有可以收集到的信息有关，即人们对未来的预期和人们依据一切可以收集到的信息所做出的最优预测相同。因为理性预期包括了对未来发展变化的一切可能信息，因此要比单凭过去的经验做出的预期更为理性(即更为合理)。

理性预期理论在经济学上的深刻意义在于以下两个方面：第一，如果经济变量的运动方式发生变化，则对这一变量的预期方式也将发生变化。例如，如果利率的运动方式总是在未来趋向于“正常”的水平而目前的利率偏高，则通常的预期理论都认为利率将要下跌；但是，如果利率的运动方式发生了变化，例如利率一旦升高就会居高不下，那么，最优预测及其导出的理性预期都会指出未来的利率不会下降。在理性预期理论中，对经济变量的预期是随着经济变量本身的运动方式的变化而变化的。第二，理性预期是无偏估计，即理性预期的预测误差的均值为零，而预测误差本身是无法事先估算的。因为从逻辑上讲，如果误差项可以预先估算，那么一定存在支持这种预测的信息，由理性预期的涵义知，一定可以把这些信息吸收到预期中，从而消除掉预先估算到的误差，剩下的误差项又变成不可预测的了。因此，误差项的统计特性一定是均值为零的正态分布，不存在任何信息来支持对误差项的预测。这实际上是最优预测的特性。

理性预期的思想在有效率市场假设中的体现是：

金融市场如果是有效率的，市场预期就是基于所有可能信息的最优预测。

下面我们来看，基于这样的市场预期，市场的价格是怎样形成的？

首先，市场分析人员收集所有与股票有关的信息，包括过去股票价格变动的轨迹，发行股票公司的经营业绩和所有可能影响经营业绩的因素。然后，分析人员在目前时点(时间 $t=0$)根据所有收集到的信息，对未来时点(时间 $t=1$)的股票价格做出最优预测 $\overline{P}(1)$。为了简单起见，我们假定在期间[0,1]股票不分红。于是如果目前的股票价格记为 $P(0)$，则预期收益率就是

$$\bar{r}=\frac{\overline{P}(1)}{P(0)}-1$$

但是，能够收集到的信息总是不完整的，会有偏差，也存在难以预见的情况。因此，必须分析可能出现的预测偏差，即未来实际发生的价格 $P(1)$ 对最优估计 $\overline{P}(1)$ 可能出现的偏离，这一偏离当然可以用随机变量 $P(1)$ 的方差或标准差来度量。由前面关于理性预期理论涵义的第二点知，最优估计 $\overline{P}(1)$ 就应当是随机变量 $P(1)$ 的数学期望值(概率平均值)。这样，当然也就可以算得收益率的估计偏差(方差或标准差)。

显然，所采集的信息越完整、越准确，未来实际发生的情况与最优估计之间的偏差就越小，投资决策的风险也就越小。

在以上预测和分析的基础上所做出的投资决策取决于几个方面：一是收益/风险的权衡比较。预期收益率 $\bar{r}$ 越高，就越愿意投资；风险越大(即未来实际发生的情况与最优估计之间的偏差越大)，就越不愿意投资。二是掌握的资金的多少。掌握的资金越多，就越愿意投资；否则反之。三是所投资的资产的流动性。流动性越大(即越容易低成本地转变成现金)，就越愿意投资，否则反之。这实际上就是资产需求理论。

现在我们来看当前市场的股票价格是如何确定的?

在发达的金融市场中，已经发展出大量的互相竞争的投资中介机构(包括商业银行、共同基金、保险公司等)。这些投资中介机构高薪聘请专家，收集市场信息，并采用各种技术进行分析。他们收集信息的能力是有差异的，分析信息并据以做出对未来价格的预期，其准确性也是有差异的。因为市场是高度竞争的，那些收集信息越完整，做出判断越准确的中介机构就能吸收越多的资金，其投资行为对市场价格形成的影响就越大。所以，市场形成的均衡价格所包含的信息和对未来的预期(金融市场的定价机制依赖于对未来的预期)的准确性就远高于所有市场参与者预测估计的平均水平。

这样，在金融市场中，由于投资中介机构的高度竞争化，市场就具备了高效率的“公允”价格的发现功能和形成机制。所谓“公允”价格就是能在金融/财务意义上正确反映资产价值的市场均衡价格。而这样的价格，也一定就是在所有可能获得的信息的基础上做出的最优预测价格。有效率市场假设就是理性预期理论在金融学中的平行发展。

因此，如果有效率市场假设成立，市场形成的均衡价格本身就已经包含了所有可能的信息，那么，再依据在市场上可以公开获得的信息来预测价格的走势(如技术分析和原本分析所做的)，在逻辑上就不能成立。这样就回答了本节开始时提出的第一个问题。

有效率市场假设有弱式、半强式和强式三种形式，简述如下：

1) *弱式*(weak form)　价格中包含过去价格记录中的全部信息。

2) *半强式*(semi-strong form)　价格中不但包含了过去价格的信息，而且包含了全部其他有关的公开信息。

3) *强式*(strong form)　价格中不但包含了全部有关的价格信息，而且包含所有专家对企业和经济进行的分析所提供的信息。

有效率市场假设蕴涵着如下金融市场的特性：

1) *市场的无记忆性*　只要当前价格中已经包含了全部过去价格的信息，则过去的记忆对未来的价格预测是毫无帮助的，价格的变动是纯粹的随机游走，因此否定了技术分析(以及原本分析)。

2) *市场价格可信赖*　证券价格具有很高的供需弹性，微小的价格变动立即引发套利

产生供需关系的变化，而且马上形成新的均衡，从而不可能持续地获取超过市场平均水平的收益，收益的大小只取决于所承担的风险的大小。各种财务假象(如因为送配股或改变会计方法使收益看上去发生变化)从长远看都是无效的。市场越有效率，财务包装的作用就越小。

3) 证券组合多样化分散风险　非系统风险可以通过投资组合的分散化来消除，从而市场指数能够很好地描述市场的总体行为，利率的期限结构也能很好地反映市场对未来的估计。

对于有效率市场假设已经进行过大量的经验研究。以往的研究结果显示，虽然有实例证明强式的金融市场的有效率性假设不成立，但对于发达国家的金融市场来说，弱式有效率性假设经常是可以成立的。对于中国新兴的资本市场(如上海和深圳的股市)，我们自己的研究结果表明，自 1992 年股价放开后，弱式有效率性假设已经基本成立，但还未达到半强式有效率性。因此，即使对于中国股市来说，技术分析的科学性是值得怀疑的。这和中国证监会的统计是相吻合的。但是，因为中国股市还未达到半强式有效率性，所以正确的原本分析(包括一些基本面的分析)还是可能正确的。中国的金融市场的效率问题，对于我国的金融学研究人员来说，仍然是一个有吸引力的课题。

那么，对本节开始时提出的第二个问题又如何回答呢?

至少可以肯定的是，对于任何一个金融市场，有效率市场假设都不能始终成立。必须承认市场在一定程度上是无效率的，也就是说，至少市场会偶然地失效。而且，正是这种市场的暂时性失效为在市场进行套利和成功的投机提供获取效益的机会。格罗斯曼(S. Grossman)和斯蒂格里茨(J. Stiglitz)在 1980 年发表的著名论文中对此做出了精辟的分析，揭示了有效率市场假设在逻辑基础中的内在矛盾：市场的有效率性是依靠市场的套利和投机活动来建立的，而套利和投机活动都是有成本的；如果市场每时每刻都是有效率的，则不会存在套利机会，投机活动也将是无利可图的，套利和投机活动就会停止，而市场也就不能保持效率。

这一点对市场交易的实践和金融工程的发展来说意义重大。事实上，交易商、经纪人和咨询机构在其市场实践中从来不愿意接受有效率市场这一基本的金融理论。在金融领域中这一理论和实践的背反一方面固然造成金融市场中大量套利和投机活动失败的悲剧(源于盲目的自信、对金融理论的无知和过于夸大市场失效的机会)，但另一方面，也说明了人们在商务实践中是确实感受到市场的暂时性失效。通过金融工程的创新去发掘甚至制造市场失效的机会，利用各种精妙设计和开发的技术和工具抓住市场失效的机会牟取超额收益，是推动金融工程发展的重要的市场激励因素。金融工程的创新活动，支持了利用市场失效的机会进行套利和投机，在这个过程中，同时也就消除了这种市场失效的机会。因此，金融工程所创造的新的套利和投机技术，又成为提高市场效率的推动力。举例来说，当股票指数期货刚刚引入时，市场上存在大量而且频繁的期货/现货间的套利机会。但在金融工程活动建立起复杂而精致的数学关系式，并据此开发出计算机程序软件应用于交易实践后，现货指数和指数期货价格间的偏离就因套利而逐渐消除。过去，理论的公允价和实际价之间的偏差曾达到 200 个基本点(即 2%)，现在采取程序化交易进行套利活动能够捕捉的价格偏差机会很少能超过 10 个基本点。又如，利率互换在以前赚取 150

个基本点是很容易的，而现在要赚 10 个基本点也很困难。

可以得出的结论是：随着金融市场的发展演化，市场的效率会越来越高，这一发展过程，很可能是无止境的。金融工程的发展，则是市场发展其效率的技术源泉。而市场的有效率性，从根本上讲，是同市场信息披露和传播以及对信息做出反应的效率紧密地联系在一起的。

2. 盯市与非盯市：期货与远期

盯市(mark to market)是按照市场价格的变动随时结算盈亏（在实践中多是每日结算制）的交易方式，盈亏的结算通过在清算服务机构缴存的保证金（又称垫头—margin）余额的增减来实现。保证金通常具有杠杆放大作用，即所要求持有的保证金余额只是所交易的金融商品合约价值的一个相对小的比例。对于有些类型的金融商品（尤其是衍生品，如期货、期权等），这个比例很小。如期货交易的保证金水平通常只需所交易的期货合约价值的 3%～10%（甚至更低）。这样，如果保证金要求是 5%，缴纳 10 万元保证金就可持有和交易价值 200 万元的期货合约。

期货(futures)是典型的采用盯市方式交易的金融商品。盯市方式通常是对标准化的金融商品（如标准化的期货、期权合约）进行集中交易的方式，在交易所等集中市场交易。

在交易所的一个营业日内，期货的价格会发生变化，有时还会变化得很频繁。清算机构掌握交易各方缴存的保证金，在每日交易所收盘后，按照当日的结算价格进行每日结算，轧出价差。每日的结算价是清算机构用来确定各方当日盈亏，是否需要追缴保证金的依据，并作为下一营业日开盘价的参考（理论上开盘价是每个营业日第一笔成交的价格）。结算价的核计办法各交易所有所不同。有的以当日的收盘价为准，如果在收盘时仍有几种喊价则取最后一段时间（如 10 秒钟）内几种报价的平均数；有的则以该种期货当日成交价的加权平均作为结算价。如果当日的结算价与上一个营业日相比，价格呈现有利变化，则轧出正差额，贷记入交易者的保证金账户。交易者可以提走这一笔赢利，也可以作为保证金的增大额，从而可以按比例增大交易头寸。如果结算价向不利方向变动，则轧出负差额，借记入交易者的保证金账户，意味着保证金数额的减少，必须相应地减小交易头寸。如果不追加保证金，缺少保证金支持的那部分交易头寸将被交易所强行平仓。价格变动的方向对多头方有利就一定对空头方不利，或者反之。

这种盯市交易方式使价格变动而造成的盈亏立即（如每日结算就是当天）实现，保证金制度则大大地降低了交易的违约风险。这样的交易方式使每位市场参与者实际上以清算机构为对手进行交易，而清算机构以竞价机制撮合多空双方（买方和卖方）配对成交，因此清算机构本身持有的多空头寸始终处于轧平状态，盈亏直接通过缴存的保证金结算，违约风险就降低至很低的水平。但是另一方面，因为保证金要求的比例低，有很大的杠杆放大作用，从而使参与交易者承受很大的价格风险。

表 9.1 是《华尔街日报》报道的芝加哥交易所的商品（谷物和油料）期货价格情况。第 1 栏是小麦期货的行情。每手合同是 5 000 蒲式耳（蒲式耳是容量单位，1 蒲式耳谷物约合 36 千克），以每蒲式耳小麦的美分数报价。左起第 1 列是期货的交割月份，从第 2 至第 5 列分别是当天的开盘价、最高价、最低价和结算价。第 6 列是当天的结算价和前一天的结

算价之间的变化。第 7 和第 8 列是该期货品种上市以来达到过的最高价位和最低价位。最后一列是市场上的总持仓量。

因为即期交易的盈亏也是立即实现的，所以所有的即期交易都可以看作是“盯市”交易。“盯市”的概念也已引入会计学。会计上如果对资产项(主要指金融资产)的市场价值变动随时调整记录，则成为“盯市会计”。

表 9-1

FUTURES PRICES

Monday, June 28, 1999

Open Interest Reflects Previous Trading Day

GRAINS AND OILSEEDS

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
CORN (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.								
July	213½	214	210¾	211	– 3¼	312	210¾	55,125
Sept	215	216½	214	214¼	– 1½	280	214	84,466
Dec	221¾	225	220¾	222¾	– ¾	291½	220¾	149,061
Mr00	231¼	234¼	230½	232¼	– 1	270	230½	25,142
May	238	239½	237	237½	– ¾	261	[illegible]	2,447
July	241	243¾	241	242	– ¼	278½	240¾	5,484
Dec	247	249	246¾	247½	– ¼	279½	246¾	4,105
Est vol 100,000; vol Fr 71,488; open int 326,233, +3,315.								
OATS (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.								
July	112½	114½	112½	114	+ ½	139	105	2,436
Sept	112¾	114¾	112¾	113¾	+ ¾	140	109	3,635
Dec	116¼	118½	116	118	+ 1½	145	113½	6,365
Mr00	121½	122½	121¼	122½	+ 1½	135	119	354
Est vol 3,500; vol Fr 1,058; open int 12,825, –89.								
SOYBEANS (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.								
July	448½	452	445	445¾	– 4¾	720	445	29,067
Aug	448	453¼	446	447½	– 3¾	618¼	446	31,857
Sept	448	454¼	448	449	– 3½	616½	448	13,507
Nov	455	461½	452¾	455½	– 3½	680	452¾	73,749
Ja00	467¼	470½	464	465½	– 3½	632	464	6,317
Mar	476	478½	472	472¾	– 4½	598	472	1,548
May	484½	486	481½	481½	– 3¾	554	481½	1,783
July	492	493	487½	487½	– 5	647	487½	1,897
Nov	500	502	496	496½	– 4¾	631	496	1,850
Est vol 65,000; vol Fr 43,264; open int 160,814, +1,127.								
SOYBEAN MEAL (CBT) 100 tons; $ per ton.								
July	132.60	135.00	132.60	134.80	+ .60	188.00	126.00	18,267
Aug	131.80	133.00	131.20	132.70	+ .30	178.90	127.70	24,408
Sept	130.50	133.50	130.50	132.20	+ .70	183.50	129.30	15,328
Oct	131.00	133.70	130.90	132.10	+ .70	171.50	130.70	9,437
Dec	133.00	136.70	133.00	135.30	+ .80	173.50	132.30	28,948
Ja00	136.50	137.60	136.20	136.40	+ .60	164.00	131.30	4,775
Mar	138.50	140.30	138.50	139.40	+ .80	152.00	138.00	1,080
Est vol 20,000; vol Fr 35,303; open int 105,397, +11.								

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Oct	18.42	18.44	18.30	18.33	– 0.11	20.14	12.34	40,426
Nov	18.30	18.30	18.25	18.25	– 0.11	19.90	12.48	32,577
Dec	18.22	18.24	18.10	18.17	– 0.11	20.75	12.55	67,414
Ja00	18.15	18.15	18.10	18.09	– 0.10	19.43	12.76	28,390
Feb	18.05	18.10	18.05	18.01	– 0.10	20.16	12.90	15,832
Mar	17.98	17.98	17.95	17.94	– 0.10	20.10	12.97	22,092
Apr	17.87	17.87	17.87	17.87	– 0.10	19.36	13.03	6,142
May	....	....	....	17.80	– 0.10	19.14	13.45	4,191
June	17.80	17.82	17.75	17.73	– 0.10	20.10	13.26	21,907
July	....	....	....	17.66	– 0.10	17.80	13.70	6,048
Aug	....	....	....	17.59	– 0.10	17.47	13.78	2,720
Sept	....	....	....	17.55	– 0.10	17.70	14.40	4,801
Oct	....	....	....	17.53	– 0.10	17.55	14.22	3,244
Nov	....	....	....	17.51	– 0.10	17.68	15.40	1,807
Dec	17.50	17.50	17.50	17.50	– 0.10	20.75	13.85	25,182
Ja01	....	....	....	17.49	– 0.11	17.18	14.25	2,085
Feb	....	....	....	17.48	– 0.12	17.15	14.30	720
Mar	....	....	....	17.47	– 0.13	17.65	14.44	1,071
Apr	....	....	....	17.46	– 0.14	16.05	15.80	115
May	....	....	....	17.46	– 0.14	16.13	15.80	132
June	....	....	....	17.46	– 0.14	17.68	14.56	2,885
Dec	....	....	....	17.46	– 0.17	17.70	14.90	15,334
Ju02	....	....	....	17.53	– 0.19	17.64	17.44	200
Dec	....	....	....	17.61	– 0.20	21.38	15.58	4,801
Dc03	....	....	....	17.81	– 0.21	22.90	15.92	5,166
Dc04	....	....	....	18.04	– 0.21	19.27	16.35	5,166
Est vol 86,409; vol Fri 84,301; open int 571,219, +5,036.								
HEATING OIL NO. 2 (NYM) 42,000 gal.; $ per gal.								
July	.4545	.4530	.4495	.4502	– .0051	.5290	.3220	24,987
Aug	.4610	.4615	.4560	.4569	– .0055	.5120	.3320	40,253
Sept	.4675	.4680	.4640	.4649	– .0050	.5200	.3420	18,451
Oct	.4750	.4755	.4710	.4729	– .0045	.5200	.3510	9,893
Nov	.4815	.4840	.4790	.4799	– .0045	.5235	.3605	9,202
Dec	.4870	.4900	.4860	.4869	– .0045	.5275	.3680	25,304
Ja00	.4930	.4945	.4910	.4909	– .0045	.5170	.3700	16,055
Feb	.4940	.4940	.4930	.4909	– .0040	.4990	.3750	8,101
Mar	.4915	.4915	.4885	.4849	– .0040	.5060	.3760	4,651
Apr	....	....	....	.4799	– .0040	.4900	.3760	3,104
May	.4775	.4775	.4775	.4749	– .0035	.4875	.3800	3,448
June	.4735	.4735	.4735	.4724	– .0035	.4750	.3790	3,891
July	.4735	.4735	.4735	.4739	– .0035	.4735	.3890	2,107
Aug	....	....	....	.4789	– .0035	.4770	.3970	916

非盯市交易方式并不按照市场价格的变动随时实现盈亏，远期合约是典型的采用非盯市交易方式交易的金融商品。这种交易方式通常可以面向非标准化的金融商品，市场的组织方式可以是分散的，如场外柜台市场、电讯(包括电话、电传、传真等)市场，以及正在兴起的网络市场等。非盯市方式交易违约风险相对比较大，因此经常在信用比较好的交易对手之间交易。

下面我们用期货和远期为例来讨论这两种交易方式对定价的影响。

(1) 远期/期货的定价

期货与远期是基本的衍生品，其定价原理当然也是无套利。如我们在第三章和第四章所讨论的，无套利均衡的效率高于一般的供需均衡（如资本资产定价模型(CAPM)所描述的均衡），因而定价的结果也就比供需均衡分析更为准确。

先讨论远期价格。

我们在第二章讨论远期利率时，已经给出了对不分红股票作为标的物采用无套利均衡分析方法来定出远期价格的例子。远期价格为

$$F(t,T) = S(t)v_{(T-t)}^{-1}$$

其中 $v_{(T-t)}$是无风险利率的折现因子，t 是当前时刻，T 是远期合约到期时刻，$S(t)$是即期价格，$F(t,T)$是时刻 T 到期的远期合约在当前时刻 t 的价格。

若 $S(t)=100$ 元/股，无风险利率 $r_f=4\%$，$T-t=6$ 个月 $=0.5$ 年，以连续复利计息，则 $v_{T-t}^{-1}=e^{r_f(T-t)}$，而 $F(t,T)=100\times e^{0.04\times 0.5}=102.02$ 元/股。

我们在下一小节将会说明，如果无风险利率是确定的（非随机的），则远期价格和期货价格必定相等。所以，下面我们就先笼统地讲远期/期货价格。

参照第六章第 4 节的方法，可以把上述远期/期货定价公式推广应用到标的物股票带有各种特性的情况。就像我们在第六章所指出的，关键是要找出到期日 T 时价格为$\tilde{S}(T)$的标的物股票在时间 t 时的价值 $Y(t)$。

推广 1：支付固定红利的股票作为标的物的远期/期货合约的定价

如果上例中的标的物股票在 3 个月后派发红利 1 元/股，6 个月的远期/期货价格应当是多少呢？

按照第六章的做法，$Y(t)=S_{\text{risky}}(t)=S(t)-De^{-r_f(t_1-t)}$。代入远期定价公式，就有

$$\begin{aligned}F(t,T) &= Y(t)e^{r_f(T-t)} = [S(t) - De^{-r_f(t_1-t)}]e^{r_f(T-t)} \\ &= [100 - 1 \times e^{-0.04\times 0.25}] \times e^{0.04\times 0.5} = 101.01 \text{ 元 / 股}\end{aligned}$$

建议读者作为练习，自己构筑无套利组合头寸，用无套利均衡分析来检验这个结果。

以上定价隐含的假设是：无交易成本，容许卖空，可以按无风险利率无限制地借贷。因此这是理论的分析，实际的定价应把其他的因素都考虑进去。

推广 2：按固定红利率支付红利的股票作为标的物的远期/期货合约的定价

在有些情况，可以认为红利是按照一个固定的红利率（即按照股票价值的一个固定的比例）连续发放的。一个典型的例子是，股票指数可以看作是按照固定红利率支付红利的，外汇也是如此（参见第六章第 4 节的讨论）。

先看一个例子。假定一项指数现在的（现货）价格是 600 元，无风险（年）利率为 $r_f=4\%$，测算出它的连续红利率是 $\eta=3\%$，要求计算 6 月期指数期货的价格。

参照第六章的做法可知，指数期货标的物目前的价值不是 $S(t)$，而是 $Y(t)=S(t)e^{-\eta(T-t)}$。利用上述远期定价公式，就有

$$\begin{aligned}F(t,T) &= Y(t)e^{r_f(T-t)} = [S(t)e^{-\eta(T-t)}]e^{r_f(T-t)} \\ &= [100 \times e^{-0.03\times 0.5}] \times e^{0.04\times 0.5} = 603 \text{ 元}\end{aligned}$$

如果该指数期货的价格是 605 元，作为练习，建议读者设计一个套利策略。

进行指数套利的市场实践使人们认识到标的物的即期价格和期货价格之间存在紧密

互动的联系。经验研究表明，实际的市场价格发现功能往往是由期货价格来带动即期价格。

推广 3：外汇远期/期货的定价

外汇远期/期货的定价和指数远期/期货的情况非常相似，我们仍然采用第六章第 4 节的方法分析。例如，德国马克对美元的汇率在时刻 t 的汇率是 0.67 美元/德国马克，记 $r_f^{DM}=6\%$ 是德国马克的无风险利率，$r_f^{\$}=4\%$ 是美元的无风险利率。则在任何时间段 dt，1 德国马克就相当于支付 $r_f^{DM}S(t)dt$ 的美元"红利"。于是，到期日 T 时刻的 1 个德国马克，对应于时刻 t，只相当于 $\exp(-r_f^{DM}(T-t))$ 个德国马克。因此，如果要求到期日 T 时刻为 1 德国马克的远期/期货，在时刻 t 的标的资产同样不是 $S(t)=0.67$ 美元/德国马克，而应是 $e^{-r_f^{DM}(T-t)}S(t)$。

现在可以利用远期定价公式，定出外汇远期/期货的价格

$$\begin{aligned}F(t,T)&=Y(t)e^{r_f(T-t)}=[S(t)e^{-r_f^{DM}(T-t)}]e^{r_f^{\$}(T-t)}\\&=[0.67\text{ 美元 / 德国马克}\times e^{-0.06\times0.5}]\times e^{0.04\times0.5}=0.663\text{ 美元 / 德国马克}\end{aligned}$$

同样地，如果德国马克对美元的远期/期货汇率是 0.65 美元/德国马克的话，作为练习，建议读者设计一个套利策略。

推广 4：发生持有成本和具有持有便利的商品期货的定价

在实际的商品（指非金融商品）交易中会发生持有成本（如仓储成本、维护成本等），持有期货和持有即期现货相比比较划算，所以商品期货标的物目前（时刻 t）的价值就相对比较高。如果到期货交割日为止的持有成本固定为 U，则 $Y(t)=S(t)+Ue^{-r_f(T-t)}$，$Ue^{-r_f(T-t)}$是 U 的现值（U 是确定的，所以用无风险利率折现）。

如果持有成本与商品的价值成一定的比例，并且成本按这一固定的比率 u 连续发生，则应有 $Y(t)=S(t)e^{u(T-t)}$。

持有即期现货与持有期货合约相比，有时会有一定的便利之处，这就是持有便利。与发生持有成本的情况相反，具有持有便利的商品期货的标的物的现值就相对比较低。如果到期货交割日为止的持有便利为固定的值 W，则 $Y(t)=S(t)-We^{-r_f(T-t)}$；如果持有便利与商品的价值成一定的比例，并且持有便利按这一固定的比率 w 连续发生，则应有 $Y(t)=S(t)e^{-w(T-t)}$。

如果既发生持有成本又具有持有便利，则对应上述两种情况，分别应有 $Y(t)=S(t)+(U-W)e^{-r_f(T-t)}$或者 $Y(t)=S(t)e^{(u-w)(T-t)}$。

有了上述的 $Y(t)$，我们就可以用远期定价公式来为发生持有成本和（或）具有持有便利的商品期货定价。

推广 5：短期国债利率期货的定价

短期国债（国库券）是折现型债券，以此作标的物类似于以不分红股票作标的物。

先来看例子。假如现在是 8 月份，从 8 月到 12 月的 4 月期短期利率为 4%，从 8 月到明年 3 月的 7 月期短期利率为 5%，当然都是指年利率。若短期国债到明年 3 月份到期时的面值是 $FV=100$ 元，问现在购买 12 月份的 3 月期短期国债利率期货的价格应当是多少？

令 $T_1-t=4$ 个月$=4/12$ 年，$T-t=7$ 个月$=7/12$ 年。$r_f^{(7)}=5\%$是从 8 月到明年 3 月

的 7 月期短期利率，$r_f^{(4)}=4\%$是从 8 月到 12 月的 4 月期短期利率。

同样的思路可以定出 $Y(t)=S(t)=FVe^{-r_f^{(7)}(T-t)}=100\times e^{-0.05\times 7/12}=97.13$ 元。然后，我们再利用远期定价公式定出

$$F(t,T)=Y(t)e^{r_f^{(4)}(T_1-t)}=97.13\times 1.0134=98.42\text{ 元}$$

如果目前该项利率期货的价格偏离了 98.42 元，读者不难自己构造出套利策略来。

这里，我们只是讨论了短期国债利率期货的定价原理，没有讲解具体的市场报价等操作，有兴趣的读者可参阅其他有关的资料。

现在我们可以简单地总结一下采用无套利均衡分析方法对以上各种推广的定价策略。总的来说，就是以无风险利率借数额等于 $Y(t)$的资金用于购买标的物的现在价值，持有标的物到交割日，再出售标的物将所得资金偿还负债。这样的策略应当是无套利机会的。持有即期现货在持有期内如果有好处发生（分红、持有便利等），远期/期货的标的物的现在价值就比即期现货的价值低；持有即期现货在持有期内如果有成本发生（持有成本），远期/期货的标的物的现在价值就比即期现货的价值高。

（2）远期价格与期货价格之间的关系

前面我们已经提到过，如果无风险利率是确定的（非随机的），则远期价格和期货价格必定相等，现在我们来证明这一点。

为了简单起见，我们假定在期间无风险利率是不变的。

我们用 F_0 和 $\hat{F}_0$ 分别表示目前同一标的物的期货和远期的价格。到到期日 T，标的物的价格记为 $\tilde{S}(T)$，在现在看当然是一个随机变量。因此，到到期日，远期合约实现的盈亏是$\tilde{S}(T)-\hat{F}_0>F_0$。假如$\hat{F}_0>F_0$，对于同一单位的标的物，出售一份远期合约（空头），同时按以下策略构筑期货的多头头寸：在第 k 天（$k=0,\cdots,T-1$）临收盘时，将期货合约的多头头寸调整为 $e^{-r_f(T-k-1)}$份；在第 $k+1$ 天末结算时，将当天实现的盈利存入一个以无风险利率连续计息的账户（如果是亏损的话，意味着以无风险利率借贷）。这样，期货交易实现的盈亏如表 9.2 所示。

表 9.2

日期	持有头寸（期货份数）	价格	当日盈亏	利息因子	期末盈亏
0		F_0			
1	$e^{-r_f(T-1)}$	$\tilde{F}_1$	$e^{-r_f(T-1)}(\tilde{F}_1-F_0)$	$e^{r_f(T-1)}$	$\tilde{F}_1-F_0$
2	$e^{-r_f(T-2)}$	$\tilde{F}_2$	$e^{-r_f(T-2)}(\tilde{F}_2-\tilde{F}_1)$	$e^{r_f(T-2)}$	$\tilde{F}_2-\tilde{F}_1$
3	$e^{-r_f(T-3)}$	$\tilde{F}_3$	$e^{-r_f(T-3)}(\tilde{F}_3-\tilde{F}_2)$	$e^{r_f(T-3)}$	$\tilde{F}_3-\tilde{F}_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$T-1$	e^{-r_f}	$\tilde{F}_{T-1}$	$e^{-r_f}(\tilde{F}_{T-1}-\tilde{F}_{T-2})$	e^{r_f}	$\tilde{F}_{T-1}-\tilde{F}_{T-2}$
T	1	$\tilde{F}_T$	$(\tilde{F}_T-\tilde{F}_{T-1})$	1	$\underline{\tilde{F}_T-\tilde{F}_{T-1}}$ $\tilde{F}_T-F_0$

请注意，这里的无风险利率 r_f 是连续计息的日利率。

因为期货价格一定在到期日收敛到现货价格，所以一定有 $\tilde{F}_T=\tilde{S}(T)$，即有 $\tilde{F}_T-F_0$

$=\tilde{S}(T)-F_0$。如前面的假设 $\hat{F}_0>F_0$ 成立，则以上策略的最终盈亏是 $(\tilde{S}(T)-F_0)-(\tilde{S}(T)-\hat{F}_0)=\hat{F}_0-F_0>0$，出现无风险套利机会。反过来，若 $\hat{F}_0<F_0$，则采取反过来的策略，即买入远期合约（多头），同时构筑期货空头，按相同的策略逐日调整期货空头头寸，也会出现无风险套利的机会。因此，必定有期货价格等于远期价格的结论，即 $\hat{F}_0=F_0$。

容易看出，即使在到期日前无风险利率会发生变化，但只要期间的利率是已知的，不是随机变化的，上述无套利分析中构筑的套利策略依然成立。即如果期间利率 $r_f^{(1)}, r_f^{(2)}, \cdots, r_f^{(T)}$ 尽管可以不同，但都是已知的。此时表 9.1 中的持有头寸（期货份数）仍然可以建立，即以 $e^{-\sum_{i=k}^{T-1} r_f^{(i)}}$ 来代替 $e^{-r_f(T-k)}$（仍然是连续计息），上述策略照样可以成立。在这种情况下，期货价格和远期价格也是相等的。

但是，如果期间无风险利率的变化是未知的（随机变化的），则上述分析中的套利策略就无法建立。事实上，如果标的物现货价格与利率的变化高度负相关（这是通常出现的情况），而期货价格和标的物价格通常又呈正相关关系，期货价格上升时多头盈利，由于逐日结算制，多头盈利的收益可以立即实现而且用于投资，但此时利率下跌，投资收益减小，这就意味着多头收益减小；反之，期货价格下跌时多头亏损，逐日结算制同样使亏损立即实现，多头需要融资，但此时利率上升导致融资成本提高，从而亏损更甚。远期合约因为不是每日结算，也就不会发生这种单向不利的情况。两者相比较，对多头来说，期货合约的吸引力较差。所以，在利率变化未知时，期货价格与远期价格一般不相等（在上述情况，是远期价格高于期货价格）。这说明在市场环境的变化（如这里的利率变化）不能准确地预知时，不同的交易方式对资产的定价确实是有影响的。

读者可以进一步考虑标的物带有分红、发生持有成本和（或）具有持有便利等特性时，对远期/期货价格关系的影响。

(3) 远期与期货的价值

既然在无风险利率确定的情况远期价格和期货价格相同，我们就只讨论这种情况。

我们仍然采用无套利均衡分析来估算远期和期货的价值。

令 X 表示远期/期货在到期日 T 标的物的交割价格。对于一项远期合约的多头来说，到时刻 T 时的价值应为 $\tilde{S}(T)-X$。在现在时刻 t，构筑如下头寸：一项标的物多头（价值为 $S(t)$）再以无风险利率借入 $Xe^{-r_f(T-t)}$，这一组合头寸现在的价值为 $S(t)-Xe^{-r_f(T-t)}$。到到期日 T，这一组合头寸的价值成为 $\tilde{S}(T)-X$，正好与远期合约的到期价值相等。因此，这一组合头寸复制了远期合约的多头。所以在 t 时刻一定有远期合约的价值 $f(t)$ 等于 $S(t)-Xe^{-r_f(T-t)}$，即有

$$f(t)=S(t)-Xe^{-r_f(T-t)}$$

事实上，这一关系对任何 $t\leqslant T$ 的时刻 t 都成立。如果在现在时刻 t 订约，则远期价格就等于到期时的交割价格，即 $F(t,T)=X$，则 $f(t)=e^{-r_f(T-t)}[S(t)e^{r_f(T-t)}-X]=e^{-r_f(T-t)}[F(t,T)-X]=0$。因为在无风险利率确定的情况下，远期价格和期货价格相同，在购买期货合约（多头）时，期货价格和交割价格也相同，同样的分析也成立，期货在开始建仓（即购买或出售期货合约）时，其价值也为零，即 $F(t)=0$，$F(t)$ 表示 t 时刻期货合约的价值。

虽然远期/期货合约在开始时的价值都为零，但随着时间的推移，因为标的物价格的变动和货币的时间价值等原因，远期/期货合约的价值就不再为零。请注意，远期/期货合约价值都可以通过建立反向头寸冲销掉原来的头寸（在期货交易的情况称之为反向平仓）来实现。

远期和期货合约的价值对标的物价格变动的敏感性是不一样的，其原因在于期货采取盯市交易方式，而远期的交易方式是非盯市的。下面我们做出解释。

对于远期合约来说，因为 $f(t)=S(t)-Xe^{-r_f(T-t)}$，所以有 $\dfrac{\Delta f}{\Delta S}\approx\dfrac{\partial f}{\partial S}=1$。这就说明，标的物价格每变化一个单位，远期合约的价值也同样地变化一个单位。期货的情况则不同，因为期货采取的是盯市交易方式。

在每一个交易日，期货合约的交割价格实际上是上一个交易日的结算价，我们记之为 F_{D-1}。如果手中持有一个期货合约（多头），在当天价位达到 F_t 时卖出（平仓），当天的结算价是 F_D，则当天结算实现的价值（盈亏）就是

$$F(t)=(F_D-F_{D-1})-(F_D-F_t)=F_t-F_{D-1}=S(t)e^{r_f(T-t)}-F_{D-1}$$

对于标的物价格变化的敏感性可计算为 $\dfrac{\Delta F}{\Delta S}\approx\dfrac{\partial F}{\partial S}=e^{r_f(T-t)}>1$。所以，标的物价格每变化一个单位，期货价值的变化大于一个单位，期货合约的价值对标的物价格变动的敏感性大于远期合约的价值对标的物价格变动的敏感性。

这种衍生工具的价格对标的物价格的变动的敏感性，用希腊字母德尔塔（Δ）来表示。我们在下一章讨论利用衍生工具进行风险管理时，会进一步予以讲解。在这里只是说明，不同的交易方式对金融资产的定价产生的影响。

可以简单地总结如下：在其他条件相同而（无风险）利率已知的情况下，远期价格和期货价格相同。但是，因为期货采取盯市交易方式，而远期采取非盯市交易方式，所以期货合约对标的物价格变动的敏感性大于远期合约。而且，正因为期货采取盯市交易方式，通过每日结算制使盈亏当日实现，在标的物价格向不利方向变化时，如果保证金头寸不足，会被强行平仓，所以会发生短期的流动性困难，而远期交易则不存在这样的问题。

(4) 期货期权

以期货为标的物的期权称为期货期权（options on futures）。这里，通过介绍期货期权来帮助读者进一步理解期权理论在市场交易中的作用。

以期货为标的物的买权赋予期权持有者一种权利而不是义务，能够以预定价（记为 X）为期货价格建立期货的多头；以期货为标的物的卖权则赋予期权持有者一种权利而不是义务，能够以预定价（同样记为 X）为期货价格建立期货的空头。如果期权的到期日（对美式期权来说就是期权的失效日）记为 T，标的物期货的到期日记为 T^*，现在时刻（期权到期之前）记为 t，有 $t\leqslant T\leqslant T^*$。如果现在时刻 t 执行期权，除了能够以预定价为期货价格建立期货头寸外，还能得到如下的现金支付

$$\text{买权：}\max[0,\ F(t,T^*)-X]$$

$$\text{卖权：}\max[0,\ X-F(t,T^*)]$$

其中 $F(t,T^*)$ 是标的物期货在时刻 t 的价格。期权一执行，作为标的物的期货头寸的价值立即以盯市方式变化。如果在执行期权后不想再真正持有标的物期货合约（因为已经实现

了上述盈亏），可以立即反向平仓（即通过建立相反头寸冲销掉所持有的期货头寸），立即平仓不花费成本（因为期货价格还没有来得及变化）。

下面我们介绍期货期权定价布莱克模型，这是布莱克对一般的布莱克-舒尔斯期权定价模型的推广应用。

这一模型建立在这样一些假设条件之上：只适用于欧式期权，从时刻 t 到 T，变量 $\frac{\widetilde{F}(T,T^*)}{F(t,T^*)}$ 符合对数正态分布，且波动率和无风险利率在此期间都保持不变。

由风险中性定价原理，买权和卖权的定价公式为

$$c(t) = e^{-r_f(T-t)}E_t^*\{\max[0,\widetilde{F}(T,T^*) - X]\}$$
$$p(t) = e^{-r_f(T-t)}E_t^*\{\max[0,X - \widetilde{F}(T,T^*)]\}$$

下一步就要找出 $Y(t)$，使

$$E_t^*\left[\frac{\widetilde{F}(T,T^*)}{Y(t)}\right] = e^{r_f(T-t)}$$

并且，在假想的风险中性的世界里，有

$$\log\left[\frac{\widetilde{F}(T,T^*)}{Y(t)}\right] \sim N(\bar{\mu}(T-t),\sigma^2(T-t))$$

成立，然后就能用布莱克-舒尔斯期权定价公式来为这个期货买权定价。

建立一个期货头寸（称为"建仓"或者"开新仓"）从理论上讲是不发生现金流的（保证金要求并不实际发生现金流），因此，在一个风险中性的世界里，在风险中性概率下，未来时点损益现金流的数学期望值也应当为零（回忆一下公平赌博与风险中性的关系），所以有

$$E_t^*[\widetilde{F}(T,T^*) - F(t,T^*)] = 0$$

即有

$$E_t^*[\widetilde{F}(T,T^*)] = F(t,T^*)$$

于是

$$E_t^*\left[\frac{\widetilde{F}(T,T^*)}{F(t,T^*)e^{-r_f(T-t)}}\right] = e^{r_f(T-t)}$$

从而我们得到

$$Y(t) = F(t,T^*)e^{-r_f(T-t)}$$

由前面的假设条件不难知道，在假想的风险中性的世界里 $\log\left[\frac{\widetilde{F}(T,T^*)}{Y(t)}\right]$ 服从正态分布。

然后，我们就可以以 $Y(t)$ 代替 $S(t)$，用布莱克-舒尔斯期权定价公式来为期货期权定价

$$c(t) = e^{-r_f(T-t)}[F(t,T^*)N(d_1) - XN(d_2)]$$
$$p(t) = e^{-r_f(T-t)}[XN(-d_2) - F(t,T^*)N(-d_1)]$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(F(t,T^*)/X) + \sigma^2/2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

从这一定价公式发现，期货期权可以看作是以固定红利率连续发放红利的股票为标的物的期权，固定红利率就是无风险利率 r_f，而标的物股票的价格就是期货的价格 $F(t,T^*)$。

我们把这一定价公式直接用于外汇期货期权的定价，由前面远期/期货定价公式知，$F(t,T^*)=S(t)e^{(r_f^{\$}-r_f^{DM})(T^*-t)}$。假设汇率的变动遵循伊藤过程，就可以直接用上述公式为外汇期货期权定价。

3. 相对优势的利用和金融中介的作用：互换

我们在第二章已经从利率的期限结构和组合分解技术的角度介绍过互换的定价。互换可以看作是一系列远期交易的组合：利率互换是一系列用固定利率购买浮动利率的远期交易的组合，货币互换是一系列用一种货币购买另一种货币的远期交易，等等。虽然互换一般不采取盯市交易方式，但金融中介机构在其中提供重要的服务并承担一定的风险。

> **互换的真正经济学涵义是发挥交易各方的相对优势创造价值。**

我们在本节介绍这些与互换有关的内容。

先从最普通的利率互换(plain vanilla interest swap)讲起。

我们已经指出过，利率互换是买方用固定利率购买浮动利率。按照互换协议，买方将支付固定利率利息，换取浮动利率利息，卖方则反之。现在来解释这样的互换对双方有什么好处？

我们用一个例子来讲解。

仍然采用 LIBOR 作为与浮动利率挂钩的利率指数。假如两家公司 A 和 B 的借款条件分别如表 9.3 所示。

表 9.3

公司	固定利率	浮动利率
A	10.0%	6 月期 LIBOR+0.30%
B	11.4%	6 月期 LIBOR+1.00%

无论是采用固定利率还是浮动利率，公司 A 的借款条件都优于公司 B，这说明公司 A 的资信情况比公司 B 好。但是，如果分别比较固定利率的借款条件和浮动利率的借款条件，可以发现，采用固定利率借款，公司 A 与公司 B 相比，可以节省 1.4 个百分点，采用浮动利率借款，则只能节省 0.7 个百分点。所以，公司 A 采用固定利率借款的优势更大。也可以说，公司 A 用固定利率借款有相对优势，而公司 B 用浮动利率借款有相对优势。两家公司建立利率互换协议，就可以通过合作利用这种相对优势使双方共同受益。

公司 A 准备以浮动利率借款 100 万元，同时公司 B 准备以固定利率借款 100 万元。因为公司 A 借款条件的相对优势在固定利率方面，而公司 B 的相对优势在浮动利率方

面，所以二者可以通过互换来发挥相对优势的作用。互换的结构如图 9.1。

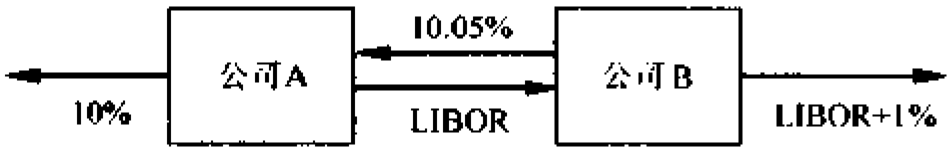


图 9.1

公司 A 是这项利率互换的卖方，以固定利率 10.05%的价格出售浮动利率 LIBOR 给公司 B，同时根据自己的借款条件以固定利率 10%向市场借款。公司 B 是这项利率互换的买方，购买 LIBOR，同时以自己的借款条件以浮动利率 LIBOR%＋1 向市场借款。这样，公司 A 实际支付的利率变成 LIBOR＋(10%－10.05%)＝ LIBOR－0.05%，公司 B 实际支付的利率变成 10.05%＋(LIBOR＋1%－LIBOR)＝11.05%。于是，公司 A 和公司 B 通过利率互换各自都能够节省借款成本 0.35 个百分点。二者加起来，共节约 0.7 个百分点，这正好就是固定利率和浮动利率借款总的相对优势。

互换是通过双方合作共享相对优势，获益并不一定是对分的，在上例中，公司 A 和公司 B 各分享 0.35 个百分点，这只是一个特例。各自分享多少，是通过谈判商定的。

在上例中，公司 A 和公司 B 直接互为对手建立互换协议的做法在市场实践中是比较难于实现的，因为很难恰巧遇到这样合适的交易对手，金融机构(如银行)提供中介服务就成为一种市场需要。为互换交易提供服务的金融机构称为互换交易商(swap dealer)。由互换交易商参与的互换交易的结构见图 9.2。

图 9.2

在这种形式的交易中，互换交易商赚取 16 个基本点(0.16%)，公司 A 和公司 B 各赚 27 个基本点(0.27%)。互换商赚到的是互换的买进卖出差价。回过头去看一下表 2.4 利率互换的报价，就更清楚地明白这一点。

互换交易商作为中介服务机构，不可能把相对优势所总共有的 70 个基本点全部赚走，如果要求这样，互换就不会有市场，因为客户通过互换没有得到好处。当互换交易商介入互换交易时，实际上承担了互换双方所有的违约风险。当其中任何一方不能履行按时付息的义务时，互换交易商就必须承担起代为支付利息的责任。因为在实际的市场操作中，当有中介服务机构(互换交易商)介入互换交易时，参与互换的客户并不知道自己的互换对手是谁，是由互换交易商来撮合匹配的。而且，互换的金额实际上也往往不可能完全正好匹配。对于互换交易商来说，经常有一部分(固定利率的或者浮动利率的)剩余头寸暴露在利率风险之中，需要对这一部分剩余头寸作套期保值。

关于违约风险，值得指出的是，在上例中公司 B 相对于公司 A 来说，固定利率的风险补偿(1.4 个百分点)高于浮动利率的风险补偿(0.7 个百分点)，这说明对公司 B 的固定利率贷款的违约风险相对会比较高。

下面我们讨论货币互换。

两家公司对美元和德国马克借款的市场条件如下：

表 9.4

公司	美元	德国马克
A	8.0%	11.6%
B	10.0%	12.0%

公司A借美元有相对优势，但它希望借德国马克；公司B则反之。可以组织如图9.3所示的货币互换使双方获益。

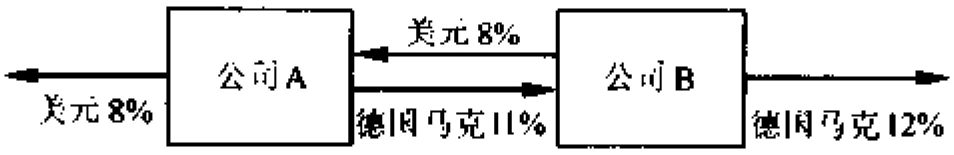


图 9.3

如果有货币互换交易商作为金融中介机构介入这项业务，就变成图9.4所示的结构。

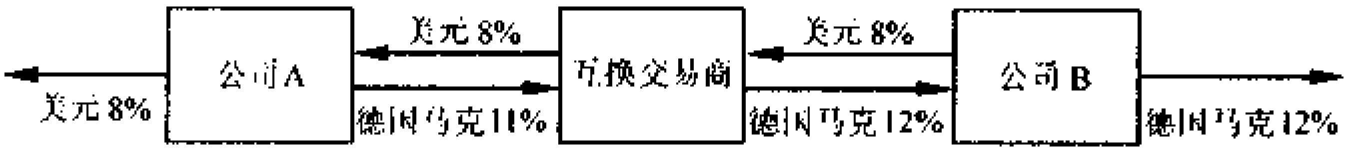


图 9.4

显然，通过这样的货币互换双方都能获益。

互换交易具有这种通过合作利用各自的比较优势使双方获益的特点，所以台湾和北美华人社区把这种交易称为*互惠*，而英国和欧洲的华人称为*掉换*。我们建议称为*互惠掉换*，简称*互换*。这样会比称为"调期"（或"掉期"）来得合理。

在由互换交易商介入的互换交易中，互换交易商所赚取的利息差价一方面是对提供互换服务的收费，另一方面则是承担风险的报酬。因此互换交易商赚取的差价的大小，一方面受市场竞争的影响，竞争越激烈，差价就越小；另一方面将会受到客户的资信情况的影响，从道理上讲，互换交易商作为中介机构承受客户违约的风险越大，就越有理由要求较大的利息差价作为风险补偿。

下面我们讨论互换的估值和定价。

(1) 利率互换的估值与定价

互换的估值和定价有两种基本的方法：*现值法*和*多期远期合约法*。这两种方法都与利率的期限结构有关。

我们在第二章介绍了为利率互换定价的零息票定价技术，实际上是以带固定利率息票的平价债券来交换带浮动利率息票的债券。因此，对一项已经成交的利率互换来说，利率互换合约的价值就是带浮动利率息票的债券的现值和带固定利率息票的平价债券的现值的差，所以就是现值法。多期远期合约法则把互换看作是一系列的远期合约，成交后的互换协议的价值就是所有包含在其中的远期合约的价值的总和。这两种估值法的原理都是无套利均衡分析，估值的结果当然应该是一样的，而多期远期合约法也体现了金融工程

的组合分解思想。

对于利率互换的估值来说，现值法是比较简便易行的估值方法。带浮动利率息票的债券在初始发行时，其现值等于面值，而带固定利率息票的债券的现值则是用零息票利率集作为折现率折现后的现值。因此，只要有零息票利率集，估值计算并不困难。

不过，在利率互换合约成立以后，随着时间的推移，国库券收益曲线会移动，这就意味着利率的期限结构发生变化，从而零息票利率集也就发生变化。因此，任何时候计算固定利率平价债券的现值，应当采用当时的零息票利率集作为折现率。

浮动利率债券在发行后的现值计算还需要另加说明。

假定浮动利率债券的面值 $FV=1\,000$ 元，每 6 个月调整一次息票利率，我们看图 9.5 所示的现金流图。

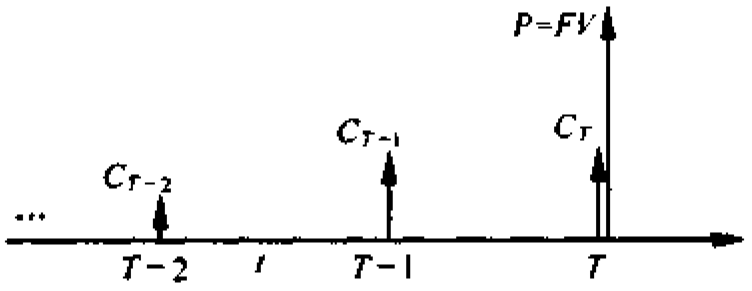


图 9.5

每期支付息票利息时同时确定下一期的息票利率。因此 C_T 的利率 r_T 是在时刻 $T-1$ 时确定的，C_{T-1}的利率 r_{T-1}是在时刻 $T-2$ 时确定的，依此类推。在时刻 $T-1$、支付完息票利息 C_{T-1}后、债券的现值应当是

$$PV_{T-1}=\frac{P+C_T}{1+r_T/2}=\frac{FV+FV\times r_T/2}{1+r_T/2}=FV=1\,000\text{ 元}$$

同样的道理，在时刻 $T-2$，支付完息票利息 C_{T-2}后，债券的现值应当是

$$PV_{T-2}=\frac{PV_{T-1}+C_{T-1}}{1+r_{T-1}/2}=\frac{FV+FV\times r_{T-1}/2}{1+r_{T-1}/2}=FV=1\,000\text{ 元}$$

依此类推，可知在每次支付完息票利息后，债券的现值就等于其面值。如果倒推到头，可知在债券刚发行时的现值也就等于其面值。

现在来看在两次支付息票利息的时刻之间，如图 9.5 中所示的时刻 t 时，债券的现值是多少？

假如 t 正好在 $T-2$ 和 $T-1$ 的中点（距 $T-1$ 还有 3 个月），这时候市场的利率情况已经变化了，t 时刻的 3 月期零息票利率如果记为 $r_t^{(3)}$，则 t 时刻债券的现值是

$$PV_t=\frac{PV_{T-1}+C_{T-1}}{1+r_t^{(3)}/4}=\frac{FV+FV\times r_{T-1}/2}{1+r_t^{(3)}/4}=FV\left(\frac{1+r_{T-1}/2}{1+r_t^{(3)}/4}\right)$$

于是，在时刻 t，利率互换的价值为

$$PV_t=PV_t(\text{固定利率平价债券})-PV_t(\text{浮动利率债券})$$

其中固定利率平价债券的息票利率是互换刚开始建立时由以下定价公式解出

$$V_0=PV_0(\text{固定利率平价债券})-PV_0(\text{浮动利率债券})=0$$

(2) **货币互换的估值与定价**

先讨论现值法。

假定是美元和德国马克的互换。引入以下记号：

$P^{\$}$——用于互换的美元本金；

P^{DM}——用于互换的德国马克本金；

$c^{\$}$——美元息票利率；

$r^{\$}$——美元的市场利率(指零息票利率集)；

c^{DM}——德国马克息票利率；

r^{DM}——德国马克的市场利率(也指零息票利率集)；

x_t——时刻 t 的汇率，以美元作计价货币，即 1 德国马克的美元价格。

如图 9.4，公司 A 在美元借款上具有相对优势，但需要借德国马克，就可以做如图 9.4 所示的货币互换。互换的步骤是：期初交换本金(如果开始的即期汇率使本金严格匹配，期初本金也可以不交换，可以直接到外汇市场上去换)，即以 $P^{\$}$ 和 P^{DM} 相交换；期间交换息票利息，即以 $c^{DM}P^{DM}$ 与 $c^{\$}P^{\$}$ 相交换；期末再换回本金，即 P^{DM} 和 $P^{\$}$ 相交换。

如果期初 $t=0$ 时有 $P^{\$}=x_0P^{DM}$，则期初可以不交换本金。如果这个等式不成立，货币互换可以看作是将德国马克债券交换美元债券，期初需要交换本金，就是以金额为 $P^{\$}$ 的美元交换金额为 P^{DM} 的德国马克。因此，在 $t=0$ 时，对于公司 A 来说，这个货币互换的价值就应该是

$$V_0=(x_0P^{DM}-P^{\$})+(B_0^{\$}-x_0B_0^{DM})$$

其中 $B_0^{\$}$ 和 B_0^{DM} 分别是美元债券的价值和德国马克债券的价值，有

$$B_0^{\$}=\sum_{t=1}^{T}c^{\$}P^{\$}e^{-r_t^{\$}t}+P^{\$}e^{-r_T^{\$}T}$$

$$B_0^{DM}=\sum_{t=1}^{T}c^{DM}P^{DM}e^{-r_t^{DM}t}+P^{DM}e^{-r_T^{DM}T}$$

在货币互换刚开始成立时，应有 $V_0=0$，这是美元息票利率和德国马克息票利率(息票利率即互换协议利率)所必须遵循的均衡定价关系。在互换协议建立以后，即 $0<t\leqslant T$ 时，随着市场环境发生变化和已经交换了(期初本金和)一部分利息，互换的价值就不再为零，而成为

$$V_t=B_t^{\$}-x_tB_t^{DM}$$

其中 $B_t^{\$}$ 和 B_t^{DM} 分别是 t 时刻的美元债券和德国马克债券的价值。读者如果掌握了我们前面所介绍的知识，不难自己推导出它们的表达式。

下面我们讨论多期远期合约法。

多期远期合约法除了期初交换本金(在期初完全匹配的情况下也可以不交换)外，可看作一系列外汇远期空头(指支付外币利息和最后交付外币本金的一方)的组合。除了最后一个(T 时刻)外汇远期协议外，期间的远期交割价都是 $X_t=\frac{c^{\$}P^{\$}}{c^{DM}P^{DM}}$，$1\leqslant t\leqslant T-1$。最后到 T 时刻的远期合约的交割价是 $X_T=\frac{c^{\$}P^{\$}+P^{\$}}{c^{DM}P^{DM}+P^{DM}}$。

任何 t 时刻的远期合约的价值记为 $f_t(S_t,X,T)$，其中 S_t 是 t 时刻标的物的价格，在

外汇远期的情况下，就是 t 时刻的汇率，X 就是协议汇率（远期交割汇率），T 是协议到期日。外汇远期合约的估值公式应为

$$f_t(S_t, X, T) = S_t e^{-r^{DM}(T-t)} - X e^{-r^{\$}(T-t)}$$

远期合约刚建立时，应有 $f_0(S_0, X, T)=0$，由此定出远期交割价 X，这和我们在本章前面讲解外汇远期（期货）的定价公式是一致的。

于是我们可以给出多期远期合约法为货币互换估值的公式。在合约刚成立时，有

$$V_0 = (x_0 P^{DM} - P^{\$}) - c^{DM}P^{DM}\sum_{t=1}^{T-1} f_0(x_0, X_t, t) - (c^{DM}P^{DM} + P^{DM}) f_0(x_0, X_T, T)$$

其中 $X_t = \frac{c^{\$}P^{\$}}{c^{DM}P^{DM}}, 1 \leqslant t \leqslant T-1, X_T = \frac{c^{\$}P^{\$} + P^{\$}}{c^{DM}P^{DM} + P^{DM}}$。

虽然从道理上讲，货币互换相当于两种货币的平价债券互相交换，因为在市场交易中，两个平价债券本身的净现值都为零，所以并不要求所交换的名义本金在即期汇率下严格匹配，但如果相差过大的话，会加大一方对另一方的违约风险。通常认为，互相匹配的互换的违约风险相对来说是比较小的。当互换交易商（如银行）作为中介机构介入互换交易时，互换交易商会承受剩余头寸的利率和/或汇率风险，因此需要对剩余风险进行管理。互换交易商经常用远期/期货合约对互换的剩余头寸作套期保值。

下面我们用一个数字例子进一步说明货币互换的两种估值方法。

建立货币互换如图 9.4 所示，公司 A 支付德国马克利率 11.0%给 B 公司，从 B 公司收取美元利率 8.0%。互换的名义本金为 800 万美元和 1 000 万德国马克，互换建立时德国马克对美元的汇率是 0.80 美元/德国马克，所以在开始时美元和德国马克的名义本金额是严格匹配的。互换的期限为 2 年，期初可以不必交换本金，第一年年末交换一次利息、第二年年末再交换一次利息和本金。在互换建立后，两种货币的市场环境都略有变化，利率情况变成：美元的无风险利率 $r^{\$}=4\%$，德国马克的无风险利率 $r^{DM}=7\%$。为简单起见，假设美元和德国马克的国库券收益曲线呈平坦状。现在用上述两种方法来分别估算这个货币互换的价值。

1）现值法　现值法要求计算美元债券和德国马克债券的价值。我们有

$$\begin{aligned}B_0^{\$} &= \sum_{t=1}^{2} c^{\$}P^{\$}e^{-r_t^{\$}t} + P^{\$}e^{-r_T^{\$}\times 2} \\ &= 0.08 \times 800 \times (e^{-0.04\times 1} + e^{-0.04\times 2}) + 800 \times e^{-0.04\times 2} = 859.06 \text{ 万元}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_0^{DM} &= \sum_{t=1}^{2} c^{DM}P^{DM}e^{-r_t^{DM}t} + P^{DM}e^{-r_T^{DM}\times 2} \\ &= 0.11 \times 1\,000 \times (e^{-0.07\times 1} + e^{-0.07\times 2}) + 1\,000 \times e^{-0.07\times 2} \\ &= 1\,067.55 \text{ 万元}\end{aligned}$$

于是，此时这个货币互换的价值是

$$V_0 = B_0^{\$} - x_0 B_0^{DM} = 859.06 - 0.8 \times 1\,067.55 = 5.02 \text{ 万元}$$

2）多期远期合约法　多期远期合约法要计算多个远期合约的价值。有

$$V_0 = -c^{DM}P^{DM}f_0\left(x_0, \frac{c^{\$}P^{\$}}{c^{DM}P^{DM}}, 1\right) - (c^{DM}P^{DM} + P^{DM})f_0\left(x_0, \frac{c^{\$}P^{\$} + P^{\$}}{c^{DM}P^{DM} + P^{DM}}, 2\right)$$

$$= -0.11 \times 1\,000 \times \left[0.8 \times e^{-0.07\times 1} - \frac{0.08 \times 800}{0.11 \times 1\,000} \times e^{-0.04\times 1}\right]$$

$$-(0.11 \times 1\,000 + 1\,000) \times \left[0.8 \times e^{-0.07\times 2} - \frac{0.08 \times 800 + 800}{0.11 \times 1\,000 + 1\,000} \times e^{-0.04\times 2}\right]$$

$$= -20.56 + 25.58 = 5.02 \text{ 万元}$$

因此，两种方法的计算结果是一样的。

4. 各种利率期权

(1) 互换的期权

互换的期权(swaptions)给予期权的持有者一种权利而不是义务，在到期日(基本上是欧式期权)成为一项互换的买方(多头)。因此互换的期权可以看作是互换的买权，不过预定价为零。

以利率互换的期权为例，该期权赋予期权的持有者一项权利而不是义务，可以在6个月后成为一项5年期利率互换的买方，这项利率互换使持有者能以固定利率6%，名义本金100万元的利息(每半年付息一次)交换LIBOR利息。

于是出现的问题是：6个月后出现什么样的情况应该执行这项期权？

互换的期权可以看作以固定利率息票债券来交换浮动利率息票债券的期权。如我们在前面讨论利率互换时所论述的，浮动利率息票债券在开始时的市场价值就是名义本金的数额，即100万元。那么，如果6个月后息票利率为6%的固定利率债券的市场价值低于100万元的话(这意味着对此债券而言，市场利率变得高于6%)，就应该执行期权。因此，这一互换的期权可以看作一项到期期限为6个月的卖权，标的物是面值为100万元，息票利率为6%的5年期固定利率债券，预定价为100万元。

由此出发，市场上把互换的期权称为互换的卖权(swap put option)，反过来当然也就可以定义互换的买权(swap call option)。这样，持有互换的卖权，在执行时是取得互换的多头地位；持有互换的买权，在执行时是取得互换的空头地位。这在直觉上好像有点别扭。但是互换的价格是浮动利率的固定利率价格，买权是"看涨期权"，价格上涨对持有者有利；卖权是"看跌期权"，价格下跌对持有者有利。从这种角度看，这样的定义就是合理的。

由此例可以看到，互换的期权通常可以当作债券的期权来处理。互换的期权、债券的期权以及后面要讨论的利率顶、底、套(都是期权型的衍生工具)等，都是利率衍生工具(interest-rate derivatives)。

(2) 债券的期权

我们在前面推广使用布莱克-舒尔斯期权定价公式(即使用布莱克公式)的做法时，如果直接将它应用到其他各种利率衍生工具的定价，会发生一点问题。因为在使用布莱克公式时，总是要假定无风险利率不变，而各种利率衍生工具是面向利率风险的，从根本上说，也就与利率的随机变动有关。另外，布莱克公式假定标的物的波动率是常数，但债券的价格在越接近到期日时，价格的波动性就越小(因为债券价格越接近其面值)，也就意味着波动率越来越小。

但是，布莱克公式对一部分利率衍生工具还是适用的，我们现在来加以说明。

以长期债券为标的物的短期期权可以用布莱克公式来定价，因为期权的生命期短，可以近似地认为期间利率不变，债券收益的波动率也不变。所以，距到期日短的互换的期权显然适合于这种情况。

我们用一个数字例子来说明。假定一长期债券作为标的物，债券距到期期限还有15.75年，面值是1 000元，固定息票利率为10%（每半年付息一次），从现在起，3个月和9个月后各付息一次。目前债券的市场价格是960元，当年测算债券价格的波动率为9%。现有一期限为10个月的欧式卖权，预定价为1 000元。国库券收益曲线显示，从现在起3个月、9个月和10个月的无风险利率分别为9%，9.5%和10%（均为以连续复利计息的年利率）。我们来为这一卖权定价。

期权执行前有息票利息支付，支付的这些息票利息的现值为

$$50\times e^{-0.25\times 0.09}+50\times e^{-0.75\times 0.095}=95.45\text{ 元}$$

所以，应以 $Y(t)=960-95.45=864.55$ 元代替 $S(t)$，$F(t,T^*)=S(t)e^{r_f(T^*-t)}$，预定价 $X=1\ 000$ 元，无风险利率 $r_f=10\%$，波动率 $\sigma=9\%$，距到期期限 $T^*-t=10/12=0.8333$ 年。利用布莱克公式可算出这个欧式卖权的价格为64.98元。

在执行债券期权时，实际操作中常常是要把标的物债券的应计利息计算在内的。因此，在上例中，执行价中还要加入1个月的应计利息（因为在第9个月分派利息，在第10个月执行期权），所以 $X=1\ 000+50\times 1/6=1\ 008.33$ 元。这样再计算出来的卖权价值是71.13元。

(3) 利率顶、底和套

利率顶（简称顶cap）、利率底（简称底floor）和利率套（简称套collar）都是管理利率风险的有效工具。

浮动利率贷款的借款人在购买了利率顶之后，可保证所支付的利息的利率不高于顶利率(cap rate)；反之，浮动利率贷款的贷款人在购买了利率底后，可保证收取的利息的利率不低于底利率(floor rate)。利率套则是利率顶和利率底的组合，购买一个套意味着在买进一个顶的同时出售一个底，出售一个套则反之。进行套的交易通常是为了将出售所得的收入来抵补购买的成本，以降低利率风险管理的成本。

利率顶（底）可以看作是一系列浮动利率的买权（卖权）。例如，一家公司借入1 000万元的浮动利率贷款，期限为10年，每季度初按照3月期LIBOR调整一次利率。这家公司向一家金融机构买入一个顶利率为8%的利率顶，这家公司每个季度可以从出售利率顶的金融机构处得到的利息补贴为

$$1\ 000\text{ 万元}\times 0.25\times \max[0,\ \tilde{r}-8\%]$$

显然，公司通过购买利率顶而获得了共40个（10年）浮动利率的买权。每一个这样的买权可以看作是一个折现债券的欧式卖权，到期日是每次计算利息补差的时间。所以，一个利率顶相当于一系列折现债券的卖权。类似的解释可用于利率底。

现在我们来说明为什么可以把每一个利率顶中的浮动利率买权看作是一个折现债券的欧式卖权？

以 r_c 记顶利率，L 记本金额。每一段支付利息的时间间隔记为 τ，因此在时刻 $\tau,2\tau,\cdots,n\tau$ 时支付利息及补差。利率顶的利息补差的计算和支付方式是这样的：根据时刻 $k\tau$

时的实际利率 r_k 和顶利率的差计算时间段$[k\tau,(k+1)\tau]$的利息补差，在时刻$(k+1)\tau$时支付利息补差。因为在时刻0时计算的利息补差一般为0，所以在时刻 τ 没有利息补差支付，利息补差支付发生在时刻 $2\tau,\cdots,n\tau$。

于是，在时刻$(k+1)\tau$ 支付的利息差额为

$$\tau L\max(r_k - r_c, 0)$$

利息补差的支付虽然发生在时刻$(k+1)\tau$，但补的是时间段$[k\tau,(k+1)\tau]$中的利息差额。所以，利息差额价值的计算应该折算到时刻 $k\tau$ 的现值，即为

$$\frac{\tau L}{1+\tau r_k}\max(r_k - r_c, 0) = \max\left[L - \frac{L(1+r_c\tau)}{1+\tau r_k}, 0\right]$$

如果我们以一项到期日为$(k+1)\tau$，面值为 $L(1+r_c\tau)$的折现债券作为标的物，衍生出一份欧式卖权，该卖权的预定价为 L，到期日为 $k\tau$(比标的物债券的到期日提前一段单位时间 τ)。上式说明，时间段$[k\tau,(k+1)\tau]$中利息补差的价值，就是这份欧式卖权执行时的价值。

这样一来，利率顶就可以看作是一系列欧式卖权的组合。如果整个利率顶的生命周期 $T-t=n\tau$ 不很长，期间市场利率和标的物债券价格的波动率变化不大的话，就可以用布莱克-舒尔斯定价公式及其推广(布莱克公式)来为整个利率顶定价。对于利率底和利率套来说，情况是类似的。

5. 利率的期限结构模型

如果利率衍生工具的生命周期比较长，期间国库券的收益曲线会发生较大的变化，标的物的波动率也不再稳定不变，那么，直接利用布莱克-舒尔斯定价公式及其推广来定价就有问题。为此，必须讨论利率的期限结构模型。

事实上，利率衍生工具是面向利率风险的，可以说利率本身就是这类衍生工具的标的物。所以，利率的随机变动特性是学习这类衍生工具所必须了解和掌握的基本特性。就像在学习股票期权时，我们必须先了解股票价格的变动特性一样。

但是，利率的随机变动特性比股票价格的变动特性来得复杂，因为要考虑整个国库券收益曲线(即利率的期限结构)的变动情况，不像股票只须考虑价格这一个特性。我们来看风险中性定价的公式。假设 $\tilde{S}_N$ 是距今 N 个时间段后证券的损益，则该证券现在的风险中性定价应是

$$S_0 = \frac{1}{(1+r)^N}E_0^*(\tilde{S}_N)$$

如果利率是随机变动的，在折现因子中就不能用同一个 r，定价公式应当变成

$$S_0 = E_t^*\left\{\left[\frac{1}{1+r_0}\prod_{t=1}^{N-1}\frac{1}{(1+\tilde{r}_t)}\right]\tilde{S}_N\right\}$$

请注意，除了 r_0 之外，其余的 $\tilde{r}_t$ 都是随机变量。这就使定价公式变得非常复杂，不但要对 $\tilde{S}_N$ 在风险中性概率下求数学期望(概率平均)，而且要对所有的 $\tilde{r}_t$ 也这样做。

并且，在上式中，$\tilde{r}_t$ 都是一阶段的短期利率。事实上短期利率的变化又不能完全独立于长期利率，多个前后相继的短期利率的折现值和单个长期利率的折现值之间存在着无

套利关系。这也就是说加大了建模的难度。

总而言之，在考虑利率的期限结构变化的基础上讨论定价的建模工作是相当复杂和困难的。因此，在本书中我们只讨论比较简单的单因素模型。

(1) 单因素期限结构模型

单因素期限结构模型有两个基本假设：第一，短期利率的变动只源于一个因素的作用；第二，固定收益证券(指债券类证券)的价格变动的原因仅仅就在于短期利率的变化。

先来看如图 9.6 所示的二叉树所描绘的短期(无风险)利率的变化。

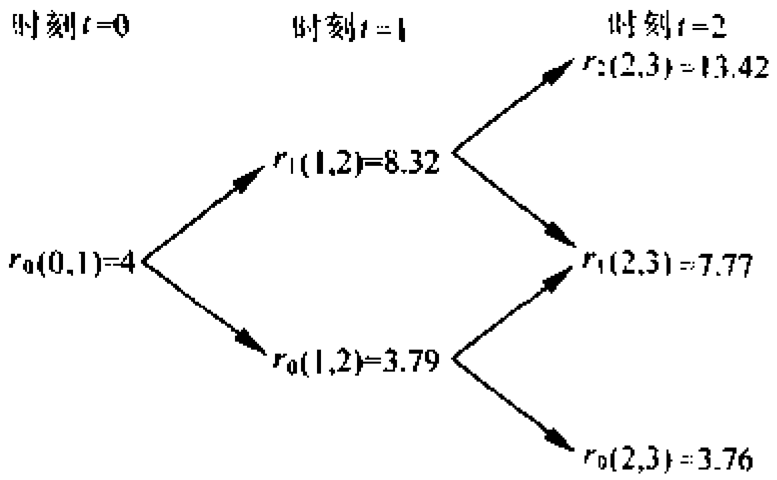


图 9.6

我们来说明一下图中记号的意思。比如，$r_0(1,2)=3.79$ 表示在时刻 $t=1$，节点 0(节点 0,1,2 的顺序由下朝上数)处的市场的(单期)利率，这一利率的适用时间是时刻 $t=1$ 和 $t=2$ 之间。其他的利率记号类推。每一个时间段可以取作 1 年、1 个月或 1 天等时间单位，这里就算作是 1 年。

我们假设二叉树的风险中性概率朝上和朝下都是 $\frac{1}{2}$，这当然是一个简化的假设，就好比在描述股票运动的二叉树中假设 $u=1/d$ 一样。

现在我们用这个二叉树的利率的期限结构模型来为一份 2 年期的零息票债券定价。债券的面值是 1 000 元，债券的价格变化如图 9.7。

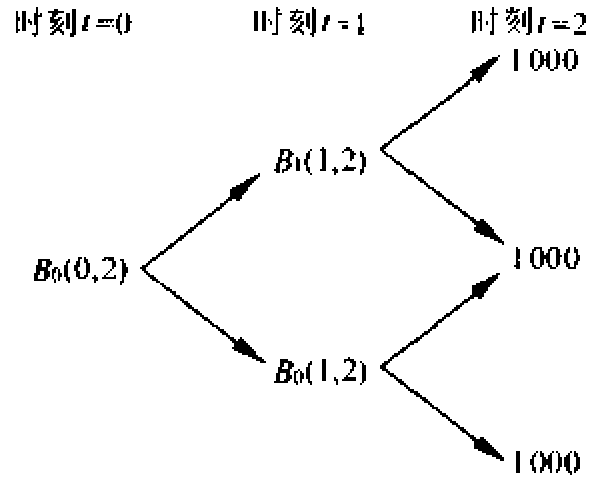


图 9.7

图 9.7 中记号的涵义是这样的：$B_0(0,2)$ 表示在 0 时刻，期限为 2 年的零息票债券的价值；$B_1(1,2)$则表示在节点 1 处，期限为 1 年的债券的价值；其他类推。

在风险中性的世界里，任何债券的短期预期收益率都应该等于市场的短期无风险利率。于是可以倒推定出 $B_0(1,2)$和 $B_1(1,2)$的价格：

$$B_0(1,2)=\frac{1\,000}{1+r_0(1,2)}=\frac{1\,000}{1+3.79\%}=963.48\text{ 元}$$

$$B_1(1,2)=\frac{1\,000}{1+r_1(1,2)}=\frac{1\,000}{1+8.32\%}=923.19\text{ 元}$$

下面用风险中性定价定出 $B_0(0,2)$，

$$B_0(0,2)=\frac{\frac{1}{2}B_0(1,2)+\frac{1}{2}B_1(1,2)}{1+r_0(0,1)}=\frac{0.5\times 963.48+0.5\times 923.19}{1+4\%}=907.05\text{ 元}$$

请注意，由这个例子可以看到，我们可以用这个短期利率（1 年期）的模型定出长期利率（2 年期），有 $r_0(0,2)=\sqrt{\frac{1\,000}{907.05}}-1=5.00\%$。

有了这个（单因素的）利率期限结构模型，我们就可以用风险中性定价的方法定出其他利率衍生工具的（无套利）均衡价格。例如有一以上面的例子中的零息票债券为标的物的 1 年期欧式卖权，预定价是 950 元（见图 9.8）。

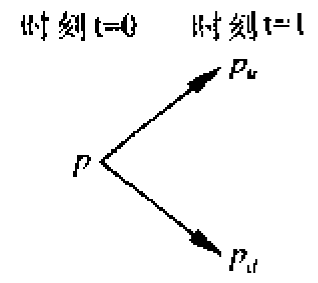


图 9.8

到期时该卖权的价值为

$$p_u=\max[0,\ 950-B_1(1,2)]=26.81\text{ 元}$$

$$p_d=\max[0,\ 950-B_0(1,2)]=0$$

由风险中性定价知，现在该卖权的价值是

$$p=\frac{0.5p_u+0.5p_d}{1+4\%}=12.89\text{ 元}$$

（2）构建单因素期限结构模型

如果我们已知不同期限债券的价格（比如已有国库券的收益曲线）及其收益率的波动率，怎样来构建一个（利率）单因素的二叉树模型呢？

我们用一个简单的例子来说明构建的方法。虽然例子很简单，但掌握这一方法对于金融工程师来说是非常重要的。因为这一方法蕴涵着一大类单因素无套利利率模型建模的基本思想。这一大类模型的基本特征是综合地考虑现时的利率期限结构和对利率波动（利率的波动率）的预测。在实际的建模设计时，要进行大量的统计工作。

假如我们已经掌握了以下两部分基本信息：

1）由国库券收益曲线所反映的零息票利率集；

2）不同期限利率的波动率。

表 9.5 列出了所有已知信息：

表 9.5

到期期限（年）	债券收益率（%）	价格（元）	波动率（%）
1	6.0	943.40	14
2	6.4	883.30	12
3	6.7	823.20	11

表 9.5 左起第二列表示的是连续计息的零息票债券的复利年利率。第三列是面值为 1 000 元的零息票债券的价格。第四列表示的是在已知前一期期末即期短期利率的条件下，每期期末即期短期利率的波动率。例如，如果我们已知第 1 年年末的即期 1 年期短期利率 $r_i(1,2)$，$i=0,1$，则即期 1 年期短期利率 $r_i(2,3)(i=0,1,2)$的标准差为 12%。请参见图 9.6 及其说明。

现在我们利用这些信息来构建利率变化的二叉树模型。

第一步　利用 1 年期债券直接得到以下二叉树（图 9.9）。

第二步　利用 2 年期债券得到以下的债券价格变化图(图 9.10)。

由风险中性定价关系知

$$B_0(0,2)=\frac{\frac{1}{2}B_0(1,2)+\frac{1}{2}B_1(1,2)}{1+r_0(0,1)}$$

即有

$$883.30=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_0(1,2)}+\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_1(1,2)}}{1+6\%}$$

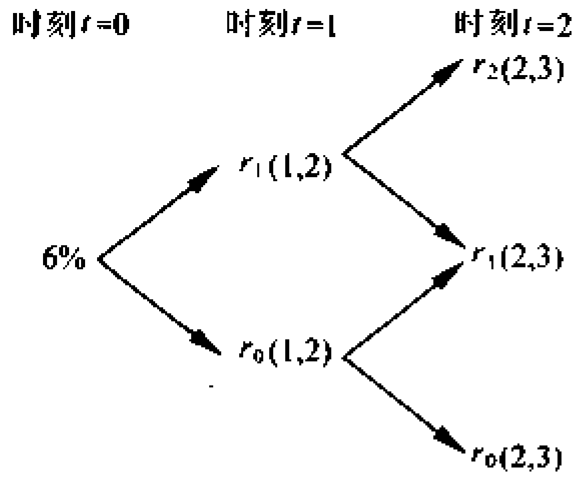


图　9.9

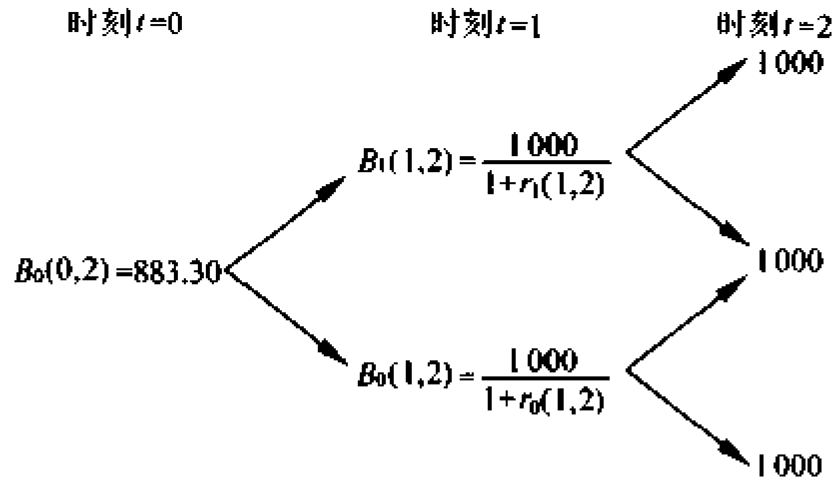


图　9.10

另外,由有关波动率的信息知,有关系式

$$\frac{1}{2}\times[r_1(1,2)-r_0(1,2)]=14\%$$

由这两个关系式可以解出 $r_0(1,2)=5.42\%$,$r_1(1,2)=8.22\%$。

于是,利率变化的二叉树变成如图 9.11 所示的形式。

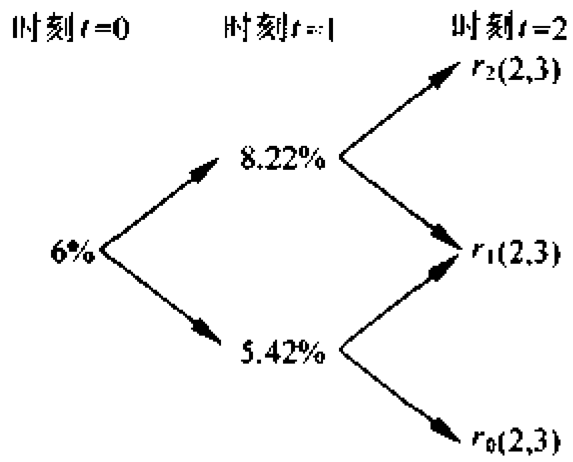


图　9.11

第三步　利用 3 年期债券又可进一步得到 3 阶段的债券价格变化图(图 9.12)。同样的分析可以得到 3 个风险中性定价关系式和 2 个由波动率信息得到的关系式,从中可以解出 5 个未知变量 $r_0(2,3)$,$r_1(2,3)$,$r_2(2,3)$,$B_0(1,3)$和 $B_1(1,3)$。

方程组为

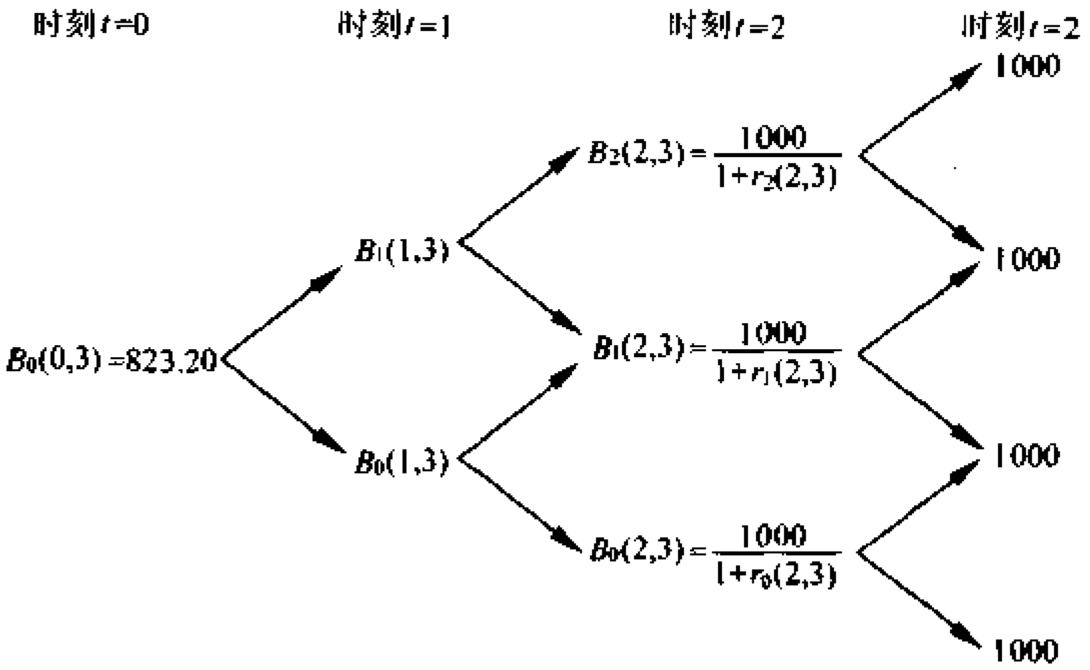


图 9.12

$$B_0(1,3)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_0(2,3)}+\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_1(2,3)}}{1+r_0(1,2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_0(2,3)}+\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_1(2,3)}}{1+5.42\%}$$

$$B_1(1,3)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_1(2,3)}+\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_2(2,3)}}{1+r_1(1,2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_1(2,3)}+\frac{1}{2}\times\frac{1\,000}{1+r_2(2,3)}}{1+8.22\%}$$

$$B_0(0,3)=823.20=\frac{\frac{1}{2}\times B_0(1,3)+\frac{1}{2}\times B_1(1,3)}{1+6\%}$$

$$\frac{1}{2}[r_1(2,3)-r_0(2,3)]=12\%$$

$$\frac{1}{2}[r_2(2,3)-r_1(2,3)]=12\%$$

由此解出 $r_0(2,3)=4.95\%$，$r_1(2,3)=7.35\%$，$r_2(2,3)=9.75\%$。

依此类推，只要我们知道了不同期限的零息票债券的价格/收益率（即掌握了国库券收益曲线）以及利率的波动率，我们就可以推出多阶段二叉树每一节点上的单期利率，从而构建出整个单因素利率期限结构模型。而有了利率的期限结构模型，就不难通过无套利均衡分析为利率衍生工具定价。这样，我们用相对简单的二叉树利率期限结构模型，向读者介绍了当市场利率环境变化时的资产定价技术。

连续时间的单因素利率期限结构模型通常采取以下的形式

$$dr=[\theta+a(b-r)]dt+\sigma r^{\beta}dz$$

这是利率变化所遵循的随机过程，其中 dz 是维纳过程（布朗运动），$a(b-r)$是均值回复

项，θ 为漂移项，σr^{β} 为方差项，β 通常取值 0，1/2 和 1。

这里需要对均值回复(mean reversion)作一点解释。利率的均值回复是指随着时间的推移，利率有向某一平均回复水平收敛的趋势。因为当利率较高时，经济会降温，对资金的需求会减小，利率随之会降低；而当利率较低时，经济会升温，对资金的需求会增大，利率随之会提高。从而，从长期趋势看，利率会呈现向均值收敛的趋势。所以，长期利率的波动率比短期利率的波动率来得小。模型中 $a(b-r)$ 项利率变量前面是负号，就会推动利率向均值回复。

上述模型中所有的参数 θ，a 和 σ 都可以是随时间变化的，通过适当的选择参数使模型与当前的利率期限结构相吻合。取 $a=\beta=0$，这一随机过程所刻画的利率变化就与我们前面所构建的二叉树无限细分时的情况有密切的联系。选择不同的参数，这一利率变化过程就呈现为各种不同形态的模型、可以做出各种不同的解释。一种比较合理和被大家接受的模型形式是布莱克等人在 1990 年提出的

$$\mathrm{d}\log r = \left[\theta(t) + \left(\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\right)\log r\right]\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}z$$

在这个模型里，利率不可能是负值，因为可以任意地选择 $\theta(t)$ 和 $\sigma(t)$ 作为时间的函数，所以能使模型与即期的利率期限结构和利率的波动率很好地吻合。另外，尽管不是很明显，$\log r$ 具有均值回复的特性。

利率衍生工具的定价基本上都可以转换为债券衍生工具的定价处理。现在并没有求债券定价解析解的办法，但可以采用数值解法。我们前面所介绍的构建单因素期限结构二叉树模型的做法实际上提供了一种求解模型数值解的解法。

已经出现了许多利率期限结构模型，除了单因素模型外，还有两因素模型，即期限结构不只取决于单个因素的作用。这些模型的解释功能有好有坏，经验研究的支持程度也各不相同。总而言之，利率衍生工具的估值与定价与利率的变化有关，必须放到利率的期限结构的背景下研究。

6. 小结

金融工程的很大一部分内容是面向市场交易的，因此，有关市场环境的基本知识是学习金融工程所必须掌握的。我们在前面的章节已经介绍过市场的完全性的概念，在本章中我们讲解了有关市场效率的基本知识。市场的完全性和市场的有效率性是金融市场的两大基本特性，它们是非常深刻的金融概念。

金融市场的效率高于其他的商品和服务市场，但金融市场又不能始终保持有效率。对于金融工程师来说，有效率市场假设既是敌人又是朋友。金融工程师要利用甚至制造市场失效的机会来套利和进行成功的投机，如果金融市场始终是有效率的，依靠金融工程技术所设计的各种套利和投机的策略和工具就失去效用。而又正因为金融市场是有效率的，金融工程才能正确地估值和定价，才能设计出各种各样的新型金融产品和管理风险的策略。因此，优秀的金融工程师必须善于处理各种与有效率市场假设有关的问题。

对于市场环境的认识必须深入到市场交易的层面，这涉及市场的微观结构(market microstructure)问题。市场的微观结构问题是现代金融学研究的一个重要课题。在本章中

我们以远期和期货的不同交易方式为例，讨论了不同的交易方式对资产定价和价格变化的影响。交易方式和交易策略的研究和设计，也是金融工程的重要方面。

相对优势的利用从来就是经济学研究的重要课题，当然也是金融研究的重要内容。互惠掉换产品的设计，就是在金融市场上利用相对优势的典型例证。金融中介机构为此提供服务并分担风险，充分体现了金融服务业在优化资本资源配置方面的重要作用。娴熟地掌握远期、期货、期权和互换等基本衍生工具的估值和定价技术，能帮助读者更为深刻地理解和掌握金融工程的重要原理——无套利均衡分析。

货币的时间价值是现代金融理论的三大支柱之一，而时间价值要随着市场的利率环境的变化而变化，这一点往往不能为初步涉及金融知识的人们所理解和掌握。利率环境的变化当然是市场环境变化的一个重要方面，利率变化对资产定价的影响对于金融工程的产品设计和开发无疑是极端重要的。需要区分的是，对于有些金融工具（如一般的股票期权）来说，利率的变化对其价值的影响并不显著；但对另一些金融工具（尤其是利率衍生工具）来说，利率的变化对价值的影响很大。对于这样一类金融商品的设计和开发，必须放到利率变化的市场模型中研究。利率的期限结构模型对于理解金融市场的环境是非常重要的，本章的讲解仍然是很初步的，对于金融工程的实际应用来说，还需要更为深入的钻研。因为对各种利率工具的研究大体上都可以转换为对债券及其衍生品的研究，因此这一部分的内容，构成对固定收益证券研究的重要组成部分。建议有兴趣进一步研究的读者，参阅有关固定收益证券研究的文献资料。

练习题

1. 假设一家美国公司准备借入两年期德国马克 150 万，同时一家德国公司也准备借入两年期美元 100 万。考虑到两家公司在本国资本市场上融资的相对优势，两公司准备进行货币互换。已知此时两国的无风险利率如下表。汇率为 1 美元/1.5000 德国马克，$t=0$ 时两国利率（年利%，连续计息）为：

	6 个月	12 个月	18 个月	24 个月
r^{DM}	4	4.1	4.2	4.1
$r^{\$}$	3	3.2	3.4	3.6

$t=6$ 个月时两国利率（年利%，连续计息）为：

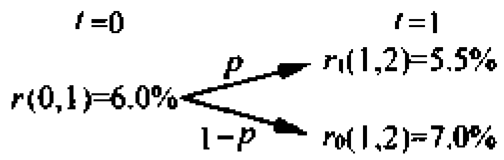
	6 个月	12 个月	18 个月	24 个月
r^{DM}	4.5	4.6	4.8	5.0
$r^{\$}$	3.5	3.6	3.8	4.0

1）若美国公司希望支付固定德国马克利息给德国公司，每半年支付一次年利率 6%，为使互换的价值为零，德国公司应向美国公司支付美元利息的利率应该是多少？

2）6 个月以后（第一次利息互换已经结束）两国的利率水平有一定的变化，如上表所示。汇率为 1 美元/1.5075 德国马克。则此时利率互换的价值为多少美元？

2. 已知 $t=0$ 时一年期无风险利率为 6%（每年计息一次）。一年以后，一年期无风险

利率可能有两种情况如下图。现在两年期的零息票无风险债券市值为 890.04 元。



1）求发生这两种情况的等价鞅测度，并定出 $t=0$ 时刻两年期无风险利率 $r(0,2)$。

2）一欧式买权的标的物为上述零息票债券，执行价格为 940 元，一年以后到期。试为此买权定价。

第十章　风险管理概述

80 年代中期，在伦敦银行界刚出现"金融工程师"的称谓时，指的是那些为银行等金融机构设计构造性方案进行风险管理的专家。因此，金融工程原先的狭义定义是组合金融工具（主要包括形形色色的衍生工具）和风险管理技术的研究。随着七八十年代以来金融创新和金融自由化浪潮席卷西方世界，人们对金融工程的认识迅速拓宽。成立于 1991 年的"国际金融工程师协会（IAFE）"把准确地界定这一新兴学科作为自己的职责之一。由国际金融工程师协会给出的金融工程的广义定义则致力于使金融工程成为一门新兴的学科，是金融科学的产品化和工程化，是现代金融学发展的新阶段。

广义的定义当然涵盖了狭义的定义。但就技术层面而言，狭义的定义也已经扣住了金融工程最核心的部分，这就是风险管理的工具和技术。要成为一名合格的金融工程师，必须掌握现代金融理论，能够依托信息技术（计算机和通讯技术），灵活地应用各种工程方法开展创造性的工程思维活动。默顿认为现代金融理论有三大支柱，这就是货币的时间价值、资产定价和风险管理。即使按金融工程的狭义定义来说，金融工程活动也同样要依靠这三大支柱的支撑。因此，金融工程的基本原理一定要涵盖与这三大理论支柱有关的知识。

风险管理的内容非常广泛，而风险管理的技术与工具又都是与我们在本书前面所讨论的内容紧密相关的。本书是讲述金融工程的基本原理的，因此只对风险管理的技术和工具作简略的概述，但力求反映在这一领域的最新发展。

1. 风险的分类

我们在第二章已经简单地介绍过各种不同类型的金融风险。风险这个概念的范围远远超出金融风险，我们先简单地讲一下风险的分类。

可以从不同的角度对风险进行分类：

按性质来划分，可分为纯粹风险与投机风险。纯粹风险是只有损失可能而无获利可能的风险；投机风险则是既有损失可能，又有获利可能的风险。

按风险的对象分类，主要有财产风险、人身风险、责任风险、信用风险。财产风险是指导致有形财产损毁、灭失或贬值的风险；例如房屋有遭受火灾、汽车有遭受碰撞等损失的风险。人身风险是因自然灾害、意外事故、疾病而导致人的伤残或死亡等风险。责任风险是指个人或团体因行为上的疏忽或过失，依法对他人遭受的人身伤害或财产损失应负的法律赔偿责任的风险。信用风险则是由一方违约对另一方造成损失的风险。

按损失的原因划分，可分为自然风险、社会风险、经济风险、政治风险、技术风险。自然风险是由于自然现象或物理现象造成财产损毁或人员伤亡的风险。社会风险是由于个人

或团体的异常行为造成损害的风险；如盗窃、抢劫、罢工等。经济风险是经济单位在从事经济活动中，因对市场判断失误或投资不当等原因导致损失的风险，如通货膨胀、汇率变动。金融风险是一种经济风险。政治风险是由于政治原因引起社会动荡造成损害的风险，如政局变化、种族冲突、战争等。技术风险是因科学技术的发展而产生的风险，如核辐射、环境污染等。

亚洲金融危机以来，防范总体金融风险的问题成为全社会关注的问题。所以我们还应讨论一下有关总体金融风险的问题。

个体金融风险是个体承受的风险，个体包括个人、家庭、企业（包括金融机构）及其他组织（如学校、医院等）。这是一种微观风险。总体金融风险则是一种宏观风险，和企业（包括金融机构）与家庭所承受的风险不同，其影响波及整个国家、多国地区甚至全球。虽然如何度量总体金融风险或许还是一个需要经济学和系统科学加以研究的问题，但它的全局性特征是非常明显的，其结果会使整个金融系统失稳甚至于崩溃，可能引发经济危机并导致长期萧条。

由总体金融风险引发的危机最显著的表现特征是发生滚雪球式的连锁反应，形成社会风潮，并牵动方方面面。股市崩盘、房地产价格猛跌、货币大幅度贬值、银行发生挤兑、大批银行和其他金融机构倒闭，等等。其后果对于整个国家和社会来说，会非常严重。尤其对经济处于增长时期的发展中国家来说，更是如此。因为有可能使经济发展停滞，甚至陷入社会动乱。

产生总体金融风险的原因是多方面的，大体可以从外因和内因两个方面来探讨。从外因上说，第一个原因是源于国际经济角逐。各国政府为了解决本国的经济问题，有时会采取“嫁祸于人”的政策。例如80年代初美国政府采用高利率和大幅度赤字预算的政策来解决“经济滞胀”问题，迫使日元对美元升值，既打击了日本的商品出口，又导致大量日本资金涌入美国购置房地产。这对日本后来产生泡沫经济有直接的影响，泡沫经济隐含了极大的总体金融风险，进入90年代后日本面临的经济和金融困境就是泡沫经济破灭的后果。第二个原因是国际游资的冲击。每日交易总额为1.5万多亿美元的巨额国际游资无孔不入地在世界各地寻找套利和投机的机会。无论何处只要经济结构有缺陷，国际游资就会依靠现代金融高科技（包括金融本身的高科技和计算机运算、信息处理和远程通讯技术）人为地制造市场不均衡进行大规模的套利和投机，其结果会导致当地金融系统的紊乱。其他的可能源于自然灾害、政治危机和社会动乱等的外部原因，就不仅是经济和金融本身的问题。从内因上说，首先是经济的结构性问题。例如房地产和股票被炒得过热，产生严重的经济泡沫；银行出现大量的呆账和坏账，或出现存贷利率倒挂导致持续亏损；国际贸易出现大幅度逆差，国际收支严重不平衡；国内通货膨胀率高而勉强维持与美元或其他主要工业化国家货币挂钩的“盯住”汇率制度，破坏了汇率和利率的平价关系；过早地全面开放金融，对国际游资的套利和投机活动敞开大门；未有及时地实现产业升级，市场供需关系隐藏着严重的不均衡危险；等等。第二个重要的原因是金融系统不发达，金融市场转移和配置收益和风险的功能不够强。第三是因为金融监管不健全、缺乏完善的监管和自律体系（包括法规、制度和实施机制），使个人和机构有违法违规操作的可乘之机。第四是缺乏风险意识，尤其是金融机构本身缺乏应有的进行风险管理的机制、技术和能力。

从以上简略的分析可以看出，总体金融风险产生的原因涉及经济和金融的深层次问题。要讨论如何加以防范的问题，首先必须正确理解金融风险的实质。金融作为一种产业，一样有它的产品、创造产品的企业和交换产品的市场。金融市场通过交易金融产品来实现全社会资本资源的流动和配置。交易性的金融产品被称为金融商品，其中标准化的、在市场上广泛流通的金融商品被称为金融工具（即有价证券）。金融工具最基本的特性是流动性、收益性和风险性。风险是指未来收益的不确定性，所以，风险和收益是生长在金融工具上的一对不可分离的连体儿。流动性是指金融工具即时转变成现金的能力，实际上也是一类特殊的风险，但因为对于金融和财务问题而言，流动性的管理非常重要，所以往往把它单独列出考虑。

因为金融市场的效率高于其他的商品和服务市场，金融工具的价格波动比任何别的商品都要频繁和激烈，所以，金融工具的风险性是其本质属性。在市场经济条件下，不可能完全消除风险，而只能对风险进行控制和管理。现代金融学的基本理论假设是市场的参与者大体上都是风险厌恶型的，要承受较高的风险，必须相应有较高的预期收益作为承受风险的补偿，"高风险高收益"是金融市场配置收益和风险时所遵循的基本规律。因此，不能简单地把风险看作只有负面的作用，风险同时隐藏着创造大的收益的潜在可能性（这是风险投资的基本原理）。

金融风险会导致亏损（如果实际发生的是向不利方向的变动），而亏损的积累或发生重大亏损会把企业推向破产。如我们在第二章中已经指出的，特别要注意的是违约风险，因为其他类型风险所产生的损失都会引发违约风险，而违约风险具有滚雪球式的连锁反应的危险性。如果一家企业因买方违约而收不回一笔销售应收款，因此发生资金周转困难而不能采购急需的零配件的话，就会打乱整个生产经营秩序。于是，这家企业将不能支付它的原材料、能源等应付款，违约风险就会像瘟疫一样地传播开来。在金融市场上则更是如此，一笔资金被套牢而发生违约，会顺着债务链迅速地具有放大效应地扩散开来，有可能导致总体金融风险。从这个角度讲，总体风险和个体风险是紧密地联系在一起的。我们讨论防范总体金融风险，必须考虑微观机制的运作。金融监管，也首先必须从微观上管住，即必须在企业和市场的层面上监管企业和市场的运作。宏观指标的监控是有意义的，但如果不落实到微观机制的层面，在实践中将是非常靠不住的。

防范总体金融风险的一条最为基本的原理是：

风险必须由愿意接受风险并有能力承受风险的市场参与者承担。

强迫别人接受他们所不愿承担的风险，可能发生过高的成本，也可能会在减少一种风险的同时，增加另一种风险（如银行把利率风险转嫁到借款人身上时，可能会增加违约风险）。有的企业资本雄厚，负担得起因风险而发生的亏损，不会因此打乱正常的生产经营活动，因此也不会把风险扩散出去；有的企业则不然，因风险发生的亏损可能是致命的并因此产生扩散效应。由此出发，防范总体金融风险的金融监管所要遵循的最基本原则就应当是：

必须严格限制市场的参与者承担超出其能力的风险。

综上所述可知，发展管理风险的微观机制对于防范总体风险具有重要的作用。只有充分发展进行风险管理的微观机制，才可能真正做到使市场参与者承担他们愿意承担而且承担得起的风险。

2. 风险暴露和风险管理

由于某种特殊的原因而承受某类特殊的风险，被称为“暴露”于某类风险之下，或具有某种风险暴露。例如，对农业种粮户来说，具有歉收和粮价下跌的风险暴露；进出口企业具有汇率方面的风险暴露；商业银行具有借款人违约的风险暴露；等等。占有任何一种资产，都有该资产市场价值下跌的风险暴露。

然而，进行任何一笔市场交易，不能采取绝对的或抽象的观点来看待有关的风险暴露。购买或者出售一项资产，可能会增加某种风险暴露，也可能会减少某种风险暴露，取决于这项资产与原来所持有的资产在收益/风险方面的相关关系。同样一笔交易对于不同的市场参与者来说对其风险暴露的影响也是不同的。种粮户建立新的粮食期货空头仓来锁定将要收获的庄稼的出售价格，是减少了对于粮价波动的风险暴露；但是炒作粮食期货的投机者建立同样的新的空头仓却会增加对粮价波动的风险暴露。套期保值者通过对冲交易来减少风险暴露，投机者则通过增加风险暴露来牟取风险利润。

所有的金融/财务决策实际上都是收益和风险的权衡。所谓风险厌恶(risk aversion)是指人们对风险暴露的态度，用于度量人们为了降低风险愿意付出的代价，或者反过来，人们要求因为风险暴露而获得的补偿。比如说，如果你希望未来的收益能够比较准确地预见，为此愿意接受比较低的预期收益，那么你就是风险厌恶型的。对于相同的预期收益，人们希望风险暴露比较小，这说明人们经常是风险厌恶型的。我们在介绍风险中性假设时已经讨论过这些概念(参见第五章第 6 节)，这里只是进一步说明金融或财务决策是依据人们的风险偏好进行的权衡行为：这就是在减少风险暴露所能得到的好处和为此要付出的代价之间的权衡。

这样，我们可以给出风险管理的定义：

为减少风险暴露进行效益和成本权衡而采取的行动(包括不采取行动在内)称为风险管理。

人们有时会因为进行风险管理既付出了成本又失去了本来可以获益的机会而懊悔不已，旁人也会因此指责风险管理的价值，但这只是事后诸葛亮的“高明”。风险管理的决策是与未来时间的不确定性联系在一起的，到事后再评价则不确定性已经消除了，所以不能用事后的观点来看待事前的决策。判断某项风险管理的决定是否正确，只有在做出决定的时刻能够获得的信息的基础上进行评价才是公正的。在实践中，往往难于区别一项决策的正确性究竟是因为决策技巧的高明还是仅仅依靠运气，这是风险管理工作经常面临的困惑。

虽然风险管理主要是面向金融/财务决策的，但实际上所有的资源配置问题都涉及风险管理问题。对于一个家庭来说，家庭成员会面临疾病、丧失工作能力、丧失生活自理能力甚至死亡的风险，也会遭遇失业的风险，家庭财产如住房、耐用消费品都有损坏和贬值的风险。家庭既有负债方面的风险（如不能按期支付信用卡欠款和房租、水电费等），也有投资方面的风险（如存款银行倒闭、购买的股票和共同基金跌价等）。对于企业来说，有生产能力方面的风险，如机器设备的损坏、原材料和零配件未能及时到货、能源供应不足等。既有自身产品价格的变动风险，也有供货（原材料、零配件等）成本变化的风险。因此，家庭和企业的任何决策都涉及大量的风险管理问题，其他的社会组织的情况其实也类似。

政府对风险管理起着重要的作用。政府通过对市场的监管和干预，通过提供社会保障和对企业的最终担保（如银行的存款保险）来改变风险暴露，影响家庭和企业的风险管理。政府在自身的决策中也涉及各种各样的风险管理问题，也经常采用与企业类似的风险管理技术和工具。要提请注意的是，所有的风险管理都是有成本的。因此，政府行为改变风险暴露的行动所发生的成本最终是转嫁到纳税人头上的。

风险管理的步骤可以分为如下5步：

第一步，*风险识别*　首先要搞清楚风险管理的对象，即需要加以管理的主要风险暴露。对实际上不存在的风险暴露进行风险管理，所花费的成本无疑是浪费。

第二步，*风险评估*　在识别出需要管理的风险暴露之后，风险评估就是对所要采取的风险管理进行效益/成本的量化分析。此类工作通常需要专家和专门技术的支持，例如与保险有关的风险评估工作是由精算技术作支持的，在证券投资方面的风险评估则往往需要向券商咨询。

第三步，*风险管理技术的选择*　选择合适的风险管理技术对于成功的风险管理是至关重要的。存在四种基本的风险管理技术：

1）*规避风险*　如果开展某项业务会带来某种风险暴露，那么不从事这项业务就不会承受这种风险，也就是采取躲避风险的态度。当然，采取这种做法也是效益/成本权衡的结果。而且，并不是所有的风险都可以规避得了的。“天有不测风云，人有旦夕祸福”，都是规避不了的风险。

2）*防范和控制风险*　有些风险是可以预先加以防范和控制的。例如采取很好的防火措施就可以减少火灾的风险暴露，注意饮食卫生可以减少疾病的风险暴露，等等。

3）*承受风险*　在进行效益/成本分析后，不采取任何行动也是一种风险管理的办法。不采取任何行动意味着依靠自己本身的资源来吸收风险。例如，不购买任何医疗保险、一旦生病自己付医疗费的办法就是如此。但这里有一点需要加以说明，因为没有意识到风险暴露而不采取任何措施和有意识地承受风险，二者的意义是不一样的。后者是一种风险管理的技术，是效益和成本分析的结果，前者则不是。因为没有意识到风险暴露而不采取行动，可能产生非常严重的后果，远不符合决策者的风险偏好和承受风险的能力。

4）*转移风险*　把自己不愿意承受的风险暴露转移给其他人，这是通过市场交易进行收益/风险的流动配置的最主要的方式，也是金融工程所最为关注的技术。出售有风险资产、购买保险以及自己对风险暴露不采取行动而一旦造成损失由别人来补偿的做法都是转移风险的例子。

转移风险有三种基本的方法：保险、风险分散化和套期保值。我们在后面要进行专门的论述。

第四步，实施　在选定了风险管理的技术后，一定要比较实施的成本，尽量减少实施成本。如果决定购买保险，那要货比三家；如果决定投资于证券，要比较投资于共同基金还是直接通过经纪人购买股票划算；等等。

第五步，检查　对风险管理工作要进行定期的检查和修正。因为会出现新的情况，可以得到新的信息，所以应当采取根据反馈信息进行动态调整的策略。

3. 风险转移方法

(1) 风险转移方法 1：保险

保险是通过支付保险费(可看作是保险单的价格)来避免损失的转移风险的方法。实质上，是用确定的损失(支付保险费)来替代可能遭受更大损失的做法。向商业保险公司投保，就是以交保险费为代价，将风险转嫁给保险公司。保险公司按保险合同约定承担赔付责任。对于损失概率较小而损失金额较大的风险，通常较为广泛地运用保险的方法。

传统的保险理论认为，采用保险的方法转移风险只适合纯风险，因为保险只企求消除掉损失而不奢望因此获利。投机性的风险通常不是可保风险。但从金融工程的角度看，保险是可以消除掉损失的风险而保留获利可能的风险转移方法，因此它是和期权理论紧密结合在一起的。例如，企业为了避免未来进货的价格波动风险，向供货商预付定金并预定供货价格，这就相当于购买了保险，定金就是保险费，同时又可看作是建立了一个买权的多头，定金就是期权费。

但是，通常的商业保险处理的是小概率大损失额的风险，保险费(即保险产品的价格)的定价技术和经典的期权定价理论(如布莱克-舒尔斯定价模型)是有区别的，因为保险标的发生损失的概率分布和期权标的物价格变化的概率分布是不一样的。传统的保险定价是依靠统计学和精算技术来支持的。广义地讲，保险是金融的一个分支，金融工程势必在保险领域有广泛的应用。事实上，西方保险学界和保险业界的许多人士都对金融工程有浓厚的兴趣。但是，保险和精算已经形成自己的学科特色，详细地讲解超出本书的范围。我们在这里仅仅是把保险作为一种转移风险的方法来讨论。

通常的保单即保险合约中含有以下一些特别的条款：

1) 排除性条款　例如购买人寿保险的投保人自杀，保险公司将不予赔付。

2) 最高赔付额　保单通常都设定最高赔付额。

3) 扣付额　例如对汽车保险来说，当汽车损坏的损失额在 1 000 元以内时保险公司不赔付，超出 1 000 元时赔付超出部分。

4) 配合赔付　保险公司只赔付总额的一个百分比，比如说 80%，剩余部分由投保人自理，这是一种按比例的扣付。

许多金融交易在本质上是保险，例如：

金融担保　这是对信用风险的保险，如果被担保者违约，则由提供担保的机构承担履约的责任。签发信用卡的银行等金融机构实际上向接受信用卡付款的商家提供了付款的保险。

利率顶和利率底　出售利率顶和利率底的机构提供了这样一种保险，当市场利率越出界限时承担赔付越界部分利息的责任。

各种期权都带有保险的性质，如我们后面要介绍的组合保险，是非常重要的投资策略，为投资组合的收益提供了保险。

（2）风险转移方法 2：风险分散化

风险分散化是通过分散化的投资在投资组合内实现自然对冲，消除非系统风险，其结果是大大降低对单项有风险资产的风险暴露程度。马柯维茨投资组合理论的核心思想就是风险分散化。

风险分散化可以采用直接投资的方式，也可以采用金融投资的方式。就直接投资而言，可以通过投资于许多不同的企业来分散化，也可以通过一个企业分散化地投资于许多不同的项目；或者，采用金融投资的方式，分散化地投资于不同企业发行的有价证券。

"对冲"是下面讲的第三种风险转移方法"套期保值"的另一个译名，英文都是 hedge。自然对冲是指投资组合内的有风险资产的未来收益的变化不是全部完全正相关的，因此各自的不确定性在某种程度上会彼此互相抵消。而套期保值可以看作是人工对冲，即人为地构造相反头寸来实现未来收益不确定性的相互抵消。

这种自然对冲的概念不仅限于资产组合，还可以拓展到把负债组合一起包括进来。这是资产/负债综合风险管理技术的基本思想，即设法使资产组合收益的不确定性和负债组合支付的不确定性形成自然对冲。但也有人认为这种匹配资产/负债的技术应该归入人工对冲，因而属于套期保值。我们将在后面讨论资产/负债综合管理技术时再对此进行讲解。

（3）风险转移方法 3：套期保值

套期保值与保险的不同，在于减少风险暴露的同时放弃了可能获利的机会。种粮户建立期货空头仓锁定了出售粮食的价格，规避了粮价下跌的风险，同时也丧失了粮价可能上升的获利机会。

可以用远期合约、期货来建立现货的相反头寸实现套期保值，也可以建立互换协议对利率风险和汇率风险作套期保值，更可以通过构建各种组合金融工具对所持的头寸作套期保值。设计各种套期保值策略和工具是金融工程师的重要工作。基本的设计原理是我们在本书中反复强调的复制技术（即无套利均衡分析），另一方面，则应尽量降低套期保值的成本。

4. 套期保值的基本原理

套期保值的基本原理是建立对冲组合，当产生风险的一些因素发生变化时，对冲组合的净价值应保持不变。

例如我们的组合由 3 项资产 A_1，A_2，A_3 组成，组合的价值 V 为

$$V = n_1A_1 + n_2A_2 + n_3A_3$$

其中 n_1、n_2，n_3 分别是资产 A_1，A_2、A_3 的份数。设计对冲组合就是要适当地选取 n_1，n_2 和 n_3，当影响资产价格的因素 x 发生变化时，使组合的价值 V 尽可能不变。如果 n_1、n_2，n_3 的选取使得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = n_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} + n_3 \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0$$

就能近似地做到这一点，因为当 x 发生微小变化 δx 时，有

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x = 0$$

一般地说，当影响资产价格变化的因素的数目小于组合中资产的种类数时，这样构筑对冲组合的做法是行得通的。

(1) 德尔塔(Δ)对冲

如果组合内的资产是同一标的物股票的不同衍生品，标的物股票的价格变化就成为影响各项资产，进而影响整个组合的价值的因素。希腊字母德尔塔(Δ)表示的是衍生资产的价格对标的物股票价格变化的敏感度，用偏导数来表示。如，$\Delta_A = \frac{\partial A}{\partial S}$，$\Delta_V = \frac{\partial V}{\partial S}$，等等。

对于期权来说，依据布莱克-舒尔斯公式，买权和卖权的德尔塔分别为

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) > 0$$

$$\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S} = -N(-d_1) < 0$$

当 $S \to 0$ 时，$\Delta_c \to 0$，$\Delta_p \to -1$；当 $S \to \infty$ 时，$\Delta_c \to 1$，$\Delta_p \to 0$。

对于远期合约来说，因为 $f(t) = S(t) - Xe^{-r_f(T-t)}$，所以有

$$\Delta_f = \frac{\partial f}{\partial S} = 1$$

对于期货来说，根据第九章的讨论，因为期货采取盯市交易规则，所以有 $F(t) = (F_D - F_{D-1}) - (F_D - F_t) = F_t - F_{D-1} = S(t)e^{r_f(T-t)} - F_{D-1}$，因此

$$\Delta_F = \frac{\partial F}{\partial S} = e^{r_f(T-t)}$$

所谓德尔塔对冲是这样构筑对冲组合，当标的物股票的价格发生变化时，对冲组合的价值保持不变。由此可见，以 1 份远期合约的相反头寸与 1 份标的物现货头寸组合到一起，就构成对冲组合。因此，可以采用远期合约对标的物现货作严格和完全的套期保值。而为了对冲 1 份期货头寸，则需要持有 $e^{r_f(T-t)}$ 份标的物现货的相反头寸。所以，用期货作套期保值，必须动态地进行头寸的调整，这是盯市规则所决定的。下面我们马上会看到，远期和期货的伽马(Γ)值都为 0，就更加说明我们这里的论断。

德尔塔(Δ)对冲的对冲组合称为德尔塔中性(Δ neutral)的。

(2) 伽马(Γ)对冲

仅在标的物股票的价格只发生微小变动时，德尔塔对冲才是有效的，因为只考虑了 1 阶导数。如果标的物股票可能发生较大的变化，那么，对冲组合就要考虑 2 阶导数。于是引入伽马(Γ)对冲的概念。

伽马度量的是衍生资产的凸性，即 2 阶导数。对于不付红利的欧式期权来说，有

$$\Gamma_c = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

有

$$\Gamma_c = \Gamma_p > 0$$

显然，当$S\to 0$和$S\to\infty$时，都有$\Gamma\to 0$。在期权临近两平状态时(即S接近预定价X时)，其Γ值最大。在接近到期期限时，处于两平状态的期权的Γ值会非常大，这意味着此时期权头寸的价值对股票价格的变化极其敏感。

标准正态分布累积函数的导数的计算公式是

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

当标的物具有其他特性(如标的物股票支付红利，标的物是股票指数、外汇、期货等)时，按照第六章和第九章介绍的方法，不难算出相应的Γ值。例如支付连续红利率η的欧式期权，其Γ值为

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-\eta(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

当η是外汇无风险利率时，上式就是外汇欧式期权的Γ值。当η是无风险利率r_f，而S取作期货价格F时，上式就成为欧式期货期权的Γ值。

显然，远期合约和期货的伽马值都为0。

一个对冲组合是伽马(Γ)对冲的，意思就是这个组合的Γ值为0。即有

$$\Gamma_V = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial\Delta_V}{\partial S} = n_1\frac{\partial\Delta_{A_1}}{\partial S} + n_2\frac{\partial\Delta_{A_2}}{\partial S} + n_3\frac{\partial\Delta_{A_3}}{\partial S} = n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3 = 0$$

这样的对冲组合称为伽马中性(Γ neutral)的。

一个对冲组合如果既是德尔塔中性又是伽马中性的，那么就可以在标的物股票的2阶量变化上保持对冲组合的价值，即可以抵抗标的物股票较大幅度的变化。

例1 我们用标的物股票和两个具有不同执行价的期权来构筑既是德尔塔中性又是伽马中性的对冲组合。假如目前股票的价格是每股$S=50$元，年波动率$\sigma=50\%$，无风险利率为$r_f=3\%$。两个期权都是距到期日还有10周的欧式买权，但预定价不同。第一个买权的预定价是$X_1=50$元，正好处于两平状态；第二个买权的预定价是$X_2=55$元，处于虚值状态。不妨假定卖空第一个买权，再来选择标的物股票和第二个买权的数额，以此设计对冲组合。

利用布莱克-舒尔斯公式，可以算出$\Delta_1=0.554$，$\Gamma_1=0.0361$和$\Delta_2=0.382$，$\Gamma_2=0.0348$。请注意，对于标的物股票，有$\Delta_S=1$和$\Gamma_s=0$。现在卖空1份第一个期权，买入n_S份标的物股票和n_2份第二个期权来构筑对冲组合，有

$$\begin{cases} n_S - 0.554 + 0.382n_2 = 0 \\ 0 - 0.0361 + 0.0348n_2 = 0 \end{cases}$$

解得$n_S=0.158$，$n_2=1.037$。

这样构筑的对冲组合，当标的物股票价格从50元变到51元时，其价值的变化小于0.001元；而当股票价格从50元变到60元时，组合的价值变化小于0.20元。因此这样的对冲组合的套期保值功能是很好的。

(3) 西塔(Θ)对冲、维伽(Λ)对冲和洛(*rho*)对冲

西塔(Θ)度量资产价值对时间流逝的敏感度。对于期权来说，有

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - r_f X e^{-r_f(T-t)} N(d_2) < 0$$

$$\Theta_p = \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + r_f X e^{-r_f(T-t)} N(-d_2)$$

有两点需要说明：第一，随着时间接近期权到期日，买权价值下降基于两条原因，一是接近到期日时期权价格的波动性变小，二是因为预定价不再折现得那么厉害（回忆一下布莱克-舒尔斯公式，包含预定价的那一项是负的）。第二，Θ_c 是负数并不意味着预期买权价格下跌，因为随着时间的流逝，标的物股票的价格是预期要上升的，回忆一下 $\Delta_c > 0$，可知买权价格随时间变化的原因是多方面的，不只时间本身一个因素。

远期合约的西塔（Θ_f）值为 $\Theta_f = r_f X e^{-r_f(T-t)}$，期货的西塔（$\Theta_F$）值为 $\Theta_F = -r_f S(t) e^{r_f(T-t)} + S'(t) e^{r_f(T-t)}$。

维伽有时也称为兰布达，所以我们用希腊字母 Λ 表示，它度量衍生资产的价值对标的物股票价格波动率变化的敏感度。对于期权来说，有

$$\Lambda_c = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}N'(d_1) > 0$$

$$\Lambda_p = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = \Lambda_c$$

在标的物股票的价格接近预定价的现值 $Xe^{-r_f(T-t)}$ 时，期权的维伽值最大；当标的物股票的价格远离预定价时（期权处于深度实值或深度虚值状态时），期权的维伽值接近于 0。

和伽马的情况类似，当标的物股票支付连续红利率 η 时，期权的维伽值为

$$\Lambda_c = S\sqrt{T-t}N'(d_1)e^{-\eta(T-t)} = \Lambda_p$$

维伽值是期权交易商非常关注的一个参数，尤其是标的物资产的波动率不稳定时。

显然，远期和期货的维伽值都是 0。

洛（rho）度量的是衍生资产的价格对利率变化的敏感度。对于期权来说，有

$$rho_c = \frac{\partial c}{\partial r_f} = X(T-t)e^{-r_f(T-t)}N(d_2) > 0$$

$$rho_p = \frac{\partial p}{\partial r_f} = -X(T-t)e^{-r_f(T-t)}N(-d_2) < 0$$

远期合约的洛值为 $rho_f = (T-t)Xe^{-r_f(T-t)}$，期货的洛值为 $rho_F = (T-t)Se^{r_f(T-t)}$。

显而易见，根据相同的原理，可以建立西塔对冲、维伽对冲和洛对冲的对冲组合，对时间、标的物资产的波动率和利率的变化作套期保值。

这样，对于同一标的物的衍生资产及其组合来说，受各种因素的影响导致的价值变化可表示为

$$\delta V = \Delta_V \delta S + \frac{1}{2}\Gamma_V(\delta S)^2 + \Theta_V \delta t + \Lambda_V \delta\sigma + rho_V \delta r_f$$

如果我们设计对冲组合，使之对所有这些希腊字母所代表的特征都成为中性的，那么就对所有这些因素的变化都实现了套期保值。

回忆一下布莱克-舒尔斯随机微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+r_f S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=r_f f$$

（注意，这里 f 不表示远期合约，表示的是不分红股票的欧式期权），这个方程可以用上述希腊字母改写为

$$\Theta_f+r_f S\Delta_f+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma_f=r_f f$$

这就给出了不分红欧式期权的德尔塔、伽马和西塔之间的关系。

现在我们再用一个例子来进一步说明风险管理（尤其是套期保值）的原理。

假如我们发现市场上有一买权的价格 c 高于按布莱克-舒尔斯期权定价公式计算的均衡价 c_{BS}，于是认为出现了套利机会。套利策略是卖空这一买权，同时按布莱克-舒尔斯公式来复制这一买权的多头。从理论上讲，这样可以套取价值为 $(c-c_{BS})$ 的无风险利润。按照布莱克-舒尔斯公式的框架，需要不断地调整对冲组合使之保持平衡，而这种调整是无需成本的，到该买权的到期日，复制的买权会产生与被复制的买权完全相同的损益情况，因而可以完全对冲原来卖空的那个买权。复制组合的多头和原来那个卖空的买权放到一起就构成一个对冲组合。所以，这样做在理论上可以无风险并且无成本地套利。但是在实践中要这样做有很多障碍。首先，不可能非常频繁地调整对冲组合的头寸，因为每次调整都要发生交易成本，所以只能隔一段时间调整一次。但是，隔一段时间再调整一次会给对冲组合带来风险。因为调整有时是增加所持有的头寸，而有时则是减少之，所以对于对冲组合来说，有时是现金流出，有时是现金流入。如果对资产价值的波动率能够估算得很准，并不断地进行调整的话，所有的现金流入和流出加总起来应该接近于 0，但隔一段时间再调整一次就不能保证这种现金流的平衡。由例 2 能看出，从预期来看平衡是应当保持的，但实际发生的情况可能会有所偏离，从而造成风险。

例 2　继续用我们前面那个预定价为 $X=50$ 元的买权空头的例子。假定我们每周调整一次组合的头寸，因此所有的数据都以周（每年以 52 周计）为单位。标的物股票的按周计算的波动率为 $\sigma_w=\sqrt{\frac{(50\%)^2}{52}}=0.069$，无风险周利率为 $r_{wf}=3\%/52=0.00058$。

假定期权距到期日还有 10 周时间，即 $T=10$ 周，在起始日 $t=0$ 时，标的物股票的价格为 $S(0)=50$ 元。可算得用布莱克-舒尔斯期权定价公式来复制这个买权的组合的参数为

$$c_{BS}(S,t)=c_{BS}(50,0)=4.5$$
$$\Delta(50,0)=0.554=N(d_1)$$
$$L(50,0)=23.21=Xe^{-r_{wf}(T-t)}N(d_2)$$

此时复制组合为

$$H(50,0)=\Delta(50,0)S(0)-L(50,0)$$

1 周后，假如股票价格保持不变，即有 $S(1)=50$ 元，原来的那个复制组合的价值成为

$$0.554\times 50-23.21\times e^{0.00058}=4.48$$

此时新的复制买权的组合的参数为

$$c_{BS}(50,1)=4.26$$

$$\Delta(50,1) = 0.5513$$

$$L(50,1) = 23.30$$

新的复制组合为

$$H(50,1) = \Delta(50,1)S(1) - L(50,1)$$

复制组合的头寸调整总的看来好比是卖掉旧组合(获得 4.48 元)再买进新组合(花费 4.26 元),这样,调整的结果有 0.22 元的现金流入。

再看 2 周后,假如股票价格跃升到 $S(2)=55$ 元,复制组合的价值成为

$$0.5513 \times 55 - 23.30 \times e^{0.00058} = 7.00$$

此时新的复制买权的组合的参数为

$$c_{BS}(55,2) = 7.22$$

$$\Delta(55,2) = 0.7283$$

$$L(55,2) = 32.83$$

复制组合的头寸调整是卖掉旧组合(获得 7.00 元)再买进新组合(花费 7.22 元),这样,调整的结果有 0.22 元的现金流出。

于是,1 周后的现金流入(+0.22 元)和 2 周后的现金流出(−0.22 元)正好相抵,总的现金流入和流出加总起来为 0。

但是,如果 2 周后股票的价格骤跌至 45 元,则复制组合的价值成为

$$0.5513 \times 45 - 23.30 \times e^{0.00058} = 1.49$$

此时新的复制买权的组合的参数为

$$c_{BS}(45,2) = 1.79$$

$$\Delta(45,2) = 0.3388$$

$$L(45,2) = 13.45$$

在复制组合的头寸调整中,卖掉旧组合(获得 1.49 元)再买进新组合(花费 1.79 元),这样,调整的结果有 0.30 元的现金流出。

这样一来,1 周后的现金流入(+0.22 元)和 2 周后的现金流出(−0.30 元)就不能相抵,造成 0.08 元的损失。

隔一段时间调整一次组合的头寸的做法从预期上讲总的现金流入和流出为 0,但在实际中可能会发生偏差,从而带来风险。对于我们在这里讲解的例子(不分红股票的欧式买权)来说,这一点是可以从数学上加以证明的。我们把数学证明放到本章的附录中。

但是上述结论的前提条件是能够准确地估算标的物股票的价格波动率。如果对波动率的估算不准确,在我们的例子中(实际买权是空头,复制组合是多头),若未来的波动率高于我们原来的预期,则损失的机会大于获益的机会,总起来说是亏损。这好比是出售某样东西后“价格”(这里指波动率)往上走,就造成了亏损。反过来,若未来的波动率低于我们原来的预期,则获益的机会大于损失的机会,总起来说是盈利。这好比是出售某样东西后“价格”(波动率)朝下走,就带来了盈利。

5. 组合保险技术

证券组合保险技术是 80 年代初期由鲁宾斯坦(M. Rubinstein)和利兰德

(H. Leland)最早提出的，是保险的概念在证券投资中最直接的应用。

股票期权可以用来保证股票投资获得最基本的报酬率。当你在购买 1 支股票的同时购买 1 份这一股票的卖权，那么你投资于这支股票所能获得的价值不会低于这一卖权的执行价。这一卖权相当于为这支股票的收益提供了保险，卖权的期权费相当于保费。

例 有 1 支股票现在的价格是 56 元，1 年内不分红，你希望投资于这支股票来赚取资本收益。但是 1 年后股票的价格可能下跌，为此购入以此股票为标的物，预定价为 50 元，1 年后到期的欧式卖权。市场无风险利率是 $r_f=8\%$，股票的波动率经测算为 $\sigma=30\%$，用布莱克-舒尔斯期权定价公式算的卖权的均衡价格是 2.38 元。这样，1 年后如果股票价格高于 50 元，可以让卖权作废。尤其是高于 56 元的话，就能赚到资本收益。如果股票价格低于 50 元，就可以执行卖权，以预定价 50 元脱手，从而不会被套住。这就相当于购买了一项扣付额为 6 元的保险(6 元以内的损失自负，6 元以上的损失由出售保险者理赔)。2.38 元就相当于保费。

实际的问题在于，是否市场上正好有这支股票的卖权交易。进一步说，为了分散化消除非系统风险，经常要采取组合投资的策略。从道理上讲，同单支股票一样，如果存在以股票组合为标的物的卖权，则完全可以按上述相同的方法为股票组合的投资提供保险。可是，股票组合是五花八门的，因此一般来说，在市场上不可能正好找到组合的卖权(有一些组合的期权是存在的，如某些指数的期权，像标准普尔 500 的指数期权)。组合保险技术的核心思想就在于无套利均衡分析的复制技术，复制出所需要的卖权作替代物。这一创造，可以看作是典型的金融工程产物。

对于一个证券组合，如果能测算出有关的参数(例如组合的波动率 $\sigma_{\text{portfolio}}$)，就能用布莱克-舒尔斯期权定价公式及其变形来复制所需要的卖权。如要复制证券组合的欧式卖权，复制公式就是读者已经熟悉的

$$p(t)=-S(t)N(-d_1)+Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)$$

其中，

$$d_1=\frac{\ln(S(t)/X)+(r_f+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

因此，复制卖权的涵义就是证券组合的空头加上无风险证券的多头的组合。这样，带保险的证券投资组合就变成

$$\begin{aligned}S(t)+p(t)&=S(t)[1-N(-d_1)]+Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)\\&=S(t)N(d_1)+Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)\end{aligned}$$

(对于累积正态分布函数来说，有 $1-N(-x)=N(x)$)。

于是，带保险的证券投资组合就是一部分投资于证券组合，一部分投资于无风险证券。设投资于证券组合的比例为 $\omega(t)$，投资于无风险证券的比例就是 $1-\omega(t)$，有

$$\omega(t)=\frac{S(t)N(d_1)}{S(t)N(d_1)+Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)}$$

这两部分的投资比例 $\omega(t)$ 和 $1-\omega(t)$ 要随着时间 t 的变化不断地进行动态调整。下面是 $\omega(t)$ 的一些变化规律。

1) 当股票的价格高于预定价(即 $S(t)\geq X$)时，$\omega(t)>50\%$。

2）当股票或证券组合的价格 $S(t)$ 上升时，$\omega(t)$ 变大，否则反之。

3）当 $t\to T$ 时，出现两种情况：若 $S(t)>X$，则 $\omega(t)\to 1$；若 $S(t)<X$，则 $\omega(t)\to 0$。

我们把这 3 条变化规律的证明放到数学附录里。

由这 3 条规律我们可以发现，这样的策略确实能对证券组合投资起到保险的作用，而这种策略必须是动态调整的。由我们前述关于复制组合的成本问题（参阅本章数学附录 1）可知，动态调整现金流入和流出总和的预期值为 0。因此，只要证券组合的波动率 $\sigma_{\text{portfolio}}$ 测得比较准，适当地安排调整周期，证券组合保险的投资策略是可以成功的。

最后，需要指出的是，组合保险能够保证获得的最高的有保障投资收益不可能超过投资于无风险证券的收益。这一点的证明也放到数学附录里。

组合保险技术在 80 年代上半期曾经非常流行。但是，1987 年 10 月 19 日（黑色星期一）的美国股市崩盘，其一部分原因在于遵照组合保险模型进行交易的投资者的巨额抛盘。由于采取计算机操作的程序化交易，遵循互相类似的组合保险模型的指令集中抛售，使股票和指数期货的市场价格一泻千里。这正好说明当大家都在市场上采用同一交易策略时，就可能会带来意想不到的坏的后果。因此，在此之后，这种交易策略在美国市场上就大为萎缩了。不过，这种交易策略对于新兴的中国资本市场，则完全可能仍然是有魅力的。

6. 久期与凸性

(1) 久期

久期（duration）的概念最早是麦卡莱（F. R. Macaulay）在 1938 年提出的，最基本的久期概念就称为麦卡莱久期。久期最先是用来度量债券的价格对利率变化的敏感性的，而且假定表示利率的期限结构的国库券的收益曲线是平坦的。

读者已经很熟悉，债券（可以推广到所有具有固定收益现金流的资产）的均衡定价是

$$P_0 = PV = \sum_{t=1}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

其中 r 是适合于当时的市场利率环境（利率的期限结构）和债券（资产）风险性质的折现率。麦卡莱久期的定义是

$$D = \sum_{t=1}^{N} \left[\frac{\dfrac{C_t}{(1+r)^t}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t}} \right] t = \frac{1}{P_0} \sum_{t=1}^{N} \left[\frac{C_t}{(1+r)^t} \right] t$$

所以，久期实际上是一个加权平均的时间长度。对于折现债券来说，因为所有的 $C_t=0, t=1,\cdots,N-1$，从而 $D=N$，即折现债券的久期就是债券的到期期限。对于所有期间有现金流发生的债券（资产）来说，久期都短于到期期限。

但是，久期还可以有其他的解释。我们改写一下上面的久期表达式

$$D = \sum_{t=1}^{N} t \left[\frac{C_t/P_0}{(1+r)^t} \right]$$

这样，因为所有的 $\left[\dfrac{C_t/P_0}{(1+r)^t}\right]$ 加起来为 1，可以把久期解释为以时间 t 为权重，在时间 t 支付的现金流的折现值占整个债券（资产）价值的比例的加权平均值，所以也是债券（资

产）支付的加权平均。这也是麦卡莱最原始的解释。

久期也可解释为债券（资产）的价格对其折现率（利率）变动的弹性。因为有

$$\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}=-\sum_{t=1}^{N}\left[\frac{C_t}{(1+r)^{t+1}}\right]t=-\frac{DP_0}{1+r}$$

即有$\dfrac{\mathrm{d}P_0/P_0}{\mathrm{d}r/(1+r)}=-D$，所以久期是价格对利率的弹性。再改写一下，有

$$\frac{\mathrm{d}P_0}{P_0}=-D\frac{\mathrm{d}r}{1+r}$$

如果市场利率发生变化 Δr，由此式可以估算出价格的变化 ΔP_0。

表面上看，好像债券（资产）的到期期限越长，久期也就越长。其实不然。对于相同息票利率和到期收益率的债券型金融资产来说，随着到期期限的增大，久期先是变大，超过一定期限后会逐渐变小，并收敛到一个确定的数值。

如果一债券有 N 次利息支付，支付的时间距离目前的时刻分别是 $\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\cdots,\alpha+N-1$，其中 $0<\alpha<1$。这意味着第一次支付距开始时刻不到 1 个单位时间。按照前面久期的相同算法，作一点小小的数学变换，可以得到

$$D=\frac{1}{\sum\limits_{t=1}^{N}\dfrac{C_{t+\alpha}}{(1+r)^t}}\left[\sum_{t=1}^{N}\frac{tC_{t+\alpha}}{(1+r)^t}\right]+\alpha-1$$

因此，这种首次支付距起始日不到 1 个单位时间的债券（资产）的久期是两个部分的和，即相隔单位时间的 N 次支付的现金流的久期加上 $\alpha-1$。

对于表示利率的期限结构的国库券的收益曲线不是平坦的情况，则代表债券（资产）价值的折现现金流现值应为

$$P_0=PV=\sum_{t=1}^{N}\frac{C_t}{(1+r_t)^t}$$

如果国库券收益曲线发生平移，不同期限的利率（及预期收益率、折现率）变动同一个 Δr 值，则上式变为

$$P=\sum_{t=1}^{N}\frac{C_t}{(1+r_t+\Delta r)^t}$$

这样的情况完全可以用对 Δr 求导数的同样方法计算久期。至于收益曲线发生的变动不是平行移动，情况就变得复杂得多。需要采用我们在第九章介绍过的利率的期限结构模型作深入的分析，我们就不在本书中展开。

另外值得指出的是，如果我们把利率处理成连续复利的形式，可以得到久期的更为简洁的关系式。令 $r^*=\ln(1+r)$，则有 $P_0=PV=\sum\limits_{t=1}^{N}\dfrac{C_t}{(1+r)^t}=\sum\limits_{t=1}^{N}C_t\mathrm{e}^{-r^*t}$，和 $D=\sum\limits_{t=1}^{N}\left[\dfrac{C_t\mathrm{e}^{-r^*t}}{\sum\limits_{t=1}^{N}C_t\mathrm{e}^{-r^*t}}\right]t=\dfrac{1}{P_0}\sum\limits_{t=1}^{N}tC_t\mathrm{e}^{-r^*t}$。这样可以导出$\dfrac{\mathrm{d}P_0}{P_0}=-D\mathrm{d}r^*$。

久期的非常重要的性质是具有可加性：一个资产组合（或负债组合）的久期是组合内各项资产（或负债）的久期的加权和，权重与该项资产（或负债）对整个组合的权重相同。即

若组合的价值为 $V=\sum_{j=1}^{M}V_j$，第 j 项资产（或负债）的久期是 D_j，则整个组合的久期为 $D=\sum_{j=1}^{M}w_jD_j$，其中 $w_j=\frac{V_j}{V}$。有关可加性的数学证明也在本章的附录里。

(2) 风险免疫策略

久期的概念可用于设计利率风险免疫策略(immunization strategies)。我们用一个简单的例子来说明。

假定公司有一笔折现型的负债，面值是 Q，期限是 N 年。负债的现值就是 $V_L=\frac{Q}{(1+r_L)^N}$，其中 r_L 是一个由市场条件决定的适当的折现率。我们先把它处理成连续复利的表示形式，即令 $r_L^*=\ln(1+r_L)$，则 $V_L=Qe^{-r_L^*N}$。

现在公司把这笔负债筹措的资金投资于一项资产，这项资产将每年提供固定收益现金流 $P_1,\cdots,P_N$。为了分析的简单起见，我们假定国库券的收益曲线是平坦的，发生的变动则是平移。于是资产的现值为 $V_A=\sum_{t=1}^{N}\frac{P_t}{(1+r_A)^t}$，表示成连续复利的表示形式，令 $r_A^*=\ln(1+r_A)$，有 $V_A=\sum_{t=1}^{N}P_te^{-r_A^*t}$。

请注意，有 $V_A=V_L$。现在如果(连续复利)利率发生变动 Δr^*，因为国库券收益曲线平行移动，所以负债和资产的利率变化是一样大小的。对于负债来说，有

$$V_L+\Delta V_L=V_L+\frac{dV_L}{dr^*}\Delta r^*=V_L+[-NQe^{-r_L^*N}]\Delta r^*$$

对于资产来说，有

$$V_A+\Delta V_A=V_A+\frac{dV_A}{dr^*}\Delta r^*=V_A+\left[\sum_{t=1}^{N}-tP_te^{-r_A^*t}\right]\Delta r^*$$

如果 $\Delta V_A=\Delta V_L$，则市场利率的变动对公司的这项融资投资活动的效益不产生影响，即可认为对利率风险具有免疫功能。而 $\Delta V_A=\Delta V_L$ 的充分必要条件是

$$\left[\sum_{t=1}^{N}-tP_te^{-r_A^*t}\right]\Delta r^*=[-NQe^{-r_L^*N}]\Delta r^*$$

因为 $\sum_{t=1}^{N}P_te^{-r_A^*t}=V_A=V_L=Q^{-r_L^*N}$，所以有

$$D_A=\frac{\sum_{t=1}^{N}tP_te^{-r_A^*t}}{\sum_{t=1}^{N}P_te^{-r_A^*t}}=\frac{\sum_{t=1}^{N}tP_te^{-r_A^*t}}{Qe^{-r_L^*N}}=N=D_L$$

由此得到结论：

如果国库券收益曲线反映的利率的期限结构是平坦的，而且收益曲线的变动只是平移，则实现利率风险免疫的充分必要条件是资产的久期与负债的久期相等。

现在引入久期缺口的概念。以 V_A 表示企业的总资产价值，V_L 表示总负债价值，V_E 表

示权益价值，则 $V_A=V_L+V_E$。以 D_A，D_L 和 D_E 分别表示资产的久期、负债的久期和权益的久期，则有 $D_A=w_LD_L+(1-w_L)D_E$，其中 $w_L=V_L/V_A$。从而有

$$D_E=\frac{1}{1-w_L}(D_A-w_LD_L)$$

久期缺口就定义为

$$D_{gap}=D_A-w_LD_L$$

即 $D_{gap}=(1-w_L)D_E$，有 $D_E=\frac{1}{1-w_L}D_{gap}=\frac{V_A}{V_E}D_{gap}$。将上一节所述的久期关系式应用于权益，得到 $\frac{\Delta V_E}{V_E}=-D_E\frac{\Delta r}{1+r}=-\frac{V_A}{V_E}D_{gap}\frac{\Delta r}{1+r}$，其中 r 是公司权益的预期收益率，即有

$$\Delta V_E=-D_{gap}\frac{\Delta r}{1+r}V_A$$

根据这个关系式可以制定重要的久期缺口管理策略，这种策略在资产/负债综合管理规避风险方面具有重要的意义。基本原理如下：

1）如果久期缺口很小，以至接近于 0，则市场利率的波动对公司净价值（权益的价值）的影响很小。由此可以制定保守的久期缺口的管理策略，即努力使久期缺口的绝对值尽量地变小，这样可以规避利率风险。

2）如果久期缺口为正，则公司权益价值的变化与市场利率变化的方向相反。当市场利率上升时，权益的市场价值下跌；当市场利率下降时，权益的市场价值上涨。如果权益缺口为负，情况就反过来。由此可以依据对市场利率的预期，制定积极的久期缺口的管理策略。

3）当前的市场利率越高，利率变化对权益价值的影响越小，反之亦然。公司的资产总值越大，利率变化对权益价值的影响也就越大。

附带说一句，久期缺口管理是对利率风险采用资产/负债匹配技术进行管理的一种策略。缺口管理技术还包括其他的策略，例如利率敏感性缺口管理，是使对利率敏感的资产（如浮动利率资产）尽可能地与对利率敏感的负债（如浮动利率负债）相匹配。为了规避汇率风险，尽量使资产和负债的币种匹配，也是一种缺口管理的策略。

（3）凸性

久期只刻画了债券（资产）的价值对利率变化的敏感性的 1 阶量，因此，只有在利率发生微小变动的情况是有效的。当利率发生较大变动时，就要考虑 2 阶敏感性的度量，这就是凸性（convexity）。

如果我们用连续复利 r^*，一种度量凸性的办法是

$$C_x=\frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{d}^2P_0}{\mathrm{d}r^{*2}}\times\frac{1}{P_0}=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\frac{t^2C_t\mathrm{e}^{-r^*t}}{\sum_{t=1}^{N}C_t\mathrm{e}^{-r^*t}}$$

对于固定收益证券来说，所有的 $C_t>0$，显然凸性大于 0。

凸性和久期的关系可以用图 10.1 来说明。

久期描述的价格与收益率的关系如图 10.1 中的直线所示，而凸性描述的价格/收益关系则由图中的凸曲线表示。目前债券的连续复利收益率是 r^*，债券价格是 P。当收益率

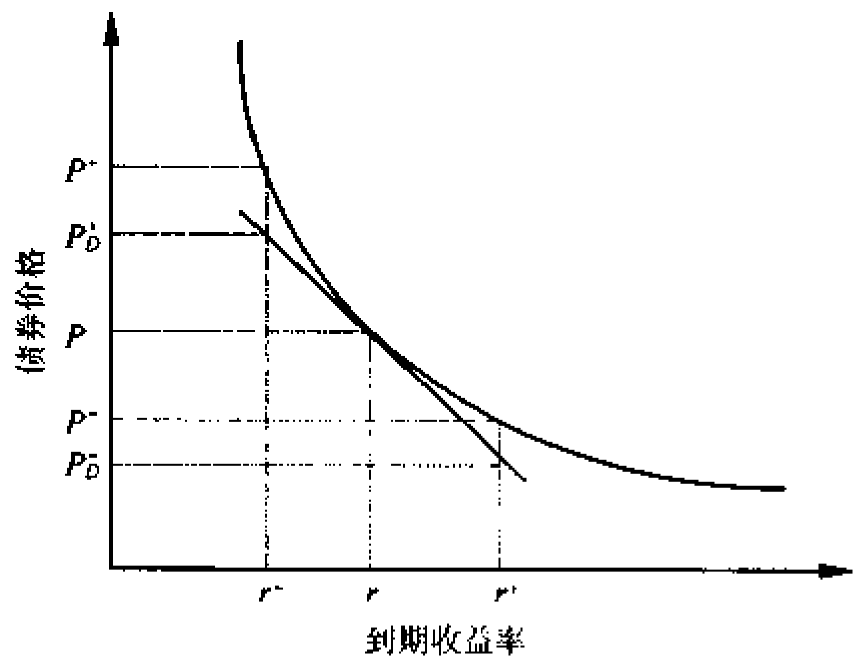


图 10.1

(利率)在小范围变化时,久期描述的关系能很好地拟合实际的情况。但当收益率(利率)的变动比较大时,久期描述的关系就会离实际情况比较远。这时需要考虑 2 阶量,即凸性。

由图 10.1 可以看出,凸性大的债券(或投资组合)对于投资者比较有吸引力。

7. 风险价值

所谓风险价值(VaR—Value at Risk)是指资产价值中暴露于风险中的部分,因此有人称之为在险价值。风险价值作为一种风险管理的方法,首先是采用规范的统计技术来评估风险的大小。风险价值的比较正规的定义是:在正常市场条件下和一定的置信水平上,测算出给定时间段内预期发生的最坏情况的损失。

现在,国际上先进的大银行和非银行金融机构从事风险管理的主管人员,已经做到随时掌握本机构所有资产和或有负债头寸的风险价值情况。国际清算银行规范各国商业银行业务准则的著名的"巴塞尔协定(Basle Accord)"就是以风险价值的概念为基础制定资本充足率要求的。而以 J. P. 摩根银行为代表的大型金融机构,也已花费了大量投资开发基于风险价值理念的风险管理技术和软件系统。其中有的风险管理技术已经通过路透(Reuters)金融信息系统和因特网提供网上服务。

下面我们介绍如何度量风险价值。对于一个投资组合来说,如果 W_0 是其初始投资额,经过一个投资周期(把一个投资周期看作单位时间)后,组合的价值变为 $\widetilde{W}=W_0(1+\tilde{r})$。因为存在风险,所以投资回报率 $\tilde{r}$ 和组合价值 $\widetilde{W}$ 都是随机变量。记 μ 和 σ 分别是 $\tilde{r}$ 的数学期望值(即概率平均值)和波动率(单位时间内的标准差),记 $E(\widetilde{W})$ 为 $\widetilde{W}$ 的预期值(即概率平均值)。定义 $\hat{W}$ 为在设定的置信水平 c 上,投资组合的最小价值。有 $\hat{W} = W_0(1+\hat{r})$,$\hat{r}$ 是在置信水平 c 上,投资组合的最小回报率。风险价值 VaR 就定义为相对于组合的预期价值(平均价值)而言,投资组合在这样的置信水平上可能遭受的损失量,即有

$$VaR = E(\widetilde{W}) - \hat{W} = W_0(1+\mu) - W_0(1+\hat{r}) = -W_0(\hat{r}-\mu)$$

有时也用绝对损失量来度量风险价值,有

$$VaR_0 = W_0 - \hat{W} = - W_0\hat{r}$$

我们来看图 10.2。

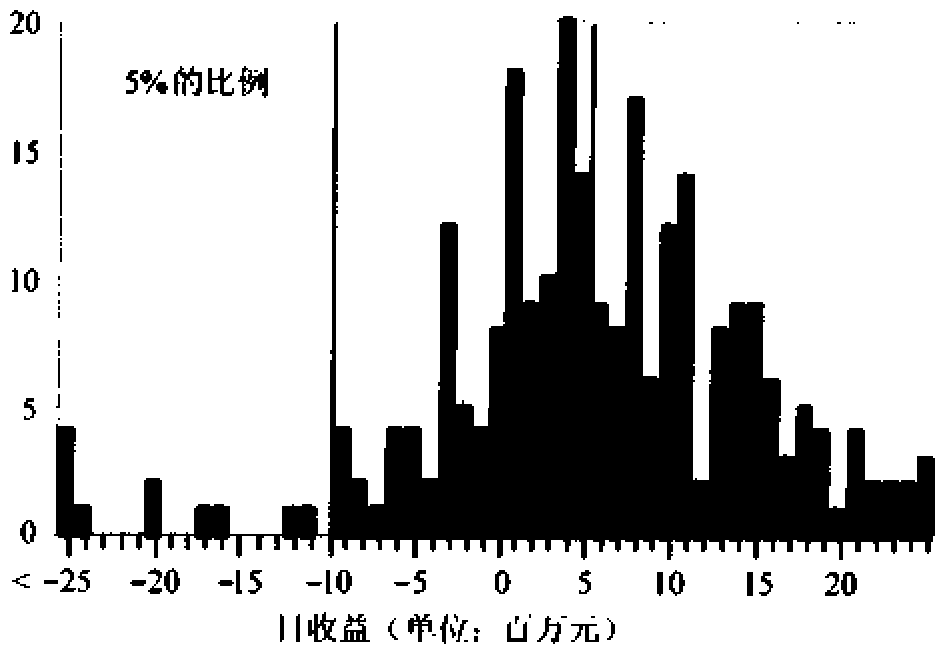


图 10.2

图 10.2 显示了某家银行一年内日收益的统计值。纵坐标是天数，总共观察 254 天(1 年的营业日数)。每条柱形的高度表示共有多少天的日收益金额是柱形横坐标所显示的数额。取 5%为置信度，从图中可以看出，共有 11 天的日收益低于－1 000 万元(即日亏损额大于 1 000 万元)，共有 15 天的日收益低于－900 万元(即日亏损额大于 900 万元)。对于 254 天的观察来说，5%应当占 254×5%＝12.7 天，从而能够算得，在 95%的置信水平，最坏情况的日收益额为 $W^*=-9\,600$ 万元。因此这家银行按日收益额计算，在 95%的置信水平，风险价值为 $VaR=E(W)-\hat{W}=5\,100-(-9\,600)=14\,700$ 万元。即在 95%的置信水平，每天低于平均收益(亦即预期收益)的数额可能达到这么大。这也就是暴露在风险中的日收益头寸。在这个例子中，绝对损失量可计为 $VaR_0=-\hat{W}=9\,600$ 万元(因为认为 $W_0=0$)。

在最一般的形式下，风险价值可以从投资组合未来可能价值的概率分布函数导出。假如 $f(W)$ 是投资组合未来可能价值的概率分布密度函数，给定置信水平 c，可以用下式找出在该置信水平最坏的情况 $\hat{W}$：

$$c = \int_{\hat{W}}^{\infty} f(W)\mathrm{d}W$$

于是有

$$1 - c = \int_{-\infty}^{\hat{W}} f(W)\mathrm{d}W = P(W \leqslant \hat{W}) = p$$

例如，取置信水平 $c=95\%$，则 $p=5\%$是投资组合未来的价值小于 $\hat{W}$ 的概率。$\hat{W}$ 被称为概率分布的分位数(quantile)。

如果投资组合未来价值的概率分布是正态分布，则可以直接从估计分布的有关参数

来直接计算风险价值。这种计算风险价值的方法称为参数法。记$-\alpha=\frac{\hat{r}-\mu}{\sigma}$,就可以转换成标准正态分布函数的密度函数$\Phi(\varepsilon)$、有

$$1-c=\int_{-\infty}^{\hat{W}} f(W)\mathrm{d}W=\int_{-\infty}^{\hat{r}} f(r)\mathrm{d}r=\int_{-\infty}^{-\alpha}\Phi(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$$

利用累积标准正态分布函数$N(d)=\int_{-\infty}^{d}\Phi(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$,根据$1-c$的值可以查出$\alpha$的值,再参照参数$\mu$和$\sigma$的值就能求得$\hat{r}$,进而求出风险价值。例如,取$1-c=5\%$,可查得$\alpha=1.65$,利用关系式$\hat{r}=-\alpha\sigma+\mu$就能求得$\hat{r}$。更一般地,如果$\mu$和$\sigma$都是按年率测算,要观察的时间段如果是$\Delta t$(以年为单位),则可算得风险价值为

$$VaR=-W_0(\hat{r}-\mu)=W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}$$

用绝对损失量度量,就是

$$VaR_0=-W_0\hat{r}=W_0(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}-\mu\Delta t)$$

如果投资组合未来价值的概率分布不是正态分布,但其累积概率分布函数也可以由某些参数决定的话,则完全可以仿照正态分布的情况来计算风险价值。

对于企业(尤其是金融机构)的资产/负债综合风险管理来说,不但要计算资产负债表内所有资产的风险价值,而且要把表外所有或有负债的风险价值也计算在内。风险价值既然是在一定置信水平可能低于预期价值的风险暴露,当然也就要求企业(尤其是银行等金融机构)具备抗御风险的能力。正是基于这样的原理,巴塞尔协定对银行业提出了资本充足率的要求。实际上,就是要求银行具有足够的抗风险储备来对付可能发生的损失。

8. 信用矩阵

信用矩阵由CreditMetrics译得,是J. P. 摩根银行于1997年研制成功的量化资产组合信用风险的模型。这一模型依据基本的数理统计方法,将借款人的信用等级与风险资产的预期价值联系起来,提出了边际风险的概念,对资产组合的信用风险进行量化分析。信用矩阵的基本思想是:

> 各种信用工具的投资者能否按时收回全部本金和利息取决于债务人的信用状况。因此,信用工具或债务的市场价值取决于发行债务的企业的信用级别。各种信用工具和债务的风险源于以信用级别的变化表示的企业信用质量的变化。

由马柯维茨的投资组合理论知,投资者要通过多样化的投资来分散消除掉非系统风险。由于投资者手中持有的是许多种信用资产的组合,所以必须时时着眼于整个资产组合的收益与风险的衡量,而不是只关注个别的资产。关注资产组合的整体风险就必定涉及各个借款人信用状况之间的相互联系。信用矩阵法求助于企业资产价值模型来描述企业之间信用级别变化的相互影响。

企业资产价值模型基于这样的原理:因为企业资产的价值决定了偿还负债的能力,所

以企业资产的价值是企业包括走向破产企业在内的信用级别变化的决定因素。因此，描述未来信用级别的变化可以转化为描述未来企业价值变化的问题。若企业的资产报酬率处于不同的区间，则企业的信用处于不同的等级。由历史数据的统计得到企业在各信用等级间变化的概率(信用矩阵法称之为转换矩阵)，进而计算得到资产报酬率所处区间的分位点。如果再知道了行业的相关系数，就可以测算出两两企业的资产报酬率间的联合分布。服从这个联合分布的随机变量处于不同的区间就对应了企业信用各自所处的等级。从而就可以知道企业信用级别变化的关系，以及企业之间相互影响的结果。

进行多样化置产的传统办法是制订对每种资产投资的绝对数额限制，但这样“一刀切”的做法显然不够科学，信用矩阵法正是抓住了这一点提出新的解决思路。

信用矩阵法提供了边际风险贡献这样的新概念。边际风险贡献指购置一定数额的资产(可以是组合中已有的某种资产，也可以是新引入资产)前后，用“边际标准差”来量化整个组合风险的变化。信用矩阵法强调了这样一点：应当由边际风险贡献的大小来决定应否购置某种资产，购置的数量应当控制在多少。

信用矩阵法的操作过程如下：

第一步　描述信用评级的级间变化。

评级公司将企业的信用在一定时期内从一个级别变动到另一个级别的概率以矩阵的形式定期公布，称作转换矩阵(transition metrics)。表 10.1 是标准普尔公司 1996 年 4 月提供的一年期转换矩阵：

表　10.1

起始级别	一年后处于各级别的概率(%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	违约
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

第二步　信用风险的计量。

我们考虑两个债券构成的组合，其中债券 1 是 BBB 级，5 年期，年息 6%；债券 2 是 A 级，3 年期，年息 5%。为简单起见，两个债券的面值假定都是 100 元。表 10.2 表示 1 年后在可能出现的各种状况下整个组合的价值。组合的价值是单一债券价值的简单相加。因为有 8 个级别，所以组合在期末有 64 种可能的价值。对应这 64 个价值，存在各个价值出现的 64 个概率。如果评级公司可以提供发行这两种债券的企业的收益的相关系数时，可借助企业资产价值模型计算出组合价值的联合概率。假设我们根据“资产价值模型”已经得到了两种债券级别变化的联合概率(表 10.3)。

表 10.2

债券 1 (BBB)		债券 2(A)							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	违约
		106.59	106.49	106.30	105.64	103.15	101.39	88.71	51.13
AAA	109.37	215.96	215.86	215.67	215.01	212.52	210.76	198.08	160.50
AA	109.19	215.78	215.68	215.49	214.83	212.34	210.58	197.90	160.32
A	108.66	215.25	215.15	214.96	214.30	211.81	210.05	197.37	159.79
BBB	107.55	214.14	214.04	213.89	213.19	210.70	208.94	196.26	158.68
BB	102.02	208.61	208.51	208.33	207.66	205.17	203.41	190.73	153.15
B	98.10	204.69	204.59	204.40	203.74	201.25	199.49	186.81	149.23
CCC	83.64	190.23	190.13	189.94	189.28	186.79	185.03	172.35	134.74
违约	51.13	157.72	157.62	157.43	156.77	154.28	152.52	139.84	102.26

表 10.3

债券 1 (BBB)		债券 2(A)							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	违约
		0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
AAA	0.02	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.33	0.00	0.04	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
A	5.95	0.02	0.39	5.44	0.08	0.01	0.00	0.00	0.00
BBB	86.93	0.07	1.81	79.69	4.55	0.57	0.19	0.01	0.04
BB	5.30	0.00	0.02	4.47	0.64	0.11	0.04	0.00	0.00
B	1.17	0.00	0.00	0.92	0.18	0.04	0.02	0.00	0.00
CCC	0.12	0.00	0.00	0.09	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
违约	0.18	0.00	0.00	0.13	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00

经过计算我们可以得到资产组合一年后的期望价值为 213.64 元，标准差为 3.35 元。又知第一种债券期望价值为 107.09 元，标准差为 2.99 元，第二种债券这两个数值为 106.55 元和 1.49 元。

第三步　边际风险分析。

可以看出组合期望价值是两个单一期望值的简单相加：

$$213.64\text{ 元} = 107.09\text{ 元} + 106.55\text{ 元}$$

而标准差却并非如此：

$$3.35\text{ 元} = 2.99\text{ 元} + \underline{0.36\text{ 元}} = \underline{1.86\text{ 元}} + 1.49\text{ 元} < 2.99\text{ 元} + 1.49\text{ 元}$$

从上式中我们可看出资产组合对于分散风险所起的作用。由于两种资产并不完全相关，同时持有它们使得总风险小于两种单一资产风险的简单相加。尤其注意加上下划线的两个数字，它们分别是债券 2 和债券 1 对组合的边际标准差，表示两种资产对资产组合的边际风险贡献。这个数值远远小于各自的绝对标准差，也表明了资产组合对分散风险的作用。

边际标准差使资产组合的风险透明化，从而有助于我们认清其中每笔资产对于组合

风险的贡献，认清组合的风险集中在哪笔资产上，哪笔资产对分散组合风险功劳最大，这在多种资产的组合中体现得更为明显。

下面我们运用边际风险分析法对多种资产的组合进行风险分析，我们将看到这种方法的奇特功效。假如一家商业银行的全部信贷资产由以下 20 笔组成：

表 10.4

资产	初始信用	本金（元）	期限	市场价值（元）	绝对标准差（元）	平均绝对标准差	边际标准差（元）	平均边际标准差
1	AAA	7 000 000	3	7 821 049	4 905	0.06	239	0.00
2	AA	1 000 000	4	1 177 268	2 007	0.17	114	0.01
3	A	1 000 000	3	1 120 831	17 523	1.56	693	0.06
4	BBB	1 000 000	4	1 189 432	40 043	3.37	2 934	0.25
5	BB	1 000 000	3	1 154 641	99 607	8.63	16 046	1.39
6	B	1 000 000	4	1 263 523	162 251	12.84	37 664	2.98
7	CCC	1 000 000	2	1 127 628	255 680	22.67	73 079	6.48
8	A	10 000 000	8	14 229 071	197 152	1.39	35 104	0.25
9	BB	5 000 000	2	5 386 603	380 141	7.06	105 949	1.97
10	A	3 000 000	2	3 181 246	63 207	1.99	5 068	0.16
11	A	1 000 000	4	1 181 246	15 360	1.30	1 232	0.10
12	A	2 000 000	5	2 483 322	43 085	1.73	4 531	0.18
13	B	600 000	3	705 409	107 304	15.21	25 684	3.64
14	B	1 000 000	2	1 087 841	167 511	15.40	44 827	4.12
15	B	3 000 000	2	3 263 523	610 900	18.72	270 000	8.27
16	B	2 000 000	4	2 527 046	322 720	12.77	89 190	3.53
17	BBB	1 000 000	6	1 315 720	28 051	2.13	2 775	0.21
18	BBB	8 000 000	5	10 020 611	306 892	3.06	69 624	0.69
19	BBB	1 000 000	3	1 118 178	1 837	0.16	120	0.01
20	AA	5 000 000	5	6 181 784	9 916	0.16	389	0.01

表 10.4 中平均绝对标准差和平均边际标准差分别是绝对标准差和边际标准差与资产市场价值的比，表示“单位风险”的概念。

可以从表 10.4 中看到，每一种资产从绝对标准差到边际标准差都有大幅度的降低，这充分显示了多样化置产对分散风险的作用。对照这 20 种资产的初始级别，我们还发现，初始信用级别越高的资产（如资产 1），这个降低的幅度越大（降低了 20 倍）。所以扩大资产组合中资产的数目，对于分散信用风险，尤其是降低具有较大信用风险的资产对整个投资组合的影响是有效的和必要的。

在本例中，对于资产的管理者来说，需要注意 5 笔资产（7，9，15，16，18），它们对于组合风险的贡献要大于其余资产。下面我们来分析一下造成它们的边际风险很大的原因。

资产 7 与资产 18 的情况比较好理解。前者的初始信用级别是 CCC 级，这笔资产完全损失的可能性相当大，造成了它的实际价值偏离期望价值的程度即风险也很大。而资产 18 虽然是 BBB 级，但它的数额很大，在整个资产组合中仅次于资产 8（A 级），所以虽然它的平均边际风险不大，但乘以市场价值后，边际风险的贡献是很大的。

剩下的三笔资产需要用资产间的相关性来解释。资产 9 位于可接受的 BB 信用级，但追溯到企业间的相关系数输入（这个表格比较庞大，有 400 个数据，不在书中展示），可以发现，它与 CCC 级的资产 7 有 0.35 的相关系数。资产 7 与其他资产间的相关系数最大是 0.35，而且其他与资产 7 有这种相关性的资产（5，6，8，10）不是信用级别较高（8 和 10 均为 A 级），就是数额很小（资产 5 和 6 的本金都是资产 9 的 1/5）。这样就不难解释为什么资产 9 的边际风险很大了。

资产 16 与边际风险较大的资产 18 之间的相关系数为 0.55，这导致了它也有较大的边际风险。资产 15 的情况更为复杂一些，它的边际风险是所有资产中最大的，这是因为，它自己本身有一个较低的 B 级的信用，而又和另两个 B 级的资产（13，14）有着 0.45 的相关系数。

信用矩阵法对于控制商业银行贷款质量，降低信用风险具有非常实际的作用。经过上述的计算与分析，实际上，我们已非常精确地完成了贷款管理过程中的风险识别任务：通过边际分析可以看出，组合中的哪些贷款由于风险暴露数额大，它们如果成为呆账，会使银行损失很大（如贷款 18）；哪些贷款现在的信用级别低（这样的款项在数年前贷出时，借款人也许处于较高的信用级别，但近年来有所下降），在未来成为坏账的可能性较大（如贷款 7）；又有哪些贷款由于信用级别、风险暴露的数额以及与其他资产的相关性的共同作用而存在较大的边际风险贡献（如资产 15），这些资产是需要我们特别关注的。

对于需要特别关注的每一笔贷款，也要排出一个次序，使银行的贷款管理有先后的侧重。首先要重视的应该是上面的第三种情况，即首先关注对银行贷款组合价值的边际风险贡献最大的那些贷款。接下来就可以根据这种判断采取相应的措施，如积极跟踪监督该笔贷款，追加抵押品，提取贷款损失准备金等来降低风险。

当某企业向银行申请一笔贷款时，银行贷与不贷的决策也可依据这种边际分析。贷款数额过大者，不贷；借款者信用级别过低也不贷。特别是将贷款数额、信用等级和与其他贷款的相关程度结合起来考虑的决策，会比考虑单一因素要更有说服力。

企业资产价值如果低于某一数量，就会资不抵债。而银行作为金融企业，它的信贷资产价值也存在这样一个下限。这使得银行的风险承受力十分有限，当银行的贷款质量过低时，就有破产的危险。例如，当银行的管理者发现，目前贷款组合将导致在来年有 10% 的概率低于这个下限，就会很紧张，必定会采取措施去降低贷款风险，减小这个概率；而当这个概率很小时，管理者则会放心地继续发放贷款，直至总贷款组合的风险达到银行又将不能承受时。当银行的负债和资本金固定时，这种风险承受能力是一定的。因此银行的这种风险承受能力是一种珍贵的资源，称之为经济资本。

理解并应用经济资本这个概念对于银行权衡风险与收益有极大的帮助。高风险一定要带来高收益，这是每一位银行家都通晓的道理。但能否在同等风险下获取最大收益，即从同样的经济资本获得最大收益，就需要借助信用矩阵法提供风险量化的工具，从所有的机会中选择最优。

信用矩阵的概念已经进一步推广到风险矩阵（RiskMetrics），也是由 J. P. 摩根银行最先推出的。

9. 组合与分解—复合金融工具

我们在本书中反复强调过，无套利均衡分析是现代金融学研究的基本方法论。进行无套利均衡分析的关键技术是复制技术，而复制则意味着组合与分解。我们早就指出过，用一组金融工具复制单一金融工具的现金流，这一组金融工具就是那个单一金融工具的分解，而单一金融工具反过来就是这一组金融工具的组合。组合分解的结果在实质上是改变金融工具的流动性和收益/风险特性，从而创造出许许多多转移风险的工具。

前几节讲解的用于资产/负债综合风险管理的技术如久期缺口管理、信用矩阵法等，实际上都隐藏着一些问题。因为这些人为地匹配资产组合或资产/负债组合的做法，其结果可能是把风险转嫁给自己的客户即交易对手，而客户可能并不愿意接受这些风险。这样就可能出现两种后果：要么是大大增加交易成本（包括丧失商机的机会成本），要么是在减少一种风险的同时增加了另一种风险。例如，缺口管理在降低利率风险的同时就可能提高了客户违约的风险。

各种类型的期权或期权与其他类型的金融工具（尤其是各种衍生工具）经常组合起来构造一些复杂的策略，即组成各种复合金融工具(Synthetic Instruments)。这些策略（复合金融工具）经常是用于投机的目的，但套期保值者也经常利用这些策略来满足自己特殊的需要。

最频繁使用的纯期权的组合策略（纯期权复合金融工具）有*跨式套购*(straddle)、*垂直价差套购*(vertical spread)、*水平价差套购*(horizontal spread)、*对角价差套购*(diagonal spread)以及*蝶形套购*(butterfly spread)。在跨式套购中，期权购买者同时购买（或出售）标的物相同，预定价相同，到期日也相同的一个买权和一个卖权。为这个跨式套购，期权购买者支付给期权发行者的总数额是两个期权的成本之和，$c+p$。跨式套购策略多头的盈亏状态图表示在图 10.3 中。跨式套购策略空头的盈亏状态图则表示在图 10.4 中。

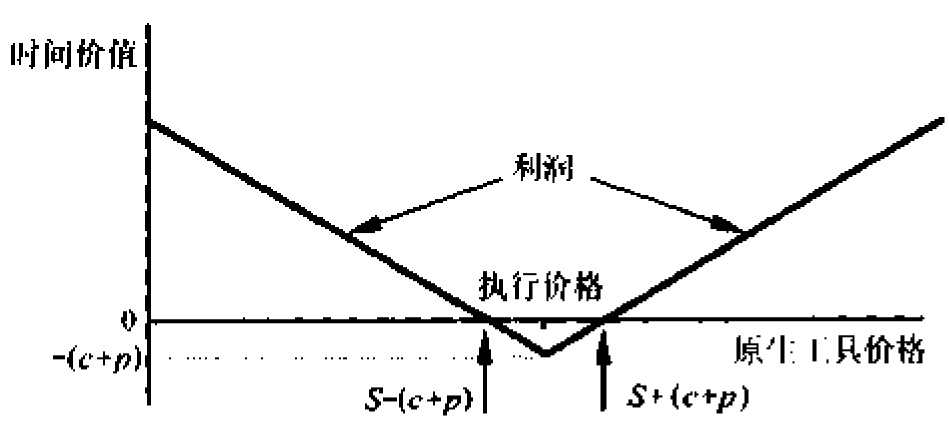


图 10.3　跨式套购多头的盈亏状态图（在到期日）

注意跨式套购的盈亏状态图所特有的 V 字形状。这个盈亏状态表示此种策略可用于对价格波动性作投机，而不是对价格的方向作投机。即当标的物价格有较大的波动时，偏离预定价格足够远，跨式套购的多头显示出可能有正的盈利，而不管标的物价格变动的方向。而对于跨式套购的空头而言，所要求的条件正好相反。

就风险管理的目的而言，这些跨式套购策略对具有波动性风险暴露的公司是有好处的。波动性的风险暴露是这样一种风险暴露，对于价格偏离当前水平的任何波动，公司都

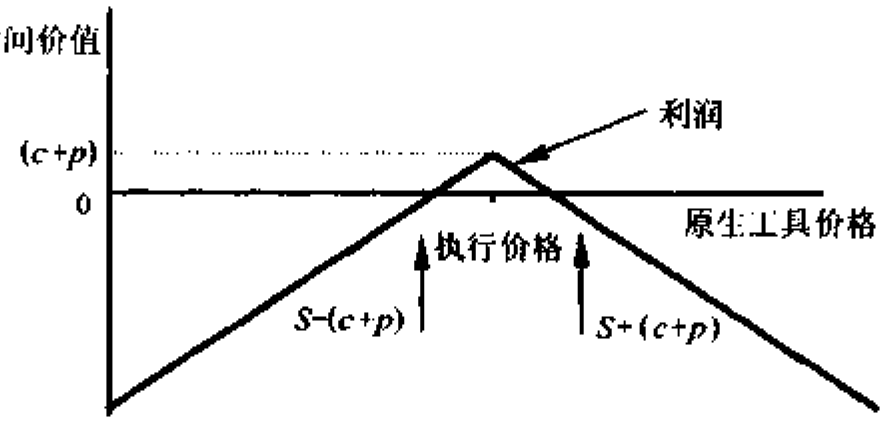


图 10.4 跨式套购空头的盈亏状态图(在到期日)

会受到负面的影响。具有这种风险暴露的公司可以通过购买一个预定价等于当前标的资产价格的跨式套购来对冲。反之,如果没有任何偏离当前价格的波动,公司就会遭受消极影响,该公司就可以通过出售一个跨式套购来对冲这种风险暴露。

价差套购(spread)包括同时购买一个期权和出售另一个期权,两个期权属于同一类型。即两个期权或者都是买权,或者都是卖权。

有许多不同类型的价差套购。垂直价差套购按不同的预定价套购。因为在期权报价时,同一类型的期权是按预定价从小到大纵向排列的。垂直价差套购的名称来源于执行价的纵向列表。在垂直价差套购中,我们购买一个买权(或卖权),同时出售另一个具有不同预定价的买权(卖权)。在垂直价差套购中两个期权的到期月份和标的物是相同的。如果我们购买较低预定价的期权,并出售较高预定价的期权,这种价差套购称为垂直牛市价差套购。如果我们出售较低预定价的期权,同时购买较高预定价的期权,那么价差套购称为垂直熊市价差套购。用于构造垂直牛市价差套购的同样的两个期权可以用来组成垂直熊市价差套购。这两种策略的盈亏状态图表示在图 10.5 和图 10.6 中。

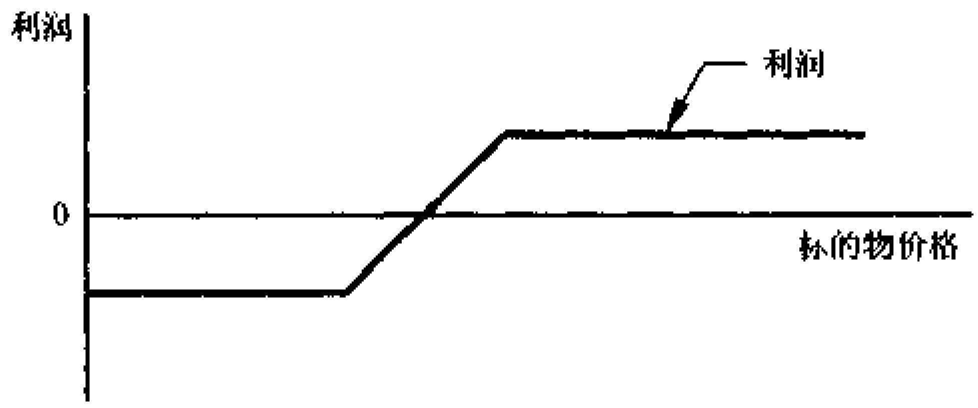


图 10.5 垂直牛市价差套购的盈亏状态图(在到期日)

水平价差是到期月份不同的价差。在这种价差套购中,我们出售具有某个到期月份的期权同时购买具有不同到期月份的另一个期权。两个期权的标的物和预定价相同。如果我们购买后面月份的期权而出售前面月份的期权,这种价差套购称为水平牛市价差套购。如果我们购买前面月份的期权而出售后面月份的期权,这种价差套购称为水平熊市价差套购。水平价差套购的策略的盈亏状态图如图 10.7 和图 10.8 所示。

请注意图 10.7 的水平牛市价差套购的盈亏状态图与图 10.4 的跨式套购空头的盈亏状态图相似。也请注意图 10.8 的水平熊市价差套购的盈亏状态图与图 10.3 的跨式套购

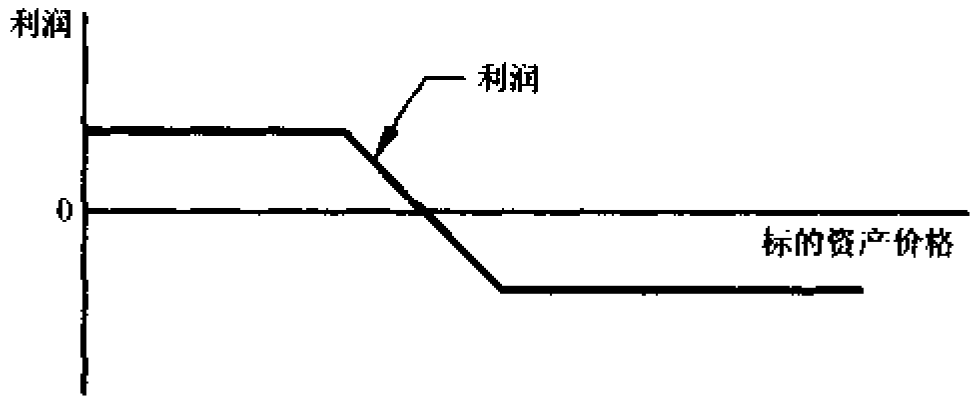


图 10.6 垂直熊市价差套购的盈亏状态图(在到期日)

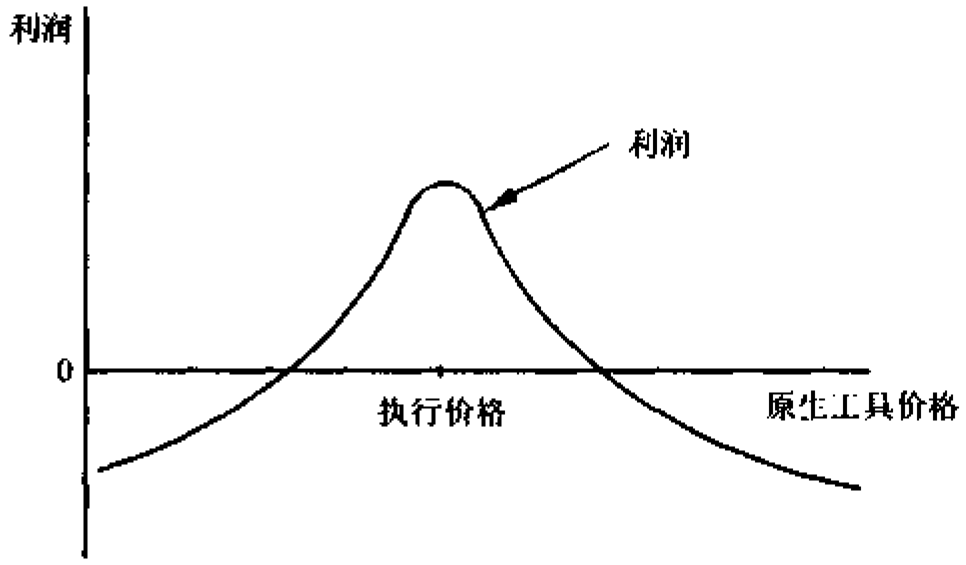


图 10.7 水平牛市价差套购的盈亏状态图(在前面一个到期日)

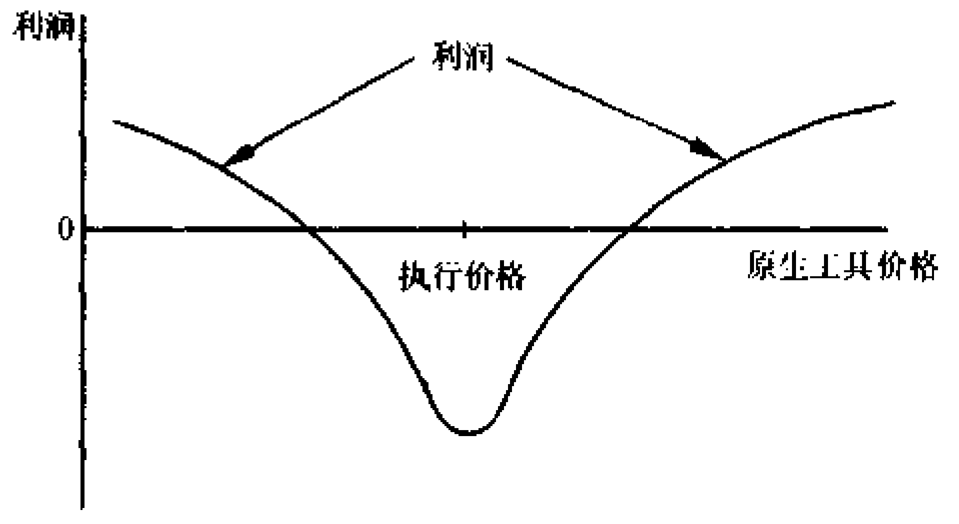


图 10.8 水平熊市价差套购的盈亏状态图(在前面一个到期日)

多头的盈亏状态图类似。这些相似表明水平价差套购类似于跨式套购,也能够用于对冲波动性的风险暴露。

*对角价差套购*是预定价和到期日都不同的价差套购,即它们同时是垂直的和水平的价差套购。*蝶形价差套购*则包括 4 个期权,或者统统都是买权,或者统统都是卖权。所有 4 个期权的到期月份都相同,标的物也都相同。一个期权的预定价高、一个期权的预定价低,另外两个期权的预定价相同,并处于前两个高的和低的预定价之间。出售预定价处于中间位置的两个期权,购买预定价处于两端的两个期权。这个策略也可以反过来做,购买

预定价位于中间的两个期权，出售预定价处于两端的两个期权。这种策略称为反向蝶形套购。对角价差套购和蝶型价差套购的盈亏状态图我们就不画了，读者可以作为练习自己去画。

显而易见，这些组合金融工具的定价就是各组成部分的市场价格的简单线性加和。因此，根据前面讲过的知识，读者不难理解这些组合期权的定价原理。

创造复合金融工具当然不只包括纯期权的复合金融工具。根据需要，可以由各种原生工具和衍生工具的复合创造出各式各样的具有不同流动性和收益/风险特性的新型金融工具，成为金融市场流动配置收益/风险的有用工具，以“量体裁衣”的方式满足客户的各种特殊的需求，增强整个金融系统通过市场交易配置资本资源的能力。

最早的期权交易出现在芝加哥期权交易所(CBOE—Chicago Board Options Exchange)，在相当长的时间里，只限于买权的交易。为了套期保值和投机的需要，交易者就是利用买权和卖权的平价关系来复制出卖权，通过组合标的物股票、股票买权和无风险证券复制出卖权的做法，后来成为金融工程师利用现存金融工具的“积木式”组合研究(block approach)的典型例子。

反向的做法则是分解单一的金融工具创造出新的金融工具。剥离(strip)常规债券(尤其是中长期国库券)创造零息票债券就是典型的例子。零息票债券剥离技术最基本的做法是购买带息票的常规债券，然后分离本金和息票出售。这样一来，本金和息票就都成为零息票债券。因为零息票债券在到期日前没有利息现金流入，也就没有再投资风险，如果持有到期末，对利率风险就有免疫功能。

利用此类组合分解技术创造新型金融工具的做法对于交易商来说非常重要，因为为交易商不匹配的交易提供了一种套期保值的机制。通过组合分解，可以把不匹配的风险进一步转移出去。组合分解技术涵盖面非常宽，还包括现货和期货的复合、利用互换与其他金融工具的复合、各种不同期限金融工具的复合，等等。这一类的金融工具创新活动已经创造出层出不穷的金融新产品，是七八十年代以来总的金融创新活动的一个重要的组成部分。

组合分解技术的实施基于对金融市场内在结构(尤其是微观结构)和机制的深刻理解。我们已经知道，组合分解的关键技术是复制技术，而市场的复制能力是和市场的完全性结合在一起的。市场的效率和市场的完全性是现代金融市场的两个基本特性，也是我们在本书中反复譬解的基本概念。对于现代金融理论来说，这是两个非常基本又非常深刻的概念，希望读者对它们的理解能够不断地深化。

10. 小结

风险管理是现代金融理论的支柱之一，也是金融工程研究的核心内容。风险管理本身是效益和成本的权衡决策，风险管理的成本概念是非常重要的。金融工程为金融风险的管理提供技术支持，尤其是在设计、开发和实施各种转移风险的工具和策略方面。

风险转移有三种基本方法：保险、风险分散化和套期保值。金融工程看待保险的角度和传统的保险学有所不同，认为保险在消除损失的同时保留了获利的可能。因此从道理上说，保险一定和期权理论发生紧密的联系。组合保险策略就是一个将保险理念和金融投资

熔于一炉的典型案例。风险分散化的基本思想在资产/负债综合管理风险技术方面发挥了重要的作用。久期、凸性、缺口管理、风险价值，一直到信用矩阵法强调边际风险贡献，都含有风险分散化思想不断深化的结果。套期保值的基本原理则是构筑对冲组合，对于那些导致风险的因素，对冲组合的设计使得组合的净价值对于这些因素的变化保持中性。由希腊字母德尔塔、伽马、西塔、维伽和洛等表示的对各种风险因素的敏感度，都是设计对冲组合的重要依据。设计建构对冲组合是技术性非常强的工作，也是金融工程师充分发挥其想象力和创造性的自由天地。这些对冲组合也都可以看作是创新的复合金融工具，基本的设计技术则是基于无套利均衡分析的组合分解技术。另外需要特别指出的一点是，我们在本章中尽可能地介绍了金融风险管理工具和技术的最新发展，其中许多内容是 90 年代才获得的成果。

使用这些风险管理工具和技术必须采取灵活的，而不是死板的、教条主义的态度。而且，一定需要其他金融工程技术的支持。最有典型性的其他金融工程技术包括：

情景分析对于今后一段时间可能出现的各种情况进行全面细致的分析，找出最有可能发生的情况，以此设计风险管理的策略；模拟分析采用蒙得卡洛(Monte Carlo)仿真技术模拟各种可能出现的情况，同时模拟各种风险管理的工具和技术的效益/成本结果，以此为依据来设计风险管理策略；止亏分析设计合理的止亏点，动态地跟踪市场交易行情，在未超越止亏点时不采取动作(或继续正常的交易策略)，一旦越过止亏点就采取相应的风险管理的措施，等等；我们在这本讨论金融工程原理的著作中就不再展开论述。

自亚洲金融金融危机以来，防范金融风险成为全社会的共识。建设和发展金融系统本身防范风险的机制，加强市场转移和消化吸收风险的能力，将是我国银行业和资本市场健康成长的重要方面。从理论上讲，这涉及金融市场的效率和完全性；从实践上讲，是培育市场，加强监管建设和发展行业自律。金融市场作为社会主义市场经济的重要组成部分，一定要健康有序地发展，才能真正起到高效地配置社会资本资源的作用，支持经济的可持续发展。

金融市场充满挑战和机遇，金融的全球一体化发展趋势更向世人提出了许多严峻的课题。在一个动荡不安而充满风险的金融海洋中，要想驾驭航船搏击风浪，驶向光辉的彼岸，一定要掌握趋利避险的高超技术。金融工程是现代金融领域的高新科技。通过学习金融工程的基本原理，相信能帮助读者建立起正确地认识现代金融学的实质和掌握分析问题和解决问题的基本方法论，尤其是掌握设计、开发和实施风险管理的工具和技术。风险管理是金融工程师的核心任务之一，一位称职的金融工程师一定是一位优秀的风险管理专家。风险管理的内容非常广，我们在本章只是做了基本的概述。但是从本书内容的组织看，如果读者能对前面讲述的所有内容真正融会贯通，就一定能对风险管理的实质内涵形成深入的理解，为进一步的训练打下良好的基础。

练习题

1. 假设某人持有 100 元的证券 A，500 元的证券 B 以及 1 000 元的无风险证券。$r_f=5\%$。证券 A 和 B 的收益率均服从正态分布：$r_A \sim N(8\%, 25\%)$，$r_B \sim N(10\%, 36\%)$且相互独立。计算在 95%的置信水平下，该人一年的风险价值(所有的收益率均为年收益率)。

2. 某人持有某种股票1单位，$S=100$ 元，$\sigma=40\%$，$r_f=5\%$ 试根据下列几种情况，为其构筑对冲组合，使满足德尔塔及伽马中性(一年以360天计算)。

1) 市场上存在该种股票的期货，期限为240天，及以该种股票为标的物的预定价 $X=120$ 元，距到期日为240天的欧式买权。

2) 市场上存在以该种股票为标的物的预定价 $X=120$ 元，距到期日为240天的欧式买权，以及以该种股票为标的物的预定价 $X=110$ 元，距到期日为240天的欧式买权。

3) 市场上存在以该种股票为标的物的预定价 $X=120$ 元，距到期日为240天的欧式买权，以及以该种股票为标的物的预定价 $X=80$ 元，距到期日为240天的欧式卖权。

第十章数学附录

1. 关于调整复制组合要花费的成本的说明

对于不分红欧式买权来说，每隔一段时间调整一次复制组合的头寸，会产生现金流入或流出，但加起来的现金流入和流出的总和的预期值为0，我们在这里给出数学证明。

如果标的物股票价格保持不变，即如 $S(t+1)=S(t)$，则从 t 到 $t+1$，可以盈利大约 $-\Theta$ 元(请回过头去看一下 Θ 的定义，并请注意时间是1个单位)，这是因为建立新的复制组合的成本降低了。

如果在此期间股票价格有很大的变化(无论上涨还是下跌)，都将造成亏损，因为新的复制组合的成本将会高于原来的复制组合在时刻 $t+1$ 的价值。这一点用初等数学就可以证明，留给读者作练习。

我们以 $H(t)=\Delta(t)S(t)-L(t)$ 表示复制组合在 t 时刻的价值。对于那个买权及其复制组合有以下的泰勒(Taylor)展开式

$$\delta c = \frac{\partial c}{\partial S}(\delta S) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(\delta S)^2 + \frac{\partial c}{\partial t}(\delta t) + \cdots$$

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial S}(\delta S) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}(\delta S)^2 + \frac{\partial H}{\partial t}(\delta t) + \cdots$$

所以有

$$c(t+1) - c(t) \approx \Delta(t)[S(t+1) - S(t)] + \frac{1}{2}\Gamma[S(t+1) - S(t)]^2 + \Theta$$

$$H(t+1) - H(t) = \Delta(t)[S(t+1) - S(t)] - (e^{r_f} - 1)L(t)$$

因为 $c(t)=H(t)$，到时刻 $t+1$ 调整复制组合头寸的盈亏为

$$c(t+1) - H(t+1) \approx \frac{1}{2}\Gamma[S(t+1) - S(t)]^2 + \Theta + (e^{r_f} - 1)L(t)$$

因为 $c(t)=\Delta(t)S(t)-L(t)$，即有 $L(t)=\Delta(t)S(t)-c(t)$。无风险利率 r_f 是一个小量，所以近似地有 $(e^{r_f}-1)\approx r_f$，1周的利息成本就近似地等于

$$(e^{r_f} - 1)L(t) \approx r_f[\Delta(t)S(t) - c(t)]$$

于是有

$$c(t+1) - H(t+1) \approx \frac{1}{2}\Gamma[S(t+1) - S(t)]^2 + \Theta + r_f[\Delta(t)S(t) - c(t)]$$

因为有

$$E\{[S(t+1) - S(t)]^2\} \approx (\sigma S)^2$$

(为了以下行文的简洁起见，我们在等式右边不写时间变量 t)，从而有

$$E[c(t+1)-H(t+1)] \approx \frac{1}{2}\Gamma(\sigma S)^2+\Theta+r_f(\Delta S-c)$$

由正文中所述的布莱克-舒尔斯随机微分方程的变形知，上式右边等于 0。但 $c(t+1)-H(t+1)$ 的方差（或标准差）显然不会为 0，这样证明了我们的论断从时刻 t 到 $t+1$ 成立，也就很容易推广到任意时间段。

2. 组合保险投资比例变化规律的数学证明

对 1)的证明：改写 $\omega(t)$ 的表达式为

$$\omega(t)=\frac{S(t)N(d_1)}{S(t)N(d_1)+X\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}N(-d_2)}=\frac{1}{1+\dfrac{X\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}N(-d_2)}{S(t)N(d_1)}}$$

当 $S(t)\geqslant X$ 时，显然有 $S(t)>X\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}(t<T)$。另外，

$$\begin{aligned}\frac{N(-d_2)}{N(d_1)}&=\frac{N(\sigma\sqrt{T-t}-d_1)}{N(d_1)}\\&=\frac{N\left\{\dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}-\dfrac{[\ln(S(t)/X)+r_f(T-t)]}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}{N\left\{\dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}+\dfrac{[\ln(S(t)/X)+r_f(T-t)]}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}<1\end{aligned}$$

所以分母小于 2，$\omega(t)>50\%$。

对 2)的证明：我们仍然看 1) 的证明中的表达式。当 $S(t)$ 变大时，$N(d_1)$ 变大而 $N(-d_2)$ 变小，$\omega(t)=\dfrac{1}{1+\dfrac{X\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}N(-d_2)}{S(t)N(d_1)}}$ 的表达式中分母变小，$\omega(t)$ 就变大。

对 3)的证明：当 $S(t)>X$ 且 $t\to T$ 时，有 $N(d_1)\to 1$，而 $N(-d_1)\to 0$，从而 $N(-d_2)=N(\sigma\sqrt{T-t}-d_1)\to 0$，由 $\omega(t)=\dfrac{1}{1+\dfrac{X\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}N(-d_2)}{S(t)N(d_1)}}$ 知，$\omega(t)\to 1$。当 $S(t)<X$ 且 $t\to T$ 时，有 $N(d_1)\to 0$，而 $N(-d_2)\to 1$，因此 $\omega(t)\to 0$。请注意，这里的收敛都是有概率意义的。因此，若出现 $t\to T$ 时 $S(t)\to X$ 的情况，则有 $\omega(t)\to 1/2$，但这种情况发生的概率很小。

3. 组合保险的有保障收益

我们来证明组合保险的有保障收益最高不会超过无风险证券的收益。

假如现在有一笔资金 C 要投资于带保险的证券组合，证券组合目前的市场价值是 $S(t)$，预定价为 X 的复制卖权组合的市场价值是 $p(S(t),X)$，则资金 C 总共可以购买 α 份带保险的证券组合，有

$$\alpha=\frac{C}{S(t)+p(S(t),X)}$$

设 w 是所要求的证券组合的有保障的投资收益率，令 $z=1+w(T-t)$，则到期可以获得的有保障的资金回报为 $[1+w(T-t)]C=zC$。因为 X 是卖权的预定价，所以一定有

$zC=\alpha X$。于是有

$$\frac{X}{z}=S(t)+p(S(t),X)=S(t)N(d_1)+Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)$$

可改写为

$$\frac{1}{z}-\frac{S(t)}{X}N(d_1)-e^{-r_f(T-t)}N(-d_2)=0$$

由此推导出

$$z\leqslant\frac{e^{r_f(T-t)}}{N(-d_2)}$$

请注意，有保障收益是指在 $S(t)<X$ 的情况发生时，由本附录的 2 证明知，当 $t\to T$ 时，$N(-d_2)\to 1$。因此，$z\leqslant e^{r_f(T-t)}$，即有 $w\leqslant r_f$。

4. 久期可加性的证明

假定表示利率的期限结构的国库券收益曲线是平坦的。资产组合的价值为 $V=\sum_{j=1}^{M}V_j$，每一项资产的折现现金流的现值为 $V_j=\sum_{t=1}^{N}\frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t}$，其久期为 $D_j=\frac{1}{V_j}\sum_{t=1}^{N}\left[\frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t}\right]t$。各项资产在组合里的权重为 $w_j=\frac{V_j}{V}$。资产组合的价值为

$$V=\sum_{j=1}^{M}V_j=\sum_{j=1}^{M}\sum_{t=1}^{N}\frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t}=\sum_{t=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{M}\frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t}\right]$$

组合的久期为

$$\begin{aligned}D&=\frac{1}{V}\sum_{t=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{M}\frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t}\right]t=\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{M}\sum_{t=1}^{N}w_j\frac{V}{V_j}\frac{tC_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t}\\&=\sum_{j=1}^{M}w_j\left\{\frac{1}{V_j}\sum_{t=1}^{N}\left[\frac{C_t^{(j)}}{(1+r^{(j)})^t}\right]t\right\}=\sum_{j=1}^{M}w_jD_j\end{aligned}$$

由此得证。凸性的可加性可以类似证明。

参阅资料

序　言

1. 宋逢明. 一门新兴的工程学科—金融工程. 人民日报，1996-02-17(6)
2. 宋逢明. 金融科学的工程化. 金融研究，1997(7). 1～5
3. 宋逢明. 金融工程：工程思维进入金融领域. 科学，1998(3). 14～17
4. Finnerty J. Financial Engineering in Corporate Finance: An Overview. *Financial Management*, Winter 1988(17), 14～33

第一章

1. Modigliani, F. And M. H. Miller. The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment. *American Economic Review*, 1958-06(48). 261～297
2. Duffie, D. Stochastic Equilibria with Incomplete Financial Markets. *Journal of Economic Theory*, 1987-04(41). 405～416

第二章

1. Cox, J. C., J. Ingersoll and S. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 1985-03(53). 385～407
2. Fama, E. F. Forward Rates as Predictors of Future Sport-Rates. *Journal of Financial Economics*, 1976(3). 361～377
3. Duffie, D. and M. Huang. Swap Rates and Credit Quality. *Journal of Finance*, 1996-06(3). 921～949

第三章

1. Ross, S. A. Mutual Fund Separation in Financial Theory: The Separating Distributions. *Journal of Economic Theory*, 1978-04(17). 254～286
2. Markowitz, H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 1952-03(7). 77～91
3. Lintner, J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 1965-02(47). 13～37
4. Sharpe, W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, 1964-09(19). 425～442
5. Merton, R. C. An Intertemporal Capital Asset pricing Model. *Econometrica*, 1973-09(41). 867～887
6. Breeden, D. T. An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities. *Journal of Financial Economics*, 1979-09(7). 265～296
7. Fama, E. F. Efficient Capital Markets: II. *Journal of Finance*, 1991-12(46). 1575～1617
8. Fama, E. F. and K. French. Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds. *Journal of Financial Economics*, 1993(33). 3～56

第四章

1. Ross, S. A. Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory*, 1976-12(13). 341～360
2. Merton, R. C. Theory of Finance from the Perspective of Continuous Time. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1975-11(10). 659～674

第五章

1. Cox, J. C. and S. A. Ross. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 1976-02～03(3). 145～166
2. Cox, J. C., S. A. Ross and M. Rubinstein. Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 1979-9(7). 229～263

第六章

1. Black, F. and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973-05～06(81). 637～654
2. Gesk, R. and R. Roll. On Valuing American Call Options with the Black-Scholes European Formula. *Journal of Finance*, 1984-06(39). 443～455
3. Whaley, R. On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends. *Journal of Financial Economics*, 1981-06(9). 207～212

第七章

1. Arrow, K. The Role of Securities in the Optional Allocation of Risk-Bearing. *Review of Economic Studies*, 1964-04(31). 91～96
2. Kreps, D. M. Arbitrage and Equilibrium in Economics with Infinitely Commodities. *Journal of Mathematical Economics*, 1981-03(8). 15～35
3. Harrison, J. M. and D. M. Kreps. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, 1979-07(20). 381～408

第八章

1. Stiglitz, J. E. A Re-Examination of the Modigliani-Mill Theorem. *The American Economic Review*, 1969-12(59). 784～793
2. Baron, D. P. Default and the Modigliani-Miller Theorem: A Syntheisi. *American Economic Review*, 1976-03(66). 204～212
3. Van Horne, J. C. Warrant Valuation in Relation to Volatility and Opportunity Costs. *Industrial Management Review*, Spring 1969(10). 17～32
4. Asquith, P. and D. Mullins, Jr. Convertible Debt, Corporate Call Policy and Voluntary Conversion. *Journal of Finance*, 1991(46). 1270～1289
5. McDonald, R. and D. Siegel. The Value of Waiting to Invest. *Quarterly Journal of Economics*, 1986(101). 707～727

第九章

1. Treynor, J. and R. Ferguson. In Defense of Technical Analysis. *Journal of Finance*, 1985(40). 757～773
2. Grossman, S. and J. Stiglitz. On the Impossibility of Informationally Efficient Markets. *American Economic Review*, 1980-06(70). 393～408
3. Cox, J. C., J. Ingersoll and S. Ross. The Relation between Forward prices and Futures Prices. *Journal of Financial Economics*, 1981-12(9). 321～346

4. Bicksler, J. and A. H. Chen. An Economic Analysis of Interest Swaps. *Journal of Finance*, 1986(41). 645～655
5. Black, F., E. Derman and W. Toy. A one-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options. *Financial Analysis Journal*, 1990-01～02. 3～39

第十章

1. Barr, P. G. Risk Management Gets New Respect. *Pension and Investments*, 1995-03(20). 20
2. Cox, J. C., J. Ingersoll and S. Ross. Duration and the Measurement of Basis Risk. *Journal of Business*, 1979-01(52). 51～61
3. Biewag, G. Immunization, Duration and the Term Structure of interest Rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1977(12). 725～743
4. Bank for International Settlement. *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards.* Basle, Switzerland, 1988
5. J. P. Morgan. *CreditMetrics*^{TM}—Technical Document, 1997

推荐阅读的书目

1. 马歇尔和班赛尔. 金融工程. 宋逢明等译. 北京：清华大学出版社,1998
2. 格利茨. 金融工程学. 唐旭等译. 北京：经济科学出版社,1998
3. Bodie Z. and R. Merton. *Finance*. Prentice Hall, 1998
4. Brealey, R. A. and S. C. Myers. *Principles of Corporate Finance*. 5. The McGraw-Hill Companies, Inc. ,1996
5. Bodie, Z., A. Kane and A. J. Marcus. *Investments*. 3. IRWIN, 1996
6. Merton, R. C. *Continuous-Time Finance*. Blackwell, 1996
7. Duffie, D. *Dynamic Asset Pricing Theory*. 2. Princeton University Press, 1996
8. Hull, J. Options, *Futures, and Other Derivatives*. 3. Prentice Hall, 1997

后记：金融工程的发展展望

如果我们把金融工程看做是金融学的最新发展，那么，金融工程的未来发展实际上也就是金融学的未来发展，或者至少是金融学未来发展的一部分。

国际上金融学发展的主流和国内对金融学科的传统界定存在明显的差异。国内传统的金融学科的内容主要包括货币银行学和国际金融，而国际上把前者看做宏观经济学的一部分（货币经济学），后者则是国际经济学的一部分（国际经济学由国际贸易和国际金融两部分组成）。因此，国内传统的金融学教学和研究，基本上仍然停留在经济学的范畴内，并没有真正把金融学作为一门独立的学科来发展。国内大部分涉及货币金融研究的经济学者，都对无套利分析方法缺乏了解和把握，或者没有把这种分析方法提升到金融学的基本方法论来看待，这也就说明对金融市场有别于其他商品和服务市场的基本特性缺乏充分的认识。

在国外优秀的商学院里发展的金融学，主要包括公司财务和资本市场两个组成部分（后者在课程设置上常常称做投资学）。这一学科体系，从 50 年代发端，其理论框架到 80 年代已经基本确立。在将近半个世纪的发展历程中，许多重要的理论成果经过反复的辩驳和大量的实证检验，证明其逻辑体系是完整的。在承认其逻辑前提（即承认此类理论成果的前提假设条件）的同时来挑战现有理论成果的研究努力，其成功的可能性是不大的。而随着金融工程的兴起，金融学的理论研究更加紧密地与企业的财务活动和金融市场的实际运作相结合。在企业经营和市场交易的实践中，又在不断地对现有的理论提出疑问。真正的挑战来自于对现有理论逻辑前提的质疑，在不断探索新的理论假设前提的过程中，才可能酝酿重大的突破。我认为，对现有理论前提的重大质疑主要在于以下两个方面。

经典的公司财务理论有一项基本的假设前提，即公司财务管理的目标和企业总的经营目标是一致的，都是企业所有者（股东）财富的最大化，即股东价值的最大化。但是，由于所有权和经营权的分离，企业的所有者（股东）和企业的经营者（经理人员）之间存在委托代理关系。由于股东对企业经营的监控需要成本，对于企业的实际经营状况，股东和经理人员之间存在信息不对称。经理人员为了自身利益，往往会牺牲股东的利益，从而产生代理问题（这种代理问题包括逆向选择（reverse selection）和道德风险（moral hazard）在内）。进而言之，任何企业实际上是所有与企业相关者的利益综合体，企业的经营活动实际上是这些利益相关者价值的综合和权衡。现代产业和企业组织理论在这方面的研究成果，已经和正在不断地对公司财务理论的基础产生冲击。这方面研究工作的经济学基础是信息经济学中有关不对称信息的理论，以及博弈论经济学。现在在公司财务理论的研究中，汲取博弈论、信息经济学和公司组织理论的营养养份来进行治理结构的研究，就是明显的例证。企业的兼并、收购和财务重组等资本运营的研究，也显然与此有关。金融工程对于

企业财务结构的设计(好比是设计整架金融/财务机器),当然也一定与这样的研究发展动向紧密相连。不过,根本性的重大理论突破目前还只在酝酿过程中,通过修正甚至改变经典公司财务理论的基础假设来重构理论框架的工作,看来还有待时日。

在资本市场的研究方面,最基本的理论假设是理性预期。这又和有效率市场假设紧密相连。在市场实践中,所有的市场参与者是否能始终保持理性,就像金融市场是否能真正和始终保持有效率一样,是令人怀疑的。更何况人们的想法会随着环境的变化而变化,人们并不总是风险厌恶型的。即使是,人们对风险的厌恶程度也会经常变化。对理性预期的质疑导致行为金融学(behavioral finance)的产生,虽然行为金融学迄今为止还未能使主流金融学界信服,但至少说明了一种动向。在市场实践中提出的问题则更有说服力。从事因特网业务的上市公司的股票价值在市场上被明显高估,但并不出现即时的套利,这是现有的关于市场效率的理论所不能解释的。是否存在隐含的市场分割(这又和市场的完全性有关),也是需要深入探讨的问题。至少,有效率市场假设对金融市场特性的描述看来是过于笼统。预测技术(如技术分析和原本分析)在金融市场中究竟是否能真正发挥作用,必须深入到市场的微观结构层面才能揭示规律。这也正是为什么关于金融市场微观结构的研究会成为现在金融研究的一个热点的原因。

金融学的研究和经济学的研究一样,人们不能指望有一种理论或者模型能够完全彻底地描述其规律。有的理论模型和实际的经济和金融现象相差很远,但这样的模型又会很有价值,因为能帮助我们加深对经济和金融内在规律的认识。例如,折现现金流模型具有很强的解释功能,但用来为资产估值和定价是很难操作的,所得的结果往往与实际相去甚远。企业财务活动(融资和投资)的价值必须通过市场交易来实现,而在金融市场上,资产的估值和定价是相对的,即通过与其他资产的比较依据无套利关系定出。无套利均衡分析又是与对资产未来现金流的预期紧密联系在一起的,这涉及市场效率等许多非常深刻的金融概念。

虽然说,金融学和经济学一样并不完全排斥纯粹概念推理的研究方法,但从目前的学术动态看(即处于正在酝酿突破而还远未达到重大突破的阶段),金融学更强调从企业和市场实际出发的实证研究。所以,金融学的研究特别强调数据的重要性,对于金融工程来说则更是如此。离开了实际数据的支持和检验,单纯从概念到概念(这是文科研究人员所习惯的)或者从模型到模型(数学家们容易产生这种倾向)的研究,很难获得具有重要金融涵义的成果。面向实际的问题(这被称为问题导向—issue-oriented),从数据出发,通过建立模型来揭示数据所隐含的规律,从中提取新的金融概念;或者在问题中发现新的金融概念,建立模型来描述概念,进而利用实际数据来检验其正确性。由问题导向、数据、模型和概念三者交互作用有机结合的研究方法,是目前金融学研究的主要科学途径。

因此,金融工程今后的发展,一定紧密地结合金融学的研究主流,或者可以说,金融工程本身就代表着金融学研究主流的一个方面。它的主要研究内容,亦将面向由于经典的公司财务和资本市场理论的基本前提假设和实际情况的差异所导致的一系列问题。它的主要研究方法,则是实证的(甚至是实验的)研究,依赖于企业和市场的实际数据。只是金融工程更加着重于产品的创造,从新型金融工具的设计、开发和实施到企业的兼并、收购和重组的财务设计,更加直接地面向融资决策和投资决策。

金融研究和一切其他的科学探索一样，是人类认识世界的一个无止境的过程。而正确把握科学的发展方向无疑是第一位重要的事情。这里所表述的陋见，有一些是我与国内外同行讨论的结果，有一些则是自己个人的观点，写出来求教于同行专家。

面向中国的实际问题，引进和建立符合国际规范的金融学科（包括金融工程），采用规范的方法来研究和推动中国金融系统的发展，需要众多的有志者付出持续不断的努力。希望本书能作为此类努力中微小的一部分，起到抛砖引玉的作用。

[General Information]
书名=金融工程原理：无套利均衡分析
作者=
页数=209
SS号=10301737
出版日期=